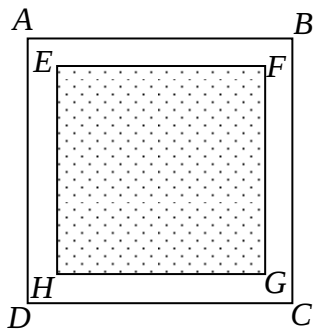


אדריכל גינן

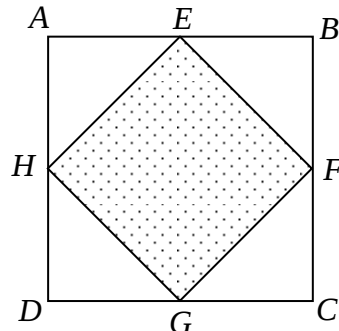
לעיריית מסילתי מתחם ציבורי בצורת ריבוע, שאורך צלעו 14 מ'.
 במתחם מתוכננים בניית בריכת מים ונטיעת גן. העירייה פנתה למשרד אדריכלי הגינן
 'גינתי', וביקשה לקבל מספר הצעות לתכנון המתחם.
 לפניכם מספר הצעות תכנון אותן הגיש המשרד לעירייה (השטח המנוקד הוא שטח פני
 הבריכה):

הצעה שנייה



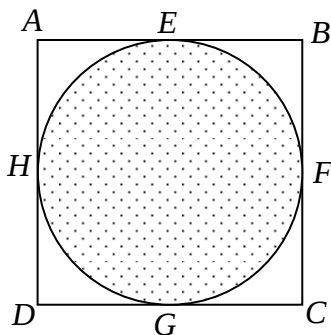
ABCD הוא המתחם הריבועי.
 הריבוע EFGH, שאורך צלעו 11 מ', מייצג
 את פני הבריכה. הצלעות של שני הריבועים
 מקבילות בהתאמה, והבריכה ממוקמת
 במרחק שווה מצלעות המתחם.
 השטח הנותר הוא שטח הגינן.

הצעה ראשונה



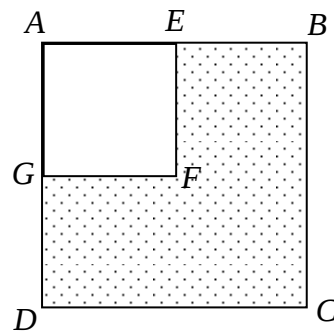
ABCD הוא המתחם הריבועי.
 נקודות E, F, G, H הן אמצעי הצלעות של
 הריבוע.
 המרובע EFGH מייצג את פני הבריכה,
 והשטח הנותר הוא שטח הגינן.

הצעה רביעית



ABCD הוא המתחם הריבועי.
 העיגול המשורטט משיק למתחם הריבועי
 ומייצג את פני הבריכה. השטח הנותר
 מהמתחם הוא שטח הגינן.
 נקודות E, F, G, H הן נקודות ההשקה.

הצעה שלישית



ABCD הוא המתחם הריבועי.
 הריבוע AEGF מייצג את שטח הגינן,
 כאשר הנקודות E ו-G הן אמצעי הצלעות
 AB ו-AD בהתאמה.
 השטח הנותר הוא שטח הבריכה.

- שאלה 1. קבעו מהי הצורה של שטח פני הבריקה בהצעה השלישית.
- שאלה 2. חברי מועצת עיריית מסילתי בחנו את כל ההצעות שהגיש האדריכל, תוך התייחסות לגודל הבריקה עצמה.
- א. באיזו הצעה שטח פני הבריקה גדול יותר: בהצעה הראשונה או בהצעה הרביעית?
- מבלי לחשב, עזרו לחברי המועצה להחליט.
- ב. באיזו הצעה שטח פני הבריקה גדול יותר: בהצעה הראשונה או בהצעה השלישית?
- מבלי לחשב, עזרו לחברי המועצה להחליט.
- שאלה 3. חשבו את שטח הגיגון בכל אחת מההצעות.
- שאלה 4. חברי מועצת עיריית מסילתי היו צריכים להחליט איזו הצעה לקבל, תוך התייחסות למגוון שיקולים.
- א. התקציב העומד לרשות המועצה לצורך מילוי הבריקה הוא קבוע. חברי המועצה חישבו ומצאו, שבתקציב זה ניתן יהיה למלא רק 150 מ"ק מים בבריקה.
- הציעו לחברי המועצה את ההצעה בה עומק המים בבריקה יהיה הגדול ביותר.
- ב. מצאו את היחס בין שטח פני הבריקה לשטח הגיגון בכל אחת מההצעות.
- באיזו הצעה יבחרו חברי המועצה, אם ברצונם לבחור בהצעה שבה יחס זה הוא הגדול ביותר?
- שאלה 5. הציעו קריטריון נוסף לבחירה, ומצאו לפי קריטריון זה את ההצעה שתיבחר.

פתרונות למשימה: אדריכל גינן

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים;
- אומדן שטחים;
- חישובי שטחים;
- השלמה לשלם;
- יחס ופרופורציה;
- מעגל;
- שקילת עדיפויות בין אפשרויות שונות.

הערה למורה:

1. למידת הגאומטריה בכיתה ז' נעשית באופן אינטואיטיבי, ועל כן אין צורך להתעכב במהלך ההוראה על הוכחות פורמאליות של הפתרונות. לעומת זאת, מורה המשתמש במשימה זו בכיתה ט', יוכל להדגיש דווקא את הצדדים הפורמאליים הנדרשים להוכחת נכונות פתרונות התרגילים (למשל: להוכיח כי צורת הברכה בהצעה הראשונה היא ריבוע).
2. ניתן לשאול תלמידים מצטיינים שאלות נוספות, שאינן קשורות אך ורק לחישובי שטח הברכה, אלא נוגעות גם לצורתה במרחב. שאלה אפשרית עשויה להיות: בהנחה שלברכה יש עומק אחיד, קבעו איזה גוף הוא הברכה בכל אחת מההצעות (תשובות: תיבה, תיבה, מנסרה ישרה משושה, גליל ישר).

שאלה 1. קבעו מהי הצורה של שטח פני הברכה בהצעה השלישית.

בהצעה השלישית שטח פני הברכה הוא משושה לא קמור (יש בו זווית הגדולה מ- 180°).

שאלה 2. חברי מועצת עיריית מסילתי בחנו את כל ההצעות שהגיש האדריכל, תוך התייחסות לגודל הברכה עצמה.

א. באיזו הצעה שטח פני הברכה גדול יותר: בהצעה הראשונה או בהצעה הרביעית?

מבלי לחשב, עזרו לחברי המועצה להחליט.

שטח פני הברכה בהצעה הרביעית גדול משטח פני הברכה בהצעה הראשונה. נקודות ההשקה בהצעה הרביעית, הן אמצעי צלעות המתחם הריבועי (ההוכחה בהמשך). נעביר את הקטעים המחברים את נקודות ההשקה הסמוכות, ונקבל את שטח פני הברכה הראשונה, אשר נמצא בתוך שטח פני הברכה הרביעית, וממילא גם קטן ממנו.

כאמור, ניתן לדרוש מתלמידים מתקדמים את ההוכחה לטענה, לפיה נקודות ההשקה נמצאות באמצעי צלעות הריבוע. להלן ההוכחה:

נסמן ב-Q את מרכז המעגל.

נחבר את A ו-B (קדקודי הריבוע) עם מרכז המעגל.

נקבל: $\angle A = 45^\circ$, $\angle A_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle A = 22.5^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $\angle B_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle B = 22.5^\circ$ (משפט

אודות שני משיקים למעגל היוצאים מנקודה מחוצה לו)

$\angle AQB = 90^\circ$ ב- $\triangle AQB$.

קיבלנו ש- $\triangle AQB$ הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים.

QE הוא גובה ב- $\triangle AQB$ (רדיוס מאונך למשיק).

הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון, ולכן QE הוא

תיכון $\Leftarrow AE = EB$.

באופן דומה, ניתן להוכיח לגבי נקודות ההשקה האחרות.

ב. באיזו הצעה שטח פני הבריקה גדול יותר: בהצעה הראשונה או בהצעה השלישית.

מבלי לחשב, עזרו לחברי המועצה להחליט.

שטח פני הבריקה בהצעה השלישית גדול משטח פני הבריקה בהצעה הראשונה.

בהצעה הראשונה שטח הבריקה הוא מחצית משטח המתחם. (הוכחה: נעביר את

האלכסונים EG ו-HF. נוצרים שמונה משולשים חופפים לפי צ"צ. ארבעה

מתוך השמונה מכסים את שטח הבריקה, ולכן שטחו הוא חצי משטח המתחם.)

בהצעה השלישית שטח הגיגון הוא רבע משטח המתחם. מכאן, שטח פני הבריקה

הוא שלושה רבעים משטח המתחם.

ניתן להגיע לתוצאה זו גם תוך התייחסות לשטח הגיגון, ומציאת המשלים לשטח

המתחם כולו. בהצעה הראשונה מורכב שטח הגיגון מארבעה משולשים ישרי

זווית ושווי שוקיים, החופפים זה לזה (לפי צ"צ – בכולם שני הניצבים שווים

למחצית אורך המתחם, וביניהם זווית ישרה). בהצעה השלישית מורכב שטח

הגיגון משני משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים החופפים זה לזה, וחופפים לכל

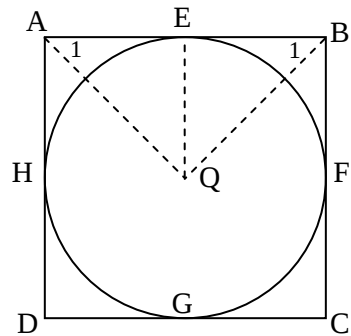
אחד מן המשולשים שבהצעה הראשונה. לכן, סכום שטחיהם של ארבעת

המשולשים בהצעה הראשונה גדול מסכום שטחיהם של שני המשולשים בהצעה

השלישית, ולכן שטח הגיגון בהצעה הראשונה גדול יותר משטח הגיגון בהצעה

השלישית. כיוון ששטח המתחם זהה בשתי ההצעות, שטח פני הבריקה בהצעה

השלישית גדול יותר משטח פני הבריקה בהצעה הראשונה.



שאלה 3. חשבו את שטח הגיגון בכל אחת מההצעות.

בהצעה הראשונה שטח הגיגון הוא מחצית משטח המתחם, ושווה ל- 98 מ"ר:

$$\frac{14^2}{2} = 98$$

בהצעה השנייה שטח הגיגון הוא 75 מ"ר: $14^2 - 11^2 = 196 - 121$

בהצעה השלישית שטח הגיגון הוא 49 מ"ר: $7^2 = 49$

בהצעה הרביעית שטח הגיגון הוא כ- 42 מ"ר: $14^2 - \pi \cdot 7^2$

יש להבהיר לתלמידים שתוצאה זו הינה קירוב לתוצאה האמיתית. אף על פי כן, מכל בחינה מעשית (בתכנון המתחם), ניתן להתייחס אליה כאל תוצאה מדויקת.

זוהי אף הזדמנות לבחון עם התלמידים את מידת הדיוק הראויה להצבה במקום π .

אם נציב 3 יתקבל: $196 - 3 \cdot 49 = 49$

אם נציב 3.1 יתקבל: $196 - 3.1 \cdot 49 = 44.1$

אם נציב 3.14 יתקבל: $196 - 3.14 \cdot 49 = 42.14$

אם נציב 3.142 יתקבל: $196 - 3.142 \cdot 49 = 42.042$

כיוון שנדרשת רמת דיוק של 1 מ"ר, ברור ששתי ההצבות הראשונות אינן מדויקות דיין, בעוד ההצבה האחרונה נותנת דיוק מיותר. ההצבה המתאימה בחישוב זה עבור π היא 3.14.

שאלה 4. חברי מועצת עיריית מסילתי היו צריכים להחליט איזו הצעה לקבל, תוך התייחסות למגוון שיקולים.

א. התקציב העומד לרשות המועצה לצורך מילוי הבריכה הוא קבוע. חברי המועצה חישבו ומצאו, שבתקציב זה ניתן יהיה למלא רק 150 מ"ק מים בבריכה.

הציעו לחברי המועצה את ההצעה בה עומק המים בבריכה יהיה הגדול ביותר.

עומק המים הגדול ביותר יהיה בהצעה הראשונה.

כיוון שכמות המים קבועה, עומק המים בבריכה תלוי בשטח. אם שטח פני הבריכה הוא הקטן ביותר, אז עומק המים הוא הגדול ביותר. ראינו ששטח פני הבריכה בהצעה הראשונה הוא הקטן מבין כל ההצעות, ולכן עומק המים בה יהיה הגדול ביותר.

אפשר, כמובן, גם לחשב את עומק המים בכל אחת מהבריכות שבהצעות (העומק שווה לנפח המים (150) מחולק בשטח הבריכה). גם בדרך זו תיבחר ההצעה הראשונה.

ב. מצאו את היחס בין שטח פני הבריקה לשטח הגיגון בכל אחת מההצעות.

באיזו הצעה יבחרו חברי המועצה, אם ברצונם לבחור בהצעה שבה יחס זה הוא הגדול ביותר?

	הצעה 1	הצעה 2	הצעה 3	הצעה 4
שטח הבריקה	98 מ"ר	121 מ"ר	147 מ"ר	154 מ"ר
שטח הגיגון	98 מ"ר	75 מ"ר	49 מ"ר	42 מ"ר
היחס בין השטחים	$\frac{98}{98} = 1$	$\frac{121}{75} = 1.61$	$\frac{147}{49} = 3$	$\frac{154}{42} = 3.67$

בהצעה הראשונה והשלישית ניתן היה לחשב יחס זה ללא חישובי השטחים עצמם.

בהצעה הראשונה שטח הגיגון ושטח הבריקה שווים כל אחד מהם למחצית שטח המתחם. בהצעה הראשונה השטחים שווים זה לזה, ולכן היחס ביניהם הוא 1:1. בהצעה השלישית שטח הבריקה הוא שלושה רבעים משטח המתחם, ושטח הגיגון הוא רבע משטח המתחם, ולכן היחס ביניהם הוא 3:1.

שאלה 5. הציעו קריטריון נוסף לבחירה, ומצאו לפי קריטריון זה את ההצעה שתיבחר.

להלן מוצעים מספר קריטריונים להעדפה, בהם ניתן לדון עם התלמידים. בכל מקרה, עדיף לשוחח עם התלמידים על ההצעות שהם יביאו לכיתה.

א. יש להקים סככה למציל בתוך המתחם ובצמוד לבריקה, כך שזווית הראייה הנדרשת מהמציל תהיה קטנה ככל הניתן (וזאת - לשיפור בטיחות השוחים בבריקה).

במצב זה נחפש את ההצעה עם זווית הראייה הקטנה ביותר. ההצעה המתאימה היא השנייה, בה ניתן להציב את הסככה בפינה ולקבל זווית ראייה ישרה.

ב. נדרשת בניית הגבהה מסביב לבריקה. יש לבחור את ההצעה הזולה ביותר.

במצב זה נחפש את ההצעה בה היקף הבריקה הוא הקטן ביותר. ההצעה המתאימה היא הראשונה. (ההיקפים: 40 מ', 44 מ', 56 מ', 44 מ')

ג. נדרשת בניית הגבהה מסביב לבריקה. יש לבחור את ההצעה הזולה ביותר ביחס לשטח הבריקה.

במצב זה נחפש את ההצעה בה היחס בין היקף הבריקה לשטחה הוא הקטן ביותר. ההצעה המתאימה היא הרביעית. (היחסים: 0.29, 0.38, 0.36, 0.41). זוהי הזדמנות לציין שהמעגל הוא הצורה המימורית בעלת היחס הקטן ביותר בין היקף הצורה לשטחה.