

מיסוי במצרים העתיקה¹

רקע



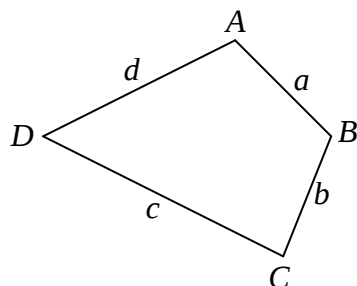
לפני כארבעת אלפים וחמש מאות שנים חיו במצרים המצרים הקדמוניים. מצרים אלה ידעו לבצע חישובים מורכבים, למרות שבזמנם עדיין לא הומצאו הסימנים המתמטיים. צורתם של השדות במצרים הייתה כשל מרובעים, וגובי המיסים של המלך נהגו לגבות מס על השדות בהתאם לשטחם.

שיטה לחישוב שטחי מרובעים במצרים העתיקה

במצרים נמצאה כתובת קיר משנת 1800 לפנה"ס, ובה מידע לגבי השיטה בה נהגו לחשב את שטחי השדות שצורתן מרובע. החישוב התבצע באופן הבא (בסימונים המקובלים בימינו):

נסמן את אורכי צלעותיו של המרובע ב- a, b, c, d .

a ו- c הם אורכי צלעות נגדיות, b ו- d הם אורכי צלעות נגדיות.



שטח השדה המרובע ABCD חושב לפי הנוסחה:

$$S = \frac{(a + c) \cdot (b + d)}{4}$$

יש לבדוק את נכונות הנוסחה לפיה חישוב המצרים את השטחים של שדות מרובעים.

שאלה 1. קבעו את נכונות הנוסחה המצרית עבור **ריבוע** כלשהו על פי השלבים הבאים:

- א. שרטטו ריבוע, וסמנו את קדקודיו ואת אורכי צלעותיו.
- ב. חשבו את שטחו של הריבוע, בהתאם לנוסחה שהייתה מקובלת במצרים העתיקה.
- ג. חשבו את שטחו המדויק של הריבוע.
- ד. במקרה שאין הנוסחה המצרית מתאימה לחישוב המדויק של שטח הריבוע, קבעו האם השטח המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית גדול או קטן מהשטח האמיתי של הריבוע.

¹ משימה זו עובדה על-פי דוזורצ'ב י., ויניצקי ג., קופר א. (1997): תכנים היסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל.

- שאלה 2. קבעו את נכונות הנוסחה המצרית עבור **מלבן** כלשהו על פי השלבים הבאים :
- א. שרטטו מלבן, וסמנו את קדקודיו ואת אורכי צלעותיו.
 - ב. חשבו את שטחו של המלבן, בהתאם לנוסחה שהייתה מקובלת במצרים העתיקה.
 - ג. חשבו את שטחו המדויק של המלבן.
 - ד. במקרה שאין הנוסחה המצרית מתאימה לחישוב המדויק של שטח המלבן, קבעו האם השטח המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית גדול או קטן מהשטח האמיתי של המלבן.
- שאלה 3. קבעו את נכונות הנוסחה המצרית עבור **מעוין** כלשהו על פי השלבים הבאים :
- א. שרטטו מעוין, וסמנו את קדקודיו ואת אורכי צלעותיו.
 - ב. חשבו את שטחו של המעוין, בהתאם לנוסחה שהייתה מקובלת במצרים העתיקה.
 - ג. חשבו את שטחו המדויק של המעוין.
 - ד. במקרה שאין הנוסחה המצרית מתאימה לחישוב המדויק של שטח המעוין, קבעו האם השטח המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית גדול או קטן מהשטח האמיתי של המעוין.
- שאלה 4. קבעו את נכונות הנוסחה המצרית עבור **מקבילית** כלשהי על פי השלבים הבאים :
- א. שרטטו מקבילית, וסמנו את קדקודיה ואת אורכי צלעותיה.
 - ב. חשבו את שטחה של המקבילית, בהתאם לנוסחה שהייתה מקובלת במצרים העתיקה.
 - ג. חשבו את שטחה המדויק של המקבילית.
 - ד. במקרה שאין הנוסחה המצרית מתאימה לחישוב המדויק של שטח המקבילית, קבעו האם השטח המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית גדול או קטן מהשטח האמיתי של המקבילית.
- שאלה 5. קבעו את נכונות הנוסחה המצרית עבור **טרפז שווה שוקיים** כלשהו על פי השלבים הבאים :
- א. שרטטו טרפז שווה שוקיים, וסמנו את קדקודיו ואת אורכי צלעותיו.
 - ב. חשבו את שטחו של הטרפז השווה שוקיים, בהתאם לנוסחה שהייתה מקובלת במצרים העתיקה.
 - ג. חשבו את שטחו המדויק של הטרפז השווה שוקיים.

ד. במקרה שאין הנוסחה המצרית מתאימה לחישוב המדויק של שטח הטרפז שווה השוקיים, קבעו האם השטח המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית גדול או קטן מהשטח האמיתי של הטרפז שווה השוקיים.

גובי המסים במצרים העתיקה נהגו לגבות מס על השדות בהתאם לגודל השטח שלהם. גובי המסים חישבו שטח של שדה מרובע לפי הנוסחה שהוצגה.

שאלה 6. עבור אילו מהמרובעים שנבדקו על ידיכם מתאים ההיגד הבא?

ריבוע מעוין מלבן מקבילית טרפז שווה שוקיים	א. בשל שיטת החישוב, גובי המסים קיבלו את המגיע להם במדויק.
ריבוע מעוין מלבן מקבילית טרפז שווה שוקיים	ב. בשל שיטת החישוב, גובי המסים אף פעם לא הפסידו כסף.
ריבוע מעוין מלבן מקבילית טרפז שווה שוקיים	ג. בשל שיטת החישוב, גובי המסים גבו מס מעבר למגיע להם.
ריבוע מעוין מלבן מקבילית טרפז שווה שוקיים	ד. בשל שיטת החישוב, גובי המסים גבו מס נמוך מהמגיע להם.

פתרון משימה: מיסוי במצרים העתיקה

מאפייני המשימה:

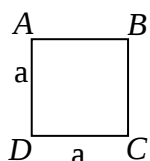
- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים;
- הבחנה בדומה ובשונה בין שני מודלים למדידת שטח;
- חישוב שטחי מרובעים תוך הבחנה ביניהם;
- שיקולי כדאיות;
- ההיסטוריה של המתמטיקה.

הערה למורה:

ניתן להוכיח כי הנוסחה המצרית לחישוב שטח של מרובע מביאה תמיד לתוצאה גדולה או שווה לשטח המרובע. משפט זה והוכחתו חורגים מתוכנית הלימודים בגאומטריה, ולכן ניתן לטפל במשימה זו באמצעות בדיקה של מקרים פרטיים המוכרים לתלמידים.

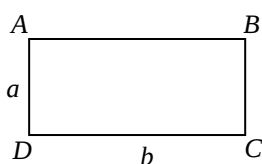
נסמן ב- S את שטח המרובע לפי הנוסחאות המקובלות כיום, וב- S_M את שטח המרובע המתקבל לפי הנוסחה המצרית.

עבור כל אחד מהמרובעים המופיעים בטבלה, נחשב את S ואת S_M , ונבדוק את הקשר בין הגדלים.



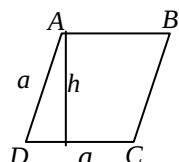
שאלה 1. ריבוע

$$S_M = \frac{(a+a) \cdot (a+a)}{4} = \frac{2a \cdot 2a}{4} = a^2 \quad S = a^2 \quad \Rightarrow S = S_M$$



שאלה 2. מלבן

$$S_M = \frac{(a+a) \cdot (b+b)}{4} = \frac{2a \cdot 2b}{4} = a \cdot b \quad S = a \cdot b \quad \Rightarrow S = S_M$$

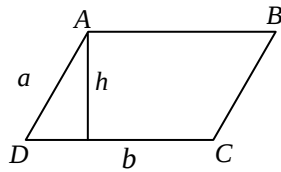


שאלה 3. מעוין

$$S_M = \frac{(a+a) \cdot (a+a)}{4} = \frac{2a \cdot 2a}{4} = a^2 \quad S = a \cdot h \quad , h < a$$

ולכן $S < S_M$

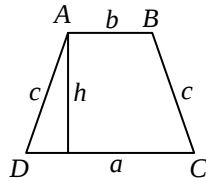
שאלה 4. מקבילית



$$S_M = \frac{(a+a) \cdot (b+b)}{4} = \frac{2a \cdot 2b}{4} = a \cdot b \quad S = b \cdot h \quad , h < a$$

ולכן $S < S_M$

שאלה 5. טרפז שווה-שוקיים



$$S_M = \frac{(a+b) \cdot (c+c)}{4} = \frac{(a+b) \cdot 2c}{4} = \frac{(a+b) \cdot c}{2} \quad S = \frac{(a+b) \cdot h}{2} \quad , h < c$$

ולכן $S < S_M$

שאלה 6. עבור אילו מהמרובעים שנבדקו על ידיכם מתאים ההיגד הבא?

- | | | |
|------------------|---------|---|
| ריבוע | מלבן | א. בשל שיטת החישוב, גובי המסים קיבלו את המגיע להם במדויק. |
| ריבוע | מלבן | ב. בשל שיטת החישוב, גובי המסים אף פעם לא הפסידו כסף. |
| מעוין | מקבילית | |
| טרפז שווה שוקיים | | |
| מעוין | מקבילית | ג. בשל שיטת החישוב, גובי המסים גבו מס מעבר למגיע להם. |
| טרפז שווה שוקיים | | ד. בשל שיטת החישוב, גובי המסים גבו מס נמוך מהמגיע להם. |
| אינו מתאים | | |

שיטה לגביית מסים במצרים העתיקה

מתוך החישובים עולה כי קיימים מקרים בהם שטח המרובע המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית שווה לשטח המתקבל באמצעות שימוש בנוסחאות המקובלות בימינו, וישנם מקרים בהם שטח המרובע המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית גדול מהשטח המתקבל באמצעות שימוש בנוסחאות המקובלות בימינו.

לכן, יהיה נכון לאמור בכלליות שבשל שיטת החישוב, גובי המסים אף פעם לא הפסידו כסף.

קיימת הוכחה לכך שהיגד זה נכון עבור מרובע כלשהו. ההוכחה חורגת מתוכנית הלימודים של ביה"ס, וניתן למצוא אותה בספר: דוזרצ'ב י., ויניצקי ג., קופר א. (1997): תכנים היסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה, הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל.