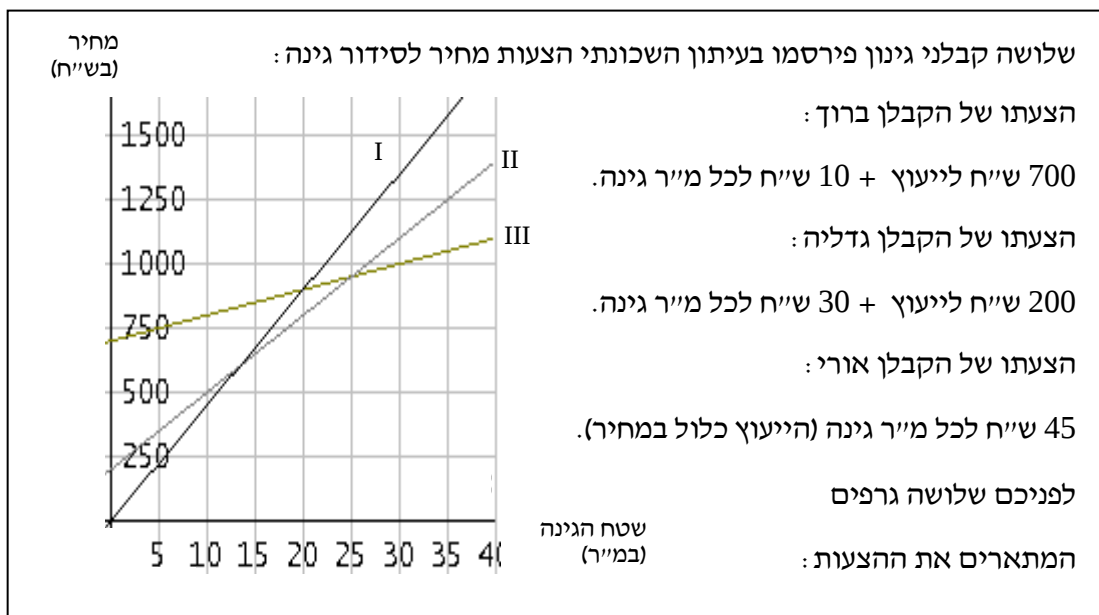


קבלני גינון

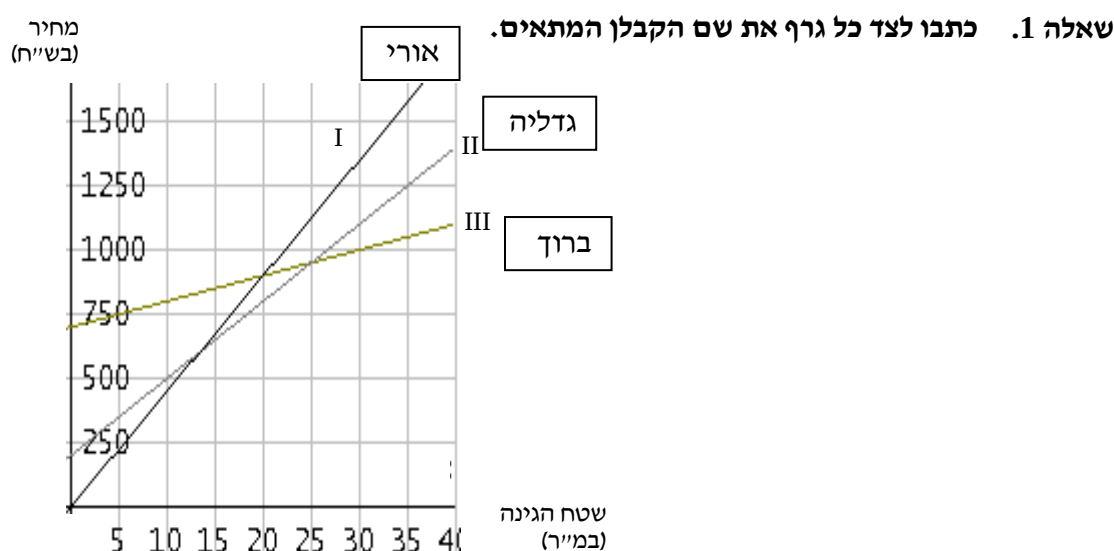


- שאלה 1. כתבו לצד כל גרף את שם הקבלן המתאים.
- שאלה 2. מהו שטח הגינה עבורו גובים הקבלנים אורי וגדליה מחיר זהה? מהו המחיר במקרה זה?
- שאלה 3. למשפחת ישראלי גינה ששטחה 100 מ"ר. גברת ישראלי רצתה להזמין את הקבלן שהצעתו היקרה ביותר, כי - לטענתה - הוא גם הטוב ביותר. מר ישראלי עמד על כך שיזמינו את הקבלן הזול ביותר, כי ממילא בכוונתם לעבור דירה בקרוב. לבסוף נעתרה גברת ישראלי לבקשת בעלה. כמה כסף חסכה משפחת ישראלי בהחלטה זו? הסבירו.
- שאלה 4. למשפחת מזרחי יש שטח אדמה גדול, אולם התקציב שלהם לסידור גינה עומד על 1500 ש"ח. איזה קבלן יוכל לסדר להם גינה בשטח הגדול ביותר במסגרת תקציב זה? מה גודלו של שטח זה? הסבירו.
- שאלה 5. גברת ירדני החליטה להיענות להצעה הזולה ביותר בעבורה, ולכן היא הזמינה את הקבלן גדליה לסדר לה את הגינה. מה תוכלו לומר על שטח הגינה של גברת ירדני?
- שאלה 6. האם יש שטח גינה עבורו יגבו שלושת הקבלנים מחיר זהה? הסבירו.
- שאלה 7. במרכז כיכר עירונית יש גינה עגולה שרדיוסה 2.5 מ'. העירייה רוצה לבחור בגן שהצעת המחיר שלו היא הזולה ביותר. באיזה גן תבחר?
- שאלה 8. שטחן של רוב הגינות באזור מעל 25 מ"ר. קבלן הגינות דוד רוצה להתחרות בשלושת הקבלנים הקיימים. בכוונתו לפרסם מחיר אחיד שאינו תלוי בשטח הגינה. הוא מתכוון להציע את המחיר הזול ביותר, כך שיהיה כדאי לרוב תושבי האזור להזמין אותו לביצוע עבודות. עזרו לו לחשוב על הצעת מחיר מתאימה, ורשמו את שיקוליכם בקביעת המחיר.

פתרונות למשימה: קבלני גינון

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית;
- קריאת גרף;
- המרה בין ייצוג מילולי, גרפי ואלגברי;
- הפונקציה הקווית בייצוגיה השונים;
- בחינת שיקולי כדאיות;
- פתרון מערכת משוואות, ומציאת נקודות החיתוך של גרפים;
- הכרת שטח עיגול ואומדן ל- π .



ניתן להתאים את שלושת הגרפים לשלושת הקבלנים השונים על פי תעריף הייעוץ, ולוודא זאת אח"כ באמצעות התעריף לגינון מ"ר, או להיפך: להתאים על פי התעריף לגינון מ"ר, ולוודא זאת אח"כ בהתאם לתעריף הייעוץ.

תעריפי הייעוץ הם קבועים, ותעריפי הגינון תלויים בשטח הגינה. לפיכך, ניתן לתאר את הבדלי עלויות הגינון בהתאם לשטח הגינה כשלוש פונקציות לינאריות, אשר המשתנה x בהן הוא שטח הגינה:

$$\text{עלות עבודתו של ברוך: } b(x) = 10x + 700$$

$$\text{עלות עבודתו של גדליה: } g(x) = 30x + 200$$

$$\text{עלות עבודתו של אורי: } u(x) = 45x$$

תעריפי הייעוץ מתוארים כנקודת החיתוך של הגרף עם הציר האנכי, ותעריפי הגינון

מתוארים בשיפועי הקווים. יש לשים לב לכך שהשיפועים אינם קשורים לזוויות באופן ישיר באמצעות הפונקציה טנגנס, בשל היותם של שני הצירים מכוילים לפי אמות מידה שונות. לכן חישוב השיפוע יכול להתבצע ישירות באמצעות היחס בין מידת השינוי האנכי לבין מידת השינוי האופקי.

למרות האמור לעיל, ניתן לזהות את שלושת הישרים על פי שיפועיהם באמצעות ההשוואה ביניהם. זוהי הדרך המהירה ביותר, כיוון שהיא איננה כרוכה בחישוב, והיא המומלצת לפעילות זו. השיפוע התלול ביותר הוא של גרף I, האמצעי - של גרף II, והמתון ביותר - של גרף III. בהתאמה, התעריף הגבוה ביותר הוא של אורי (45 ש"ח למ"ר), האמצעי - של גדליה (30 ש"ח למ"ר), והקטן ביותר - של ברוך (10 ש"ח למ"ר). קל מאוד להתאים את הישרים לקבלנים גם באמצעות תעריף הייעוץ, המסומן בגרף כנקודת חיתוך עם הציר האנכי:

גרף I מתאים לאורי, שאינו גובה כלל דמי ייעוץ (0 ש"ח).
גרף II מתאים לגדליה, הגובה 200 ש"ח (ואכן נקודת החיתוך עם הציר האנכי נמצאת בהתאמה מתחת ל- 250).
גרף III מתאים לברוך, הגובה 700 ש"ח (ואכן נקודת החיתוך עם הציר האנכי נמצאת בהתאמה מתחת ל- 750).

שאלה 2. מהו שטח הגינה עבורו גובים הקבלנים אורי וגדליה מחיר זהה? מהו המחיר במקרה זה?

השטח המבוקש הוא $13\frac{1}{3}$ מ"ר, והמחיר המתאים למקרה זה הוא 600 ש"ח.

משמעות השאלה היא מציאת נקודת החיתוך בין שני הגרפים המתאימים. בנקודה זו ניתן לראות כי עבור השטח המבוקש נגבה מחיר זהה על ידי שני הקבלנים. קשה לקרוא מתוך הגרף את השטח המבוקש במדויק, לכן די להעריכו בתחום שבין 12 מ"ר לבין 14 מ"ר. כדי לדעת את השטח ואת המחיר במדויק, יש לפתור את המשוואה המביעה את שוויון המחירים של אורי וגדליה: $45x = 30x + 200$. לחילופין, ניתן לשנות את השאלה לכל שני גננים אחרים, ואז קל מאוד לראות את השטח המבוקש:

אם מדובר על ברוך וגדליה, השטח המבוקש הוא 25 מ"ר, והמחיר: 950 ש"ח.
אם מדובר על ברוך ואורי, השטח המבוקש הוא 20 מ"ר, והמחיר: 900 ש"ח.

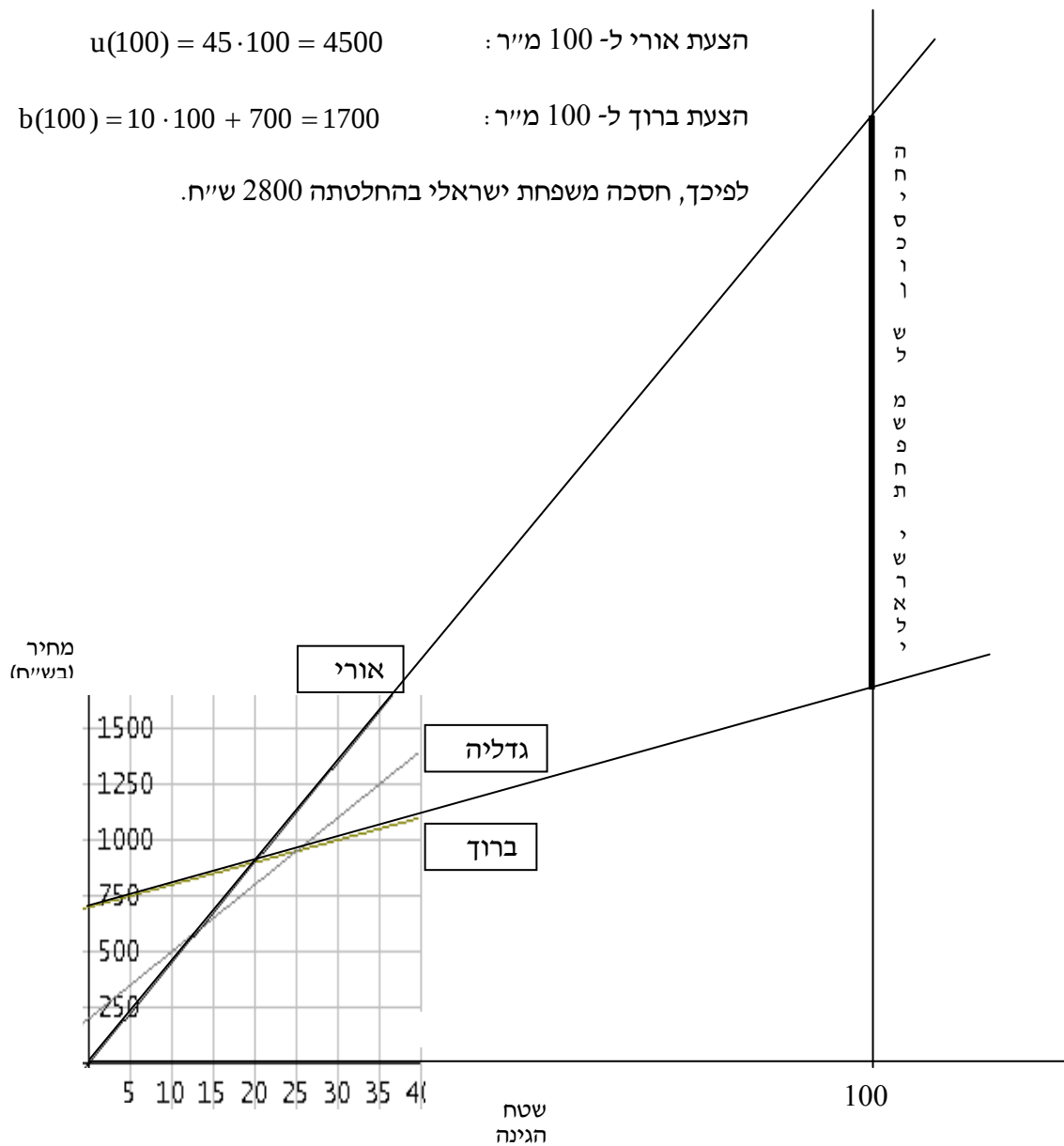
שאלה 3. למשפחת ישראלי גינה ששטחה 100 מ"ר. גברת ישראלי רצתה להזמין את הקבלן שהצעתו היקרה ביותר, כי - לטענתה - הוא גם הטוב ביותר. מר ישראלי עמד על כך שיזמינו את הקבלן הזול ביותר, כי ממילא בכוונתם לעבור דירה בקרוב. לבסוף נעתרה גברת ישראלי לבקשת בעלה. כמה כסף חסכה משפחת ישראלי בהחלטה זו? הסבירו.

לפי הגרף הנתון, לא ניתן למצוא את ההפרש המבוקש, כיוון שהוא חורג מאוד מהתחום המשוורטט. ניתן לפעול בשתי דרכים: הרחבת הגרפים באמצעות סרגל, או הצבה בפונקציות המבוקשות וחישוב ההפרש. מכל מקום, ברור מהגרף הנתון שעבור ערכים הגבוהים מהתחום הנתון, ההצעה הגבוהה ביותר היא של אורי, וההצעה הנמוכה ביותר היא של ברוך.

$$u(100) = 45 \cdot 100 = 4500 \quad \text{הצעת אורי ל-100 מ"ר:}$$

$$b(100) = 10 \cdot 100 + 700 = 1700 \quad \text{הצעת ברוך ל-100 מ"ר:}$$

לפיכך, חסכה משפחת ישראלי בהחלטה 2800 ש"ח.



שאלה 4. למשפחת מזרחי יש שטח אדמה גדול, אולם התקציב שלהם לסידור גינה עומד על 1500 ש"ח.

איזה קבלן יוכל לסדר להם גינה בשטח הגדול ביותר במסגרת תקציב זה? מה גודלו של שטח זה? הסבירו.

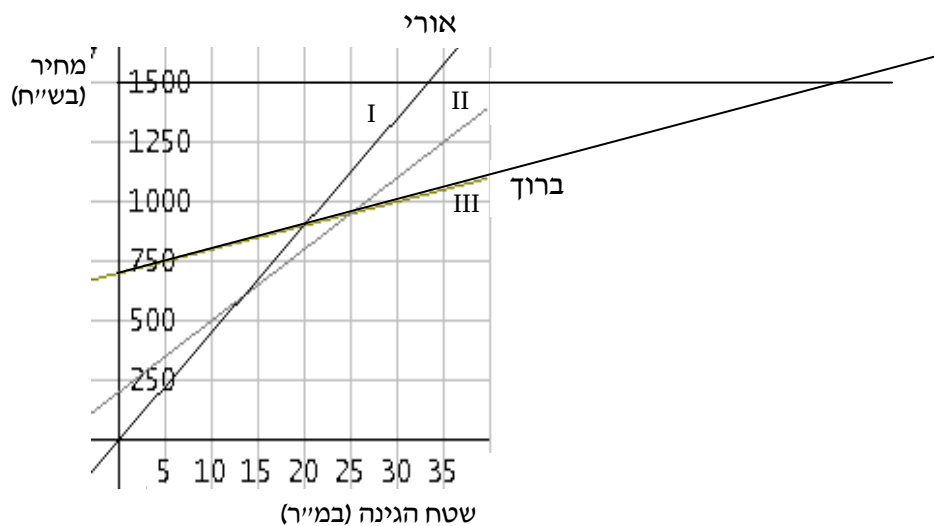
כיוון שבתחום הימני ההצעה הנמוכה ביותר היא הצעתו של ברוך, ברור שהוא הקבלן שיוכל לסדר למשפחת מזרחי גינה בשטח גדול ככל האפשר.

השטח שאורי יוכל לעבד במחיר זה קטן מ- 35 מ"ר, והשטח שגדליה יוכל לעבד במחיר זה גדול במעט מ- 40 מ"ר. בשרטוט, באים ערכים אלה לידי ביטוי בנקודות החיתוך של הגרפים עם הישר המתאר הוצאה של 1500 ש"ח.

מתוך התבוננות בגרף, נראה שהשטח אותו יסכים ברוך לעבד תמורת 1500 ש"ח הוא כ- 80 מ"ר.

כדי לקבל תשובה מדויקת יותר יש להציב בפונקציה $b(x) = 10x + 700$ את הערך 1500:

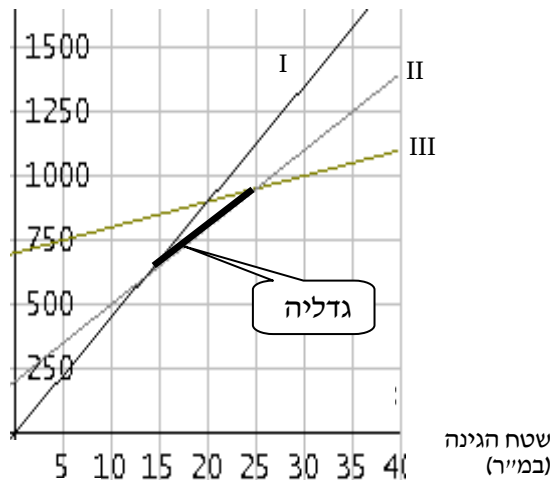
$$1500 = 10x + 700$$



שאלה 5. גברת ירדני החליטה להיענות להצעה הזולה ביותר בעבורה, ולכן היא הזמינה את הקבלן

מחיר
(בש"ח)

גדליה לסדר לה את הגינה. מה תוכלו לומר על שטח הגינה של גברת ירדני?



תחום הערכים שבו הצעתו של גדליה היא הנמוכה ביותר הוא התחום שבו גרף II הוא הנמוך ביותר. את נקודות החיתוך חישבנו בשאלה 2, לפיכך תחום הערכים הוא $13\frac{1}{3} \leq x \leq 25$. שטח גינתה של גברת ירדני נמצא בתחום זה. בשרטוט מודגש התחום שבו ההצעה של הקבלן גדליה היא הנמוכה ביותר.

שאלה 6. האם יש שטח גינה עבורו יגבו שלושת הקבלנים יגבו מחיר זהה? הסבירו.

לא! אילו היה שטח כזה, אז שלושת הגרפים היו נחתכים בנקודה יחידה, המבטאת את ערך זה של השטח.

שאלה 7. במרכז כיכר עירונית יש גינה עגולה שרדיוסה 2.5 מ'. העירייה רוצה לבחור בגן שהצעת המחיר שלו היא הזולה ביותר. באיזה גן תבחר?

ראשית, יש לחשב את שטח העיגול. שטח העיגול הוא כ- 20 מ"ר: $\pi R^2 = \pi \cdot 2.5^2 = 19.63$. עבור שטח זה, הצעתו של גדליה היא הזולה ביותר.

תלמיד אשר מעריך את π שלא במדויק (למשל 3.1 או 3.14 או 3) יקבל שטח של עיגול שונה במעט. מכל מקום, עבור כל הערכים הללו, הצעתו של גדליה היא הזולה ביותר. לכן אין זה המקרה בו יש להקפיד על דיוק המספר π .

שאלה 8. שטחן של רוב הגינות באזור מעל 25 מ"ר. קבלן הגינות דוד רוצה להתחרות בשלושת הקבלנים הקיימים. בכוונתו לפרסם מחיר אחיד שאינו תלוי בשטח הגינה. הוא מתכוון להציע את המחיר הזול ביותר, כך שיהיה כדאי לרוב תושבי האזור להזמין אותו. עזרו לו לחשוב על הצעת מחיר מתאימה, ורשמו את שיקוליכם בקביעת המחיר.

כדי להתחרות בשלושת הקבלנים, די להציע מחיר זול עבור רוב הגינות שבאזור. לכן, די להציע מחיר זול עבור גינות ששטחן עולה על 25 מ"ר. ראינו קודם שבתחום זה כל ההצעות עולות על 950 ש"ח, וזהו המחיר הגבוה ביותר בעל תכונה זו. לכן, אם דוד קובע מחיר כלשהו שאינו עולה על 950 ש"ח - הצעתו תהייה הנמוכה ביותר. מצד שני, אין לדוד סיבה להוריד את ההצעה מעבר להכרח, כי דבר זה יצמצם את רווחיו. לפיכך, מומלץ לדוד לקבוע מחיר אחיד של 950 ש"ח. זהו המחיר הגבוה ביותר אותו הוא יכול לגבות, ובמקביל לשמור על מצב בו תהיה הצעתו הזולה ביותר לכל הגינות ששטחן עולה על 25 מ"ר.