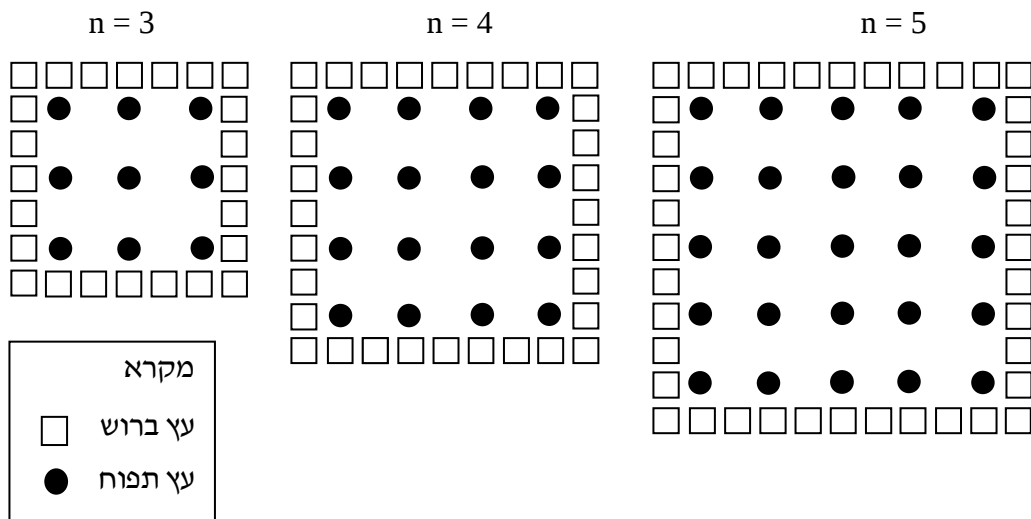


מטע תפוחים¹

איכר נוטע עצי תפוח בתבנית של ריבוע. כדי להגן על העצים מפני הרוח, נוטע האיכר עצי ברוש סביב מטע התפוחים.

התרשים הבא מתאר את צורתו של מטע התפוחים, עם הברושים המקיפים אותו.

התרשים מציג שלוש אפשרויות שונות. n מייצג את מספר עצי התפוח בשורה או בטור.



שאלה 1. השלימו את הטבלה הבאה (n מספר השורות של עצי התפוח):

n	מספר עצי התפוח	מספר עצי הברוש
3	9	24
4		
5		
6		
12		
n		

שאלה 2. אם מספר עצי התפוח הוא 100, מה מספר עצי הברוש? הסבירו כיצד חישבתם.

שאלה 3. עבור ערך מסוים של n מספר עצי התפוח שווה למספר עצי הברוש.

מצאו ערך זה של n , והסבירו כיצד חישבתם אותו.

שאלה 4. לאיכר יש מטע עם 5 שורות ו-5 טורים של עצי תפוחים, והוא מעוניין להרחיבו תוך

שמירה על החוקיות. אם האיכר מגדיל את המטע שלו, כלומר נוטע עצי תפוח

נוספים, הוא צריך לנטוע גם עצי ברוש נוספים. מה משתנה בקצב מהיר יותר, מספר

עצי התפוח או מספר עצי הברוש? נמקו את תשובתכם.

¹ מעובד משאלון PISA 2001

- שאלה 5.** אם האיכר יגדיל את מספר השורות של עצי התפוח בפרדסו פי 3, וכן יגדיל את מספר העצים בשורה פי 3 תוך שמירה על החוקיות, פי כמה יגדל מספר עצי התפוח, ופי כמה יגדל מספר עצי הברוש הדרושים? סמנו את התשובה הנכונה, ונמקו.
- מספר עצי התפוח יגדל פי 3, ומספר עצי הברוש יגדל פי 3.
 - מספר עצי התפוח יגדל פי 6, ומספר עצי הברוש יגדל פי 6.
 - מספר עצי התפוח יגדל פי 6, ומספר עצי הברוש יגדל פי 3.
 - מספר עצי התפוח יגדל פי 9, ומספר עצי הברוש יגדל פי 3.
 - מספר עצי התפוח יגדל פי 9, ומספר עצי הברוש יגדל פי 8.

- שאלה 6.** רשמו 'נכון' או 'לא נכון', ונמקו.
- כשמספר השורות של עצי התפוח עולה ב- 1, גדל מספר עצי הברוש ב- 8.
 - אם מספר השורות של עצי התפוח הוא מספר זוגי, אז מספר עצי התפוח הוא מספר המתחלק ב- 4.
 - אם מספר עצי התפוח בשורה וגם מספר השורות יגדלו פי 5, יגדל מספר עצי התפוח פי 10.
 - לא ייתכן שמספר עצי הברוש יהיה שווה למחצית מספר עצי התפוח.
- שאלה 7.** א. האם ייתכן כי כאשר מספר השורות (n) של עצי התפוח גדל ב- 1, וכך גם מספר העצים בשורה, גדל מספר עצי התפוח ב- 27? אם כן – מצאו את n, אם לא – הסבירו מדוע.
- ב. האם ייתכן כי כאשר מספר השורות (n) של עצי התפוח גדל ב- 1, גדל מספר עצי התפוח ב- 32? אם כן – מצאו את n, אם לא – הסבירו מדוע.

- שאלה 8.** רשמו 'נכון' או 'לא נכון', ונמקו:
- הסדרה המתארת את מספר עצי הברוש היא סדרה חשבונית. אם כן – מצאו את הפרש הסדרה. אם לא – נמקו.
 - הסדרה המתארת את מספר עצי התפוח היא סדרה חשבונית. אם כן – מצאו את הפרש הסדרה. אם לא – נמקו.
 - הסדרה המתארת את מספר עצי התפוח **אותם יש להוסיף** כאשר נוספים שורה אחת וטור אחד של עצי תפוח היא סדרה חשבונית. אם כן – מצאו את הפרש הסדרה. אם לא – נמקו.

- שאלה 9.** בפרדס של האיכר יש בסך הכל 660 עצים. כמה עצי תפוח יש לאיכר?

פתרונות למשימה: מטע תפוחים

מאפייני המשימה:

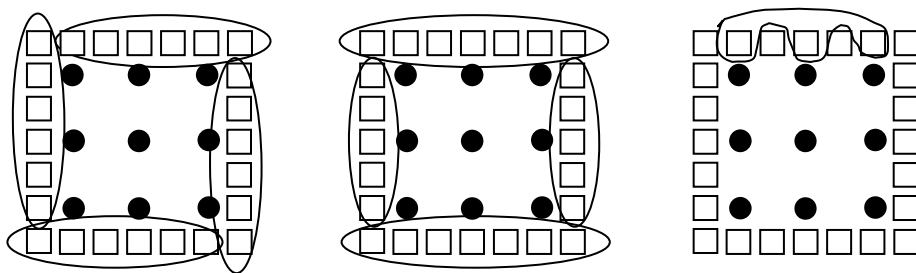
- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים: מילולי, מספרי, אלגברי וחזותי;
- השתנות ריבועית וקצב השתנות;
- פתירת משוואה ריבועית;
- סדרה חשבונית ופתירת שאלות הנוגעות לה.

שאלה 1. השלימו את הטבלה הבאה (n מספר השורות של עצי התפוח):

בפתירת שאלה זו אפשר להתחיל בספירה, ובהמשך לחפש את ההכללה מתוך סדרת המספרים שבטבלה, או לחילופין לנסות למצוא הכללה על-פי השרטוט, ובעזרתה למלא את הנתונים בטבלה.

יש דרכים שונות בעזרתן ניתן להגיע להכללה.

דוגמאות לשיטות ספירה עבור עצי הברוש:



$$4 \cdot 2n$$

$$2 \cdot (2n+1) + 2 \cdot (2n-1)$$

$$4 + 4 \cdot (n + (n-1))$$

n	מספר עצי התפוח	מספר עצי הברוש
3	9	24
4	16	32
5	25	40
6	36	48
12	144	96
n	n^2	$8n$

שאלה 2. אם מספר עצי התפוח הוא 100, מה מספר עצי הברוש? הסבירו כיצד חישבתם.

80.

אם מספר עצי התפוח הוא 100, אז מספר עצי התפוח בשורה הוא 10 (כי $10^2=100$), ולכן מספר עצי הברוש הוא 80 ($8 \cdot 10=80$).

שאלה 3. עבור ערך מסוים של n מספר עצי התפוח שווה למספר עצי הברוש.

מצאו ערך זה של n , והסבירו כיצד חישבתם אותו.

$$n^2 = 8n$$

$$n^2 - 8n = 0$$

$$n(n - 8) = 0$$

$$n = 8 \text{ או } n = 0$$

אם $n = 8$ אז מספר עצי התפוח שווה למספר עצי הברוש: 64 עצים מכל סוג.

הפתרון $n = 0$ אינו מתאים.

שאלה 4. לאיכר יש מטע עם 5 שורות ו-5 טורים של עצי תפוחים, והוא מעוניין להרחיבו תוך שמירה על החוקיות. אם האיכר מגדיל את המטע שלו, כלומר נוטע עצי תפוח נוספים, הוא צריך לנטוע גם עצי ברוש נוספים. מה משתנה בקצב מהיר יותר, מספר עצי התפוח או מספר עצי הברוש? נמקו את תשובתכם.

מספר עצי התפוח משתנה בקצב מהיר יותר, כאשר במטע הראשוני יש 5 שורות ו-5 שורות עמודות או יותר. ניתן ללמוד זאת מן הטבלה, על-ידי חישוב הפרשים בין ערכים סמוכים. ההפרשים בטור "מספר עצי התפוח" הולכים וגדלים (11, 13, 15, ...), ואילו ההפרשים בטור "מספר עצי הברוש" קבועים (8, 8, 8, ...).

דרך נוספת היא התבוננות בתבניות ההפרשים:

התבנית למספר עצי התפוח כאשר יש n שורות היא: n^2 .

התבנית למספר עצי התפוח כאשר נוספה שורה ועמודה היא: $(n+1)^2$.

תבנית ההפרשים בטור "מספר עצי התפוח" היא: $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.

לעומת זאת, תבנית ההפרשים בטור "מספר עצי הברוש" היא: $8(n+1) - 8n = 8$.

ניתן לראות שאי-השוויון $2n+1 > 8$ מתקיים אם ורק אם $n \geq 4$. עבור מספרים קטנים יותר ההשתנות הריבועית של מספר עצי התפוח קטנה מההשתנות הקבועה של מספר עצי הברוש. רק כאשר $n \geq 4$ ההשתנות הריבועית של מספר עצי התפוח גדולה מההשתנות הקבועה של מספר עצי הברוש.

שאלה 5. אם האיכר יגדיל את מספר השורות של עצי התפוח בפרדסו פי 3, וכן יגדיל את מספר העצים בשורה פי 3 תוך שמירה על החוקיות, פי כמה יגדל מספר עצי התפוח, ופי כמה יגדל מספר עצי הברוש הדרושים? סמנו את התשובה הנכונה, ונמקו.

א. מספר עצי התפוח יגדל פי 3, ומספר עצי הברוש יגדל פי 3.

ב. מספר עצי התפוח יגדל פי 6, ומספר עצי הברוש יגדל פי 6.

ג. מספר עצי התפוח יגדל פי 6, ומספר עצי הברוש יגדל פי 3.

ד. מספר עצי התפוח יגדל פי 9, ומספר עצי הברוש יגדל פי 3.

ה. מספר עצי התפוח יגדל פי 9, ומספר עצי הברוש יגדל פי 8.

התשובה הנכונה היא ד': מספר עצי התפוח יגדל פי 9, ומספר עצי הברוש יגדל פי 3.

בטבלה יש דוגמה כזו: $n = 4$ ו- $n = 12$, ואפשר לבדוק לפיה.

כדי להכליל, נציב בתבניות $3n$ במקום n , ונקבל:

עבור עצי התפוח: $(3n)^2 = 9n^2$ כלומר: מספר עצי התפוח גדל פי 9.

עבור עצי הברוש: $8(3n) = 3(8n)$ כלומר: מספר עצי הברוש גדל פי 3.

שאלה 6. רשמו 'נכון' או 'לא נכון', ונמקו.

א. כשמספר השורות של עצי התפוח עולה ב-1, גדל מספר עצי הברוש ב-8.

נכון. $8(n+1) = 8n + 8$

ב. אם מספר השורות של עצי התפוח הוא מספר זוגי, אז מספר עצי התפוח הוא

מספר המתחלק ב-4.

נכון. אם $n=2k$ $(2k)^2 = 4k^2$, k מספר טבעי.

ג. אם מספר עצי התפוח בשורה וגם מספר השורות יגדלו פי 5, יגדל מספר עצי

התפוח פי 10.

לא נכון. מספר עצי התפוח יגדל פי 25. $(5n)^2 = 25n^2$.

כדי להפריך את הטענה, די בדוגמא יחידה, למשל: $n_1=1$, ו- $n_2=5$.

ד. לא ייתכן שמספר עצי הברוש יהיה שווה למחצית מספר עצי התפוח.

לא נכון. אם נפתור את המשוואה $8n = \frac{1}{2}n^2$, הפתרון המתאים הוא: $n = 16$.

כאשר מספר עצי התפוח יהיה 256, יהיה מספר עצי הברוש מחצית ממספרם, כלומר 128.

שאלה 7. א. האם ייתכן כי כאשר מספר השורות (n) של עצי התפוח גדל ב-1 (וכך גם מספר העצים בשורה), גדל מספר עצי התפוח ב-27? אם כן – מצאו את n , אם לא – הסבירו מדוע.
ייתכן.

התבנית למספר עצי התפוח כאשר יש n שורות היא n^2 .

התבנית למספר עצי התפוח כאשר נוספות שורה ועמודה היא $(n+1)^2$.

$$\text{ההפרש: } (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

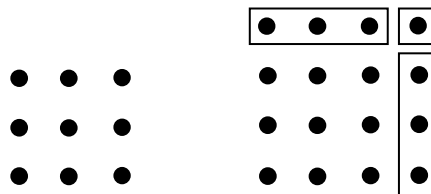
$$\text{נתאים משוואה: } 2n + 1 = 27$$

$$n = 13$$

כאשר מספר השורות של עצי התפוח עלה מ-13 ל-14, גדל מספר עצי התפוח ב-27.

ב. האם ייתכן כי כאשר מספר השורות (n) של עצי התפוח גדל ב-1, גדל מספר עצי התפוח ב-32? אם כן – מצאו את n , אם לא – הסבירו מדוע.
לא ייתכן.

לפי הפתרון בסעיף א מספר עצי התפוח גדל בכל שלב במספר אי-זוגי $(2n+1)$. אפשר לראות זאת גם בתוספת עצי התפוח במעבר משלב לשלב.



דרך אפשרית אחרת היא לפתור את המשוואה: $2n + 1 = 32$, ולקבל $n = 15.5$. כיוון שמספר השורות צריך להיות מספר שלם, פתרון זה הוא בלתי אפשרי.

שאלה 8. רשמו 'נכון' או 'לא נכון', ונמקו:

א. הסדרה המתארת את מספר עצי הברוש היא סדרה חשבונית.
אם כן - מצאו את הפרש הסדרה. אם לא - נמקו.

נכון, הסדרה המתארת את מספר עצי הברוש היא סדרה חשבונית.
אפשר להיווכח בזאת מעיון בטבלה, ולהסיק זאת באופן כללי על פי התבנית:
 $8n - 8(n-1) = 8$

ב. הסדרה המתארת את מספר עצי התפוח היא סדרה חשבונית.

אם כן - מצאו את הפרש הסדרה. אם לא - נמקו.

לא נכון. מספיקה דוגמה נגדית אחת מן הטבלה, לפיה ההפרשים אינם קבועים.

ג. הסדרה המתארת את מספר עצי התפוח אותם יש להוסיף כאשר נוספים שורה

אחת וטור אחד של עצי תפוח היא סדרה חשבונית.

אם כן - מצאו את הפרש הסדרה. אם לא - נמקו.

נכון, הסדרה המתארת את מספר עצי התפוח אותם יש להוסיף כאשר נוספת שורה

אחת וטור אחד של עצי תפוח היא סדרה חשבונית.

התבנית למספר עצי התפוח כאשר יש n שורות היא: n^2 .

התבנית למספר עצי התפוח כאשר נוספות שורה ועמודה היא: $(n + 1)^2$

$$\text{ההפרש: } (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

זוהי סדרת המספרים האי זוגיים מ-3 ואילך, והיא סדרה חשבונית שהפרשה 2.

שאלה 9. בפרדס של האיכר יש בסך הכל 660 עצים. כמה עצי תפוח יש לאיכר?

יש 484 עצי תפוח.

נתאים את הנאמר למשוואה. יש לזכור שהפתרון חייב להיות מספר טבעי.

$$n^2 + 8n = 660$$

$$n^2 + 8n - 660 = 0$$

$$(n + 30)(n - 22) = 0$$

$$n = -30 \quad \text{או} \quad n = 22$$

בשורה ובעמודה של עצי התפוח יש 22 עצים, לכן יש 484 עצי תפוח, וסביבם יש 176 עצי

ברוש.

הפתרון -30 איננו מספר טבעי, ולכן איננו מתאים.