

חלקת דשא¹

בגן עירוני יש חלקת דשא, שצורתה משולש ישר זווית. אורך היתר בו הוא 30 מ', אורך אחד הניצבים 15 מ', והזווית מולו היא 30° . בשעות הלילה המוקדמות מוארת חלקת הדשא באמצעות פנס בודד המאיר לכל הכיוונים, ובשעות הלילה המאוחרות מושקה הדשא באמצעות ממטרה יחידה. את הפנס יש למקם באופן שיאיר את כל חלקת הדשא, ואת הממטרה יש למקם כך שהמטרת המים תכסה את כל חלקת הדשא.

שאלה 1. חשבו את אורך הצלע השלישית (ברמת דיוק של 1 מ') של חלקת הדשא, ואת שטח החלקה.

מיקום הפנס

כדי לחסוך בהוצאות החשמל, החליט מתכנן הגן למקם את הפנס כך שיאיר את כל שטח החלקה, ומעט ככל האפשר מחוץ לה.

שאלה 2. העיגול המואר :

- א. חשבו את שטח העיגול המואר, כאשר רדיוס התאורה הוא 10 מ'.
ב. האם ניתן למקם עיגול שרדיוסו 10 מ' כך שיכסה את כל שטח המשולש?
(1) אם כן : קבעו היכן מרכז העיגול.
(2) אם לא : קבעו מהו הרדיוס הקטן ביותר הדרוש, כדי ששטח העיגול יכסה את שטח המשולש.
ג. קבעו את המיקום בו יש להציב את הפנס כך שרדיוס העיגול המואר יהיה קטן ככל האפשר, ועם זאת - יכסה את כל שטח המשולש.

¹ חלק מרעיון משימה זו לקוח מתוך דוגמת אוריינות מתמטית:

The PISA 2003 Assessment Framework, Programme for International Student Assessment, p. 26.

שאלה 3. סמנו בטבלה הבאה את הביטויים המתאימים :

מחוז למשולש	על שפת המשולש	בתוך המשולש	כאשר חלקת הדשא היא בצורה של :
			1. משולש חד זווית, אז מיקום הפנס יהיה
			2. משולש ישר זווית, אז מיקום הפנס יהיה
			3. משולש קהה זווית, אז מיקום הפנס יהיה

מיקום הממטרה

כדי להשקות את הדשא יש להעמיד ממטרה אחת. ניתן לתכנן את פעולת הממטרה תוך התייחסות לשני היבטים :

I. ניתן לקבוע אורך קבוע של קטע, כך שלכל אורכו תמטיר הממטרה מים.

II. ניתן לקבוע את המפתח של זווית הפעולה של הממטרה. על המתכנן לקבוע את מיקום הממטרה ואת אופן הפעלתה, כך שיתקיימו התנאים הבאים :

- הממטרה צריכה להיות מוצבת בתוך חלקת הדשא או על שפתה.
- הדשא בכל שטח החלקה יומטר.
- כדי לחסוך במים, יהיה שטח ההמטרה קטן ככל האפשר.

שאלה 4. הגן קבע את מיקום הממטרה בקדקוד המשולש בו הזווית ישרה.

- מה צריך להיות רדיוס ההמטרה הקטן ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?
- מה צריכה להיות זווית ההמטרה הקטנה ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?
- מהו שטח ההמטרה המתקבל?
- מהו השטח המומטר ללא צורך?

שאלה 5. מתכנן הגן העדיף שהממטרה תעמוד באמצע היתר.

- מה צריך להיות רדיוס ההמטרה הקטן ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?
- מה צריכה להיות זווית ההמטרה הקטנה ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?
- מהו שטח ההמטרה המתקבל?
- מהו השטח המומטר ללא צורך?

- שאלה 6. הציעו מיקום חדש לממטרה, אשר יביא לחיסכון בצריכת המים שלה.
- א. עבור המיקום המוצע, מה צריך להיות רדיוס ההמטרה הקטן ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?
- ב. עבור המיקום המוצע, מה צריכה להיות זווית ההמטרה הקטנה ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?
- ג. מהו שטח ההמטרה המתקבל?
- ד. מהו השטח המומטר ללא צורך?

שיפור מראה החלקה

כדי לגוון את מראה החלקה, החליט הגנן לחלקה לשתי חלקות נפרדות, ולשתול בהן שני זנים שונים של דשא. סביב שתי החלקות החליט הגנן לשתול רצועה של פרחי סלסלי-הכסף.

לאחר התייעצות עם אדריכל גינון, הוחלט לחלק את החלקה באמצעות הקטע שבין אמצע היתר לבין הקודקוד שמולו.

- שאלה 7. קבעו את היחס בין השטחים שנועדו לשני הסוגים השונים של הדשא.
- שאלה 8. קבעו מהו אורכה הכולל של הרצועה שנועדה לשתילת פרחי סלסלי-הכסף.

פתרונות למשימה: חלקת דשא

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים;
- דיון בנושא מרכז המעגל החוסם משולש;
- חזרה על הנושאים: שטח עיגול ושטח גזרה;
- מציאת אופטימום.

הערות למורה:

ניתן לחלק את ביצוע המשימה לשתיים או שלוש פעילויות נפרדות. במקרה של חלוקה כזו, ראוי לדרוש מהתלמידים לענות בכל פעילות על שאלה 1, כיוון שפתירתה מובילה להמשך הפעילויות.

הפעילות הראשונה עשויה לכלול את השאלות 1, 2 ו-3. הפעילות השנייה עשויה לכלול את שאלות 1, 4, 5 ו-6. הפעילות השלישית עשויה לכלול את השאלות 1, 7 ו-8. עם סיום פתירת שתי הפעילויות הראשונות, כדאי לדון בכיתה בהבדל העקרוני בין אילוצי הבעיה בכל פעילות ופעילות, ובהשלכתו על הפתרונות השונים.

שאלה 1. חשבו את אורך הצלע השלישית (ברמת דיוק של 1 מ') של חלקת הדשא, ואת שטח החלקה.

26 מ'.

באמצעות משפט פיתגורס, ניתן לחשב כי אורך הצלע השלישית הוא $15 \cdot \sqrt{3}$. תשובה זו - על אף דיוקה - היא חסרת משמעות אוריינית. ניתן לחשב את קירוב המספר, ולקבל 25.98 מ'. גם תשובה זו איננה תואמת, בהקשר של אורך גינה. די לדעת את אורך הגינה ברמת דיוק של מטר, ואז התוצאה המתאימה היא 26 מ'.

שאלה 2. העיגול המואר:

א. חשבו את שטח העיגול המואר, כאשר רדיוס התאורה הוא 10 מ'. 314 מ"ר.

נוסחת חישוב שטח העיגול היא $\pi \cdot r^2$. יש להציב $r=10$.

ב. האם ניתן למקם עיגול שרדיוסו 10 מ' כך שיכסה את כל שטח המשולש?

(1) אם כן: קבעו היכן מרכז העיגול.

(2) אם לא: קבעו מהו הרדיוס הקטן ביותר הדרוש כדי ששטח העיגול יכסה את שטח המשולש.

לא ניתן למקם עיגול שרדיוסו 10 מ' כך שיכסה את כל שטח המשולש.

בעיגול המתואר, המרחק בין שני קצות הקוטר הוא 20 מ', בעוד שבגינה המתוארת שתי הפינות מרוחקות זו מזו ב-30 מ'. הקוטר המינימלי הדרוש לכיסוי המשולש הוא 30 מ', ולכן הרדיוס הקטן ביותר המאפשר את כיסוי כל שטח המשולש הוא 15 מ'.

ג. קבעו את המיקום בו יש להציב את הפנס כך שרדיוס העיגול המואר יהיה קטן ככל האפשר, ועם זאת - יכסה את כל שטח המשולש.

המיקום המבוקש הוא אמצע היתר.

ניתן להגיע לתוצאה זו בשתי דרכים שונות:

I. המיקום המבוקש צריך להיות מרכז המעגל החוסם, שהוא מפגש האנכים האמצעיים.

II. במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר. לכן אמצע היתר מרוחק במידה שווה משלושת קדקודי המשולש.

שאלה 3. כאשר חלקת הדשא היא בצורה של משולש חד זווית, אז מיקום הפנס יהיה בתוך המשולש.

כאשר חלקת הדשא היא בצורה של משולש ישר זווית, אז מיקום הפנס יהיה על שפת המשולש.

כאשר חלקת הדשא היא בצורה של משולש קהה זווית, אז מיקום הפנס יהיה מחוץ למשולש.

תוצאות אלה נובעות ממיקום שונה של מרכז המעגל החוסם (שהוא מפגש האנכים האמצעיים) במשולשים שונים.

שאלה 4. הגנן קבע את מיקום הממטרה בקדקוד המשולש בו הזווית ישרה.

א. מה צריך להיות רדיוס ההמטרה הקטן ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?
רדיוס ההמטרה הקטן ביותר הוא 26 מ', כאורך הניצב הארוך.

ב. מה צריכה להיות זווית ההמטרה הקטנה ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?
זווית ההמטרה הקטנה ביותר היא של רבע סיבוב (90°), כי הממטרה מוקמה בקדקוד בו הזווית ישרה.

ג. מהו שטח ההמטרה המתקבל?

שטח ההמטרה המתקבל הוא של רבע עיגול שרדיוסו 26 מ', כלומר: 169π , שהם, בערך, 531 מ"ר.

ד. מהו השטח המומטר ללא צורך?

כיוון ששטח חלקת הדשא הוא 195 מ"ר, השטח המומטר ללא צורך הוא כ- 336 מ"ר.

שאלה 5. מתכנן הגן העדיף שהמטרה תעמוד באמצע היתר.

א. מה צריך להיות רדיוס ההמטרה הקטן ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?

רדיוס ההמטרה הקטן ביותר הוא 15 מ', כרדיוס המעגל החוסם.

ב. מה צריכה להיות זווית ההמטרה הקטנה ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?

זווית ההמטרה הקטנה ביותר היא של חצי סיבוב (180°), כי ההמטרה מוקמה באמצע הצלע ולכן נדרשת זווית שטוחה.

ג. מהו שטח ההמטרה המתקבל?

שטח ההמטרה המתקבל הוא של חצי עיגול שרדיוסו 15 מ', כלומר: 112.5π , שהם, בערך, 353 מ"ר. כדאי לשים לב לכך ששטח ההמטרה הזה קטן משטח ההמטרה שבהצעה הקודמת.

ד. מהו השטח המומטר ללא צורך?

כיוון ששטח חלקת הדשא הוא 195 מ"ר, השטח המומטר ללא צורך הוא כ- 158 מ"ר.

שאלה 6. הציעו מיקום חדש לממטרה, אשר יביא לחיסכון בצריכת המים שלה.

מיקום אפשרי, אשר יביא לחיסכון בצריכת המים ביחס לשתי ההצעות הקודמות, הוא בקדקוד בו הזווית הקטנה ביותר, ומפתחה הוא תריסרית סיבוב (30°).

א. עבור המיקום המוצע, מה צריך להיות רדיוס ההמטרה הקטן ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?

רדיוס ההמטרה הקטן ביותר הוא 30 מ', כאורך היתר.

ב. עבור המיקום המוצע, מה צריכה להיות זווית ההמטרה הקטנה ביותר, על מנת שכל החלקה תושקה?

זווית ההמטרה הקטנה ביותר היא של תריסרית סיבוב (30°).

ג. מהו שטח ההמטרה המתקבל?

שטח ההמטרה המתקבל הוא של תריסרית עיגול שרדיוסו 30 מ', כלומר: 75π , שהם, בערך, 236 מ"ר.

ד. מהו השטח המומטר ללא צורך?

כיוון ששטח חלקת הדשא הוא 195 מ"ר, השטח המומטר ללא צורך הוא כ- 41 מ"ר.

הערה: הצעה סבירה אחרת שעשויה להיות מוצעת על ידי אחדים מהתלמידים היא הצבת הממטרה בקדקוד השלישי, בו הזווית היא של שישית סיבוב (60°). ראוי שלא לפסול את ההצעה, ולדון בה במיוחד בהשוואה להצעה הקודמת. יש להדגיש את השוויון ברדיוס ההמטרה לעומת מפתח ההמטרה הגדול פי שניים. דבר זה מגדיל את שטח ההמטרה בדיוק פי שניים, ואת השטח המומטר ללא צורך - אף יותר.

נסכם את שלוש ההצעות למיקום הממטרה בטבלה:

מיקום הממטרה	רדיוס ההמטרה	זווית ההמטרה	שטח ההמטרה	השטח המומטר ללא צורך
קדקוד הזווית הישרה	26 מ'	90°	בערך 531 מ"ר	בערך 336 מ"ר
אמצע היתר	15 מ'	180°	בערך 353 מ"ר	בערך 158 מ"ר
קדקוד הזווית החדה	30 מ'	30°	בערך 236 מ"ר	בערך 41 מ"ר

מתוך התבוננות בטבלה, ברור שמבין האפשרויות המוצעות ההצעה למיקום הממטרה בקדקוד הזווית החדה היא ההצעה הטובה ביותר. הוכחה כללית יותר למיקום האופטימלי של הממטרה - חורגת מתכנית הלימודים.

שאלה 7. קבעו את היחס בין השטחים שנועדו לשני הסוגים השונים של הדשא.

היחס המבוקש הוא 1:1.

הקטע שבין אמצע היתר לבין הקדקוד שמולו נקרא תיכון. כל תיכון במשולש מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח.

שאלה 8. קבעו מהו אורכה הכולל של הרצועה שנועדה לשתילת פרחי סלסלי-הכסף.

אורך רצועת פרחי סלסלי-הכסף הוא 86 מ'.

אורך רצועת פרחי סלסלי-הכסף כולל את שלוש הצלעות ואת התיכון.

אורך היתר: 30 מ' (נתון).

אורך ניצב אחד: 15 מ' (נתון).

אורך ניצב שני: 26 מ' (ראה שאלה 1).

אורך התיכון: 15 מ' (התיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר).