פתרונות למשימה 33: מבנים במושב

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית
- המרות בין ייצוגים: מילולי, גיאומטרי, מרחבי ומישורי
- משפט פיתגורס
- משולש ישר זווית
- קטע אמצעים במשולש
- ישר מאונך למישור
- נפח תיבה ונפח פירמידה מרובעת

הערות למורה:

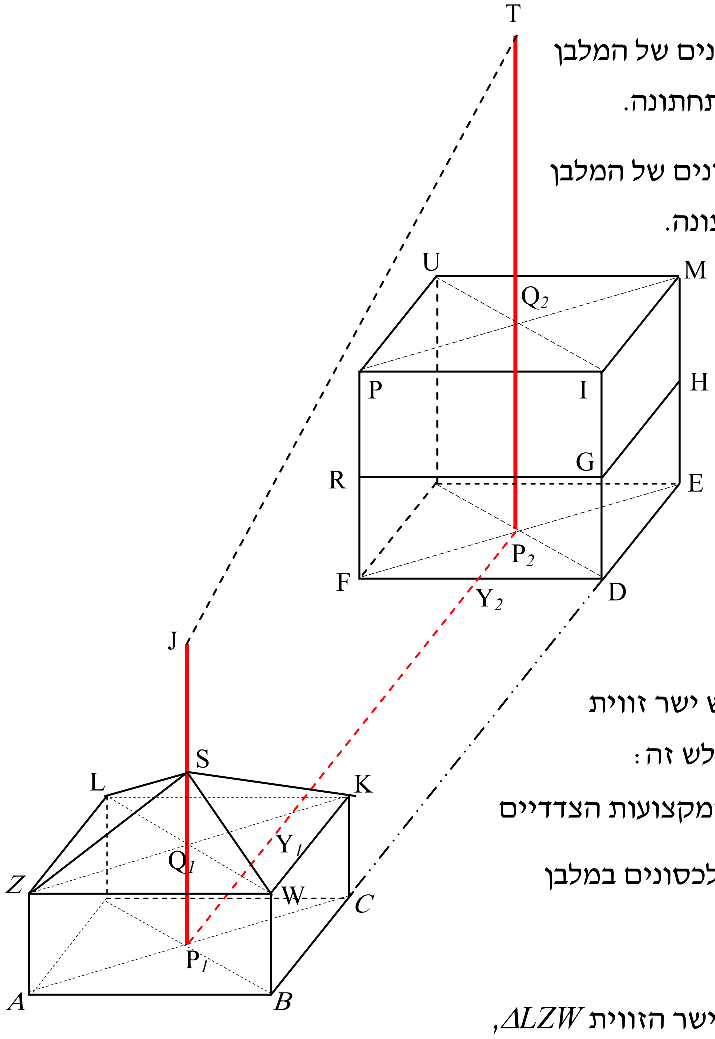
במשימה זו נדרשים התלמידים מלבד ידע הנדסי גם לראייה גשטלטית (מכלול ופרטים) של השרטוטים. על התלמיד להבחין בכל שרטוט בפרטים הרלבנטיים מתוך גודש הפרטים המופיעים בשרטוט, ולקשרם למלל הכתוב. בפרט, צריכים התלמידים בכל שלב לאתר את המישור, שמתאים לאותו שלב, ולגלות את החתך שבין המבנים במושב לבין המישור שבו הוא בחר.

לדוגמא, כדי לחשב את גובה תחתית האנטנה במבנה הראשון, יש להתבונן במישור העובר דרך הנקודות S, W, L. התלמידים צריכים להבחין שחיתוך המישור עם הקומה העליונה הוא המשולש האמור, שחיתוך המישור עם הקומה התחתונה הוא מלבן, שחיתוך המישור עם המבנה בכללותו הוא מחומש (שימוש זה במחומש לא בא לידי ביטוי), ושהאנטנה שמעל אותו מבנה כלולה במישור זה.

מומלץ לשים לב למישורים נוספים: כדאי לברר האם חזית המבנה הראשון $BCKW$ וחזית המבנה השני $DEMI$ מונחים על מישור אחד? כדאי לברר האם שתי האנטנות כלולות במישור אחד? כדאי לברר האם שני המישורים הללו מקבילים זה לזה? כל אלה הן שאלות אשר אינן כלולות במשימה עצמה, אולם ההתייחסות להן במפורש מקלה מאד על התלמידים לראות את דרך פתרון המשימה.

שאלה 1. **לכל אחת משתי האנטנות, מצאו את גובה הקצה התחתון של האנטנה מהקרקע ואת גובה הקצה העליון של האנטנה מהקרקע.**

לגבי **המבנה הראשון**:



נסמן ב- P_1 את מפגש האלכסונים של המלבן המהווה את הרצפה בקומה התחתונה.

נסמן ב- Q_1 את מפגש האלכסונים של המלבן המהווה את הגג בקומה התחתונה.

גובה הקצה התחתון של האנטנה מהקרקע הוא SP_1.

$SP_1 = SQ_1 + Q_1P_1$.

Q_1P_1 הוא גובה הקומה התחתונה, ולפי הנתון:

$Q_1P_1 =$ 5 מ'.

נותר לחשב את SQ_1.

נתבונן ב- ΔSQ_1W. זהו משולש ישר זווית כי האנטנה מאונכת לגג. במשולש זה:

$SW =$ 8.5 מ' (בפירמידה כל המקצועות הצדדיים שווים), ו- $Q_1W = \frac{1}{2}LW$ (האלכסונים במלבן חוצים זה את זה).

נחשב את LW מתוך המשולש ישר הזווית ΔLZW, תוך שימוש במשפט פיתגורס: $LW^2 = 12^2 + 9^2 = 225$

$\Leftarrow$ $LW =$ 15 מ' $\Leftarrow$ $Q_1W =$ 7.5 מ'.

עתה נשתמש במשפט פיתגורס ב- ΔSQ_1W ונקבל:

$SQ_1^2 = SW^2 - Q_1W^2 = 8.5^2 - 7.5^2 = 16$ $\Leftarrow$ $SQ_1 =$ 4 מ'

וקיבלנו שגובה הקצה התחתון של האנטנה מהקרקע הוא:

$SP_1 = SQ_1 + Q_1P_1 =$ 4 מ' + 5 מ' = 9 מ'

גובה הקצה העליון של האנטנה מהקרקע הוא:

$JP_1 = JS + SP_1 =$ 7 מ' + 9 מ' = 16 מ'

לגבי **המבנה השני**:

נסמן ב- P_2 את מפגש האלכסונים של המלבן המהווה את הרצפה בקומה התחתונה.

נסמן ב- Q_2 את מפגש האלכסונים של הגג בקומה העליונה.

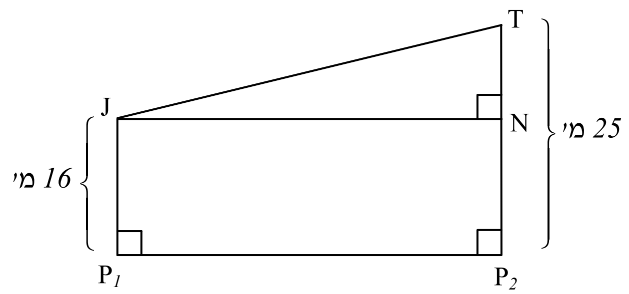
גובה <u>הקצה התחתון</u> של האנטנה מהקרקע הוא Q_2P_2 ולפי הנתון: $Q_2P_2 =$ 10 מ' (גובה של שתי קומות).

גובה <u>הקצה העליון</u> של האנטנה מהקרקע הוא:

$TP_2 = TQ_2 + Q_2P_2 =$ 15 מ' + 10 מ' = 25 מ'

שאלה 2. לפי תקנון המושב, המרחק המינימלי בין שני מבנים צריך להיות לפחות 30 מ'. האם שני המבנים שבשאלה זו עומדים בתנאי התקן?

לחישוב המרחק בין הבתים, נעביר אנך מהקצה האנטנה (J) במבנה הראשון אל האנטנה (TP_2) במבנה השני (ר' שרטוט).



בסעיף א' קיבלנו:

$TP_2 =$ 25 מ' , $JP_1 =$ 16 מ' ולכן: $TN = TP_2 - NP_2 =$ 25 מ' – 16 מ' = 9 מ'.

$\triangle TNJ$ הוא משולש ישר זווית שבו $JT =$ 41 מ' ו- $TN =$ 9 מ'.

על פי משפט פיתגורס נקבל: $JN^2 = JT^2 - TN^2 = 41^2 - 9^2 = 1600 \Leftarrow JN =$ 40 מ'

ולכן גם $P_1P_2 =$ 40 מ'.

נסמן את נקודת החיתוך של הישר (הדמיוני) P_1P_2 עם הקיר של המבנה הראשון ב- Y_1 ועם הקיר של המבנה השני ב- Y_2 (ר' שרטוט קודם).

המרחק המבוקש בין הבתים הוא Y_1Y_2.

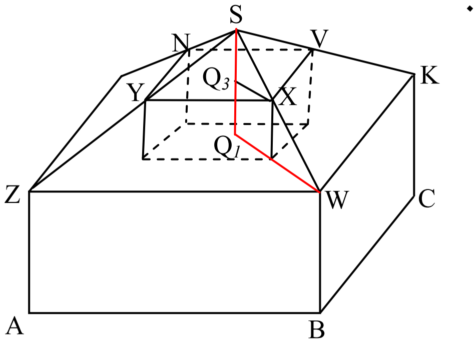
כיוון ש- P_1Y_1 ו- P_2Y_2 שווים כל אחד מהם לחצי מרוחב המבנה (תכונת המלבן), נקבל: $P_1Y_1 =$ 4.5 מ' ו- $P_2Y_2 =$ 4.5 מ' ולכן:

$Y_1Y_2 = P_1P_2 - P_1Y_1 - P_2Y_2 =$ 40 מ' – 4.5 מ' – 4.5 מ' = 31 מ'

קיבלנו שהמרחק בין שני המבנים הוא 31 מ' ולכן הוא עומד בתנאי התקן (לפחות 30 מ').

שאלה 3. **כדי לנצל כיאות את הנפח של הפירמידה, במבנה הראשון, העבירו בכל פאה של הפירמידה קטע אמצעים (NY, YX, XV, VN), הורידו עמודים על גג הקומה התחתונה, והעבירו קירות מתאימים. כך נוצרה תיבה (שבסיסה העליון הוא $YXVN$) ועליה פירמידה.**

מצא את נפח התיבה ואת נפח הפירמידה.



נסמן ב- Q_3 את גובה הפירמידה הקטנה $SVXYN$ (ר' שרטוט).

על פי משפט על קטע אמצעים במשולש נקבל: $XV=\frac{1}{2}\cdot WK=\frac{1}{2}\cdot 9=4.5$ מ'

ו- $XY=\frac{1}{2}\cdot WZ=\frac{1}{2}\cdot 12=6$ מ'.

מכאן, שטח הבסיס של הפירמידה הקטנה הוא: 27 מ"ר $= 4.5$ מ' $\cdot$ 6 מ' .

נחשב עתה את גובה הפירמידה הקטנה.

ב- ΔSQ_1W הקטע XQ_3 הוא קטע אמצעים (יוצא מאמצע הצלע SW ומקביל לצלע Q_1W) ולכן: $SQ_3=Q_3Q_1=\frac{1}{2}\cdot SQ_1=\frac{1}{2}\cdot 4=2$ מ' (בשאלה 1 מצאנו את SQ_1).

מכאן, <u>נפח הפירמידה</u> הקטנה הוא: $\frac{1}{3}\cdot 27\cdot 2=18$ מ"ק.

קיבלנו שגובה התיבה הקטנה 2 מ' $= Q_3Q_1$. לכן, <u>נפח התיבה</u> הקטנה הוא:

54 מ"ק $= 27\cdot 2$.

