

פתרונות למשימה 28: בגלגל הענק

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית
- המרות בין ייצוגים: מילולי, גיאומטרי, ואלגברי
- תכונות של מעגל (אורכי קטעים וקשתות במעגל, זוויות מרכזיות והיקפיות)
- צורות חסומות במעגל.
- חישובי זוויות

הערות למורה:

1. האורכים במשימה זו מיוצגים בחלקם על ידי מספרים אירציונליים, הנובעים מחישובי אורכי קשתות במעגל, או חישובי צלעות במשולש ישר זווית על ידי משפט פיתגורס. התשובה יכולה להינתן בעזרת π ובעזרת סימן השורש או כמספר רציונלי המקורב לתוצאה. אם התשובה ניתנת כמספר רציונלי, יש להנחות את התלמידים לרשום שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית. תלמידי 4-5 י"ל יעגלו את המספר למאיות, ותלמידי 3 י"ל יקצצו אותו. למרות האמור לעיל, חשוב לציין בכיתה שלא בכל שאלה התשובה המתקבלת מחישוב היא התשובה לשאלה. למשל כאשר שואלים על מרחק בין אנשים אין טעם לדייק עד למילימטרים. השאלה באיזה דיוק לבחור היא חלק אינטגרלי של אוריינות מתמטית.
2. רצוי לנתח את המצב לפני שמתחילים לענות על השאלות. מכיוון שהמרחקים בין התחנות שווים, נוצרות 12 זוויות מרכזיות שוות, שכל אחת מהן היא 30° , וכן 12 מיתרים שווים באורכם. לנוחיות ההסברים נסמן את מרכז המעגל ב-O.
3. עלול להיווצר בלבול בין התחנות (השנתות) לבין מרחק הנסיעה בין תחנות (הקשתות על המעגל), למשל בשאלה 5. כאשר אדם עובר מרחק נסיעה של x תחנות, הוא עובר דרך $x + 1$ תחנות.

שאלה 1. כאשר דינה נמצאת בתחנה 6, יוסי נמצא בתחנה 3.

א. מה הגובה של דינה מעל האדמה?

דינה נמצאת בגובה 11 מ' מעל פני האדמה.

ב. מהו בערך המרחק בקו ישר (המרחק האווירי) בין יוסי ודינה?

המרחק האווירי בין יוסי ודינה לפי חישוב הוא $5\sqrt{2}$ מ'.

הרדיוסים המגיעים אל תחנות 3 ו-6 מאונכים זה לזה. המרחק בין התחנות

האלה הוא אורך היתר (d) במשולש ישר זווית ושווה שוקיים שאורך כל ניצב

$$d^2 = 5^2 + 5^2 \quad \text{בו } 5 \text{ מ'}$$

$$d^2 = 50 \quad \text{על-פי משפט פיתגורס:}$$

$$d = \sqrt{50}$$

$$d = 5\sqrt{2} = 7.07$$

המרחק האווירי בין יוסי לדינה הוא בערך 7 מ'.

ג. איזה מרחק נסיעה בערך (על הגלגל) צריך יוסי לנסוע כדי להגיע לתחנה 6?

יוסי צריך לנסוע 2.5π מ' כדי להגיע לתחנה 6.

יוסי צריך לנסוע רבע סיבוב, לכן המרחק (m) שהוא צריך לנסוע הוא $m = \frac{10\pi}{4}$.

מרחק זה הוא בערך 7.85 מ'.

שאלה 2. סמנו נכון או לא נכון ונמקו.

א. המרחק האווירי בין התחנות 0 ו-2 גדול פי שניים מן המרחק האווירי בין

התחנות 0 ו-1.

לא נכון. אמנם הקשת (המרחק לאורך הגלגל) בין התחנות 0 ו-2 הוא פי 2

מהקשת בין התחנות 0 ו-1. אבל לא כך לגבי מרחק אווירי. אם נחבר את התחנות

0, 1, ו-2 בשלושה קטעים יתקבל משולש שווה שוקיים, ובו סכום שתי צלעות

גדול מן הצלע השלישית.

ב. המרחק האווירי בין תחנות 3 ו-5 שווה למרחק האווירי בין התחנות 5 ו-7.

נכון. המרחקים האלה הם אורכי מיתרים השייכים לקשתות מרכזיות שוות בנות

60° כל אחת.

ג. כאשר התא שגד יושב בו נמצא בתחנה 9, נמצא גד במרחק 6 מ' מן האדמה.

נכון. התחנה 9 נמצאת במרחק רדיוס אחד ועוד מטר אחד מן האדמה.

ד. כאשר תא מסתובב בין תחנה 4 לתחנה 7 הוא מסתובב סיבוב של 90° .

נכון. הסיבוב בין תחנה לתחנה הוא של 30° .

ה. כאשר אדם מסתובב בגלגל הענק הוא נמצא לכל היותר בגובה של 10 מ' מעל פני האדמה.

לא נכון. יש להוסיף לקוטר הגלגל מטר אחד (מרחקו מן האדמה).

שאלה 3. א. a ו-b הם מספרים של שתי תחנות שהמרחק האווירי ביניהן הוא 10 מ'.

נתון כי $a > b$. מהו הקשר האלגברי בין a ו-b?

$a = b + 6$. a ו-b נמצאות על קוטר במעגל.

ב. c ו-d הם מספרים של שתי תחנות שהמרחק האווירי ביניהן הוא 5 מ'.

נתון כי $c > d$. מהו הקשר האלגברי בין c ו-d?

$c = d + 2$. O (מרכז המעגל), C ו-D (תחנות שמספרן c ו-d בהתאמה) הם

קודקודים של משולש שווה צלעות, כי המרחק האווירי בין C ו-D הוא כאורך

הרדיוס. לכן כל הזוויות הן בנות 60° , לכן יש מרחק של שתי תחנות בין c ל-d.

ג. x ו-y הם מספרים של שתי תחנות שמרחק הנסיעה ביניהן הוא $\frac{10\pi}{3}$ מ'.

נתון כי $x > y$. מהו הקשר האלגברי בין x ו-y?

$x = y + 4$. המרחק המתואר הוא מרחק של $\frac{1}{3}$ מעגל. תוספת של ארבע תחנות

הוא סיבוב של $\frac{1}{3}$ מעגל.

שאלה 4. אדם העולה לגלגל הענק מסתובב בו 6 סיבובים בתמורה לכרטיס אחד.

איזה מרחק בערך עובר אדם בנסיעתו בגלגל הענק בתמורה לכרטיס אחד?

אדם נוסע בתמורה לכרטיס אחד 60π מ', שהם כ- 188.5 מ'.

שאלה 5. כמה תחנות עברה ורד בנסיעתה בגלגל אם המרחק שעברה היה 7.85 מ' בקירוב?

ורד עברה מרחק נסיעה של שלוש תחנות.

אפשר לפתור את השאלה בעזרת שיקולי יחס.

היקף הגלגל הוא 31.42. $4.00 = 7.85 : 31.42$ כלומר מרחק זה נכנס 4 פעמים

בסיבוב מלא.

לכן ורד עברה רבע סיבוב שהוא מרחק נסיעה של שלוש תחנות.

אפשר לפתור את השאלה באלגברה.

$$x \text{ מייצג את מספר התחנות שורד עברה. } \frac{x}{12} \cdot 10\pi = 7.85$$

$$x = 3$$

אפשר גם להסתמך על שאלה ג1.

שאלה 6. הראו כי הקטע העובר בין התחנות 0 ו-2, מאונך לקטע העובר דרך התחנות 2 ו-6. המשולש שקדקודיו בתחנות 2, 0 ו-6 הוא משולש ישר זווית כי הזווית שקדקודה בתחנה 2 היא זווית היקפית שנשענת על הקוטר.

שאלה 7. א. הראו כי הקטע העובר בין התחנות 11 ו-2, מאונך לקטע העובר דרך התחנות 2 ו-5.

המשולש שקדקודיו בתחנות 2, 11 ו-5 הוא משולש ישר זווית כי הזווית שקדקודה בתחנה 2 היא זווית היקפית שנשענת על הקוטר.
על שאלה זו אפשר לענות גם עם שיקולים גיאומטריים אחרים, כי המשולש שנוצר הוא גם שווה שוקיים. התיכון שהוא גם גובה שווה באורכו למחצית הבסיס (רדיוסים). התיכון לבסיס מחלק את המשולש לשני משולשים שווים שוקיים וישרי זווית. הזוויות החדות במשולשים אלה הן בנות 45° מעלות. לכן זווית הראש של המשולש היא 90° .

ב. מצאו עוד זוג קטעים מאונכים המחברים בין תחנות a ו-b ובין תחנות b ו-c.
כל זוג קטעים המקיים שהתחנות a ו-b נמצאות על קוטר אחד.

שאלה 8. א. מה היה המרחק של דן מן האדמה כאשר הוא היה בתחנה 4?

המרחק של דן מהאדמה הוא 8.5 מ'.

נוריד מתחנה 4 אנך לקוטר העובר דרך תחנות 3 ו-9. מתקבל משולש יפה (משולש ישר זווית בעל זווית של 30°). הניצב מול הזווית הזו שווה למחצית היתר כלומר אורכו 2.5 מ'. כדי למצוא את מרחקו של דן מן האדמה יש להוסיף למרחק זה את אורך הרדיוס ועוד מטר אחד.

ב. מה היה המרחק של דנה מן האדמה כאשר היא הייתה בתחנה 5?
המרחק של דנה מן האדמה הוא 10.33 מ'.

נוריד מתחנה 5 אנך לקוטר העובר דרך תחנות 3 ו-9. מתקבל משולש יפה. אורך ניצב אחד שלו הוא 2.5 מ' (ראו סעיף א). כדי למצוא את הניצב השני (d) נשתמש במשפט פיתגורס.

$$d^2 = 5^2 - 2.5^2$$

$$d^2 = \frac{75}{4} = 18.75$$

$$d = 2.5\sqrt{3} = 4.33$$

למרחק הזה יש להוסיף את אורך הרדיוס ועוד מטר אחד.

שאלה 9. הקיפו את סוג המשולש הנוצר מקטעים שמעבירים בין התחנות לפי הסדר הרשום. הסבירו את תשובתכם.

שווה שוקיים, שווה צלעות, ישר זווית, אחר

א. $2 \leftarrow 6 \leftarrow 10 \leftarrow 2$

משולש שווה צלעות. לקשתות שוות שייכים מיתרים שווים.

ב. $3 \leftarrow 6 \leftarrow 10 \leftarrow 3$

משולש אחר. הצלעות שונות כי הקשתות שלהן שונות. ואין זווית ישרה כי אין צלע שהיא קוטר במעגל.

ג. $3 \leftarrow 6 \leftarrow 9 \leftarrow 3$

משולש שווה שוקיים, כי יש לו רק שתי שוקיים השייכות לקשתות שוות. המשולש הוא גם ישר זווית כי יש לו זווית הנשענת על קוטר.

ד. $0 \leftarrow 2 \leftarrow 7 \leftarrow 0$

משולש שווה שוקיים, כי יש לו רק שתי צלעות השייכות לקשתות שוות, ואין לו זווית ישרה.

שאלה 10. הקיפו את סוג המרובע המשוכלל ביותר הנוצר מקטעים שמעבירים בין התחנות לפי הסדר הרשום. הסבירו את תשובתכם.

ריבוע, מלבן, טרפז שו"ש, דלתון, מרובע אחר

א. $1 \leftarrow 5 \leftarrow 7 \leftarrow 11 \leftarrow 1$

מלבן. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית, ומקבילית בעלת אלכסונים שווים, היא מלבן.

ב. $2 \leftarrow 5 \leftarrow 8 \leftarrow 11 \leftarrow 2$

ריבוע. כל הצלעות שוות כי כל הקשתות שוות. לכן המרובע הוא מעוין. מעוין שאלכסוניו שווים הוא ריבוע.

ג. $1 \leftarrow 3 \leftarrow 5 \leftarrow 9 \leftarrow 1$

דלתון. למרובע יש שני זוגות צלעות סמוכות שוות, כי הקשתות שוות.

ד. $2 \leftarrow 5 \leftarrow 7 \leftarrow 10 \leftarrow 2$

טרפז שווה שוקיים. למרובע יש רק זוג אחד של צלעות נגדיות שוות, כי הקשתות שלהן שוות. חישוב הזוויות במרובע (על פי ארבעה משולשים שווי שוקיים שמרכז המעגל הוא קדקוד זווית הראש שלהם) מראה כי יש שתי זוויות בנות 75° ושתי זוויות בנות 105° . סכום שתי זוויות סמוכות הוא 180° . לכן שתיים מצלעות המרובע מקבילות.

אפשר להוכיח גם בדרך קצרה יותר אבל היא דורשת קווי עזר. על הקשתות השוות נשענות זוויות היקפיות שוות. הזוויות ההיקפיות האלו הן זוויות מתחלפות בין שני ישרים וחותך, ולכן הישרים מקבילים.