שעוני מספרים

נועה ומיכל משחקות בשעוני מספרים. לכל שעון מחוג אחד בלבד.

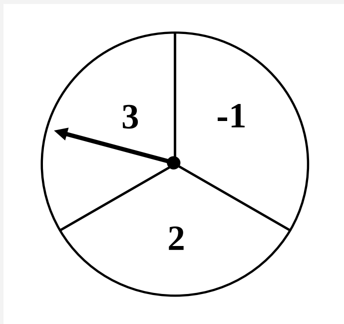
חוקי המשחק:

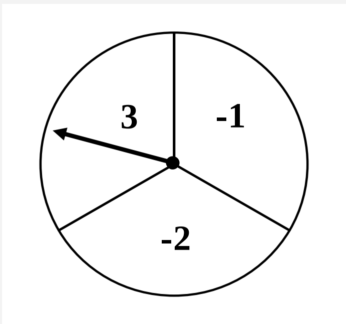
- כל אחת בתורה מסובבת במהירות את המחוגים של שני השעונים.
- אם מכפלת המספרים אותם הראו המחוגים של שני השעונים היא **חיובית** – **נועה** מנצחת.
- אם מכפלת המספרים אותם הראו המחוגים של שני השעונים היא **שלילית** – **מיכל** מנצחת.

הערות:

- המחוגים מסתובבים במהירות רבה כך שמקום עצירתם אקראי.
- במקרה שהמחוג נעצר על קו, מסובבים אותו שוב.

משחק ראשון

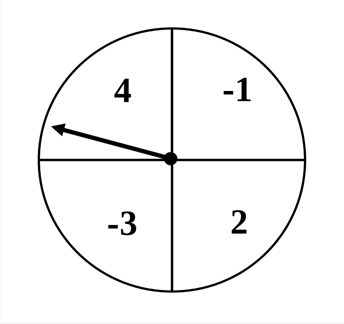


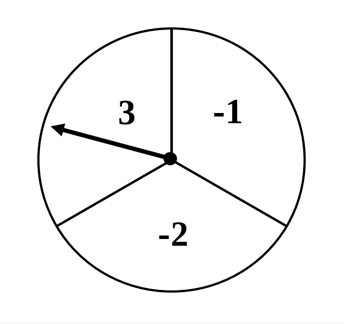


שאלה 1. למי מהשתיים סיכוי גדול יותר לנצח במשחק הראשון? נמקו את תשובתכם.

משחק שני

שעון מספרים אחד הוחלף, אך חוקי המשחק נותרו בעינם.





שאלה 2. למי מהשתיים סיכוי גדול יותר לנצח במשחק השני? נמקו את תשובתכם.

שאלה 3. האם שני המשחקים הוגנים? הסבירו את תשובתכם.

שאלה 4. נועה רצתה להחליף את שעוני המשחק בשעונים אחרים. כיצד ניתן לבחון האם הצעתה הוגנת?

פתרון משימה: שעוני מספרים

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל הסתברותי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים;
- שכיחות יחסית;
- שיקולי כדאיות;
- זיהוי מרחב מדגם דו-ממדי וחישוב הסתברויות של מאורעות בו.

שאלה 1. למי מהשתיים סיכוי גדול יותר לנצח במשחק הראשון? נמקו את תשובתכם.

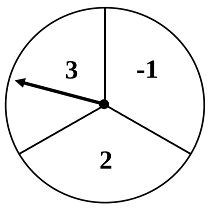
למיכל סיכוי גדול יותר לנצח במשחק הראשון.

הסבר:

בעזרת השטח היחסי של פרוסות השעונים, נבדוק את ההסתברות לקבלת מספר חיובי ומספר שלילי בכל אחד משני השעונים:

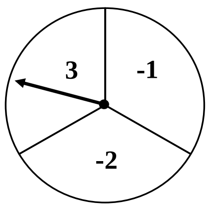
ההסתברות לקבלת מספר חיובי בשעון הראשון היא $\frac{2}{3}$

וההסתברות לקבלת מספר שלילי היא $\frac{1}{3}$.



ההסתברות לקבלת מספר חיובי בשעון השני היא $\frac{1}{3}$

וההסתברות לקבלת מספר שלילי היא $\frac{2}{3}$.



מכפלה חיובית מתקבלת מהכפלת שני מספרים חיוביים, או מהכפלת שני מספרים שליליים. נחשב את ההסתברות לקבלת מכפלה חיובית מהכפלת המספרים שהראו מחוגי שני השעונים. חישוב ההסתברות הוא כדלקמן:

P(מכפלה חיובית) = P(שעון ראשון מראה מס' חיובי) • P(שעון שני מראה מס' חיובי) +
P(שעון ראשון מראה מס' שלילי) •P(שעון שני מראה מס' שלילי)

P(מכפלה חיובית) = $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

לפי חוקי המשחק, $\frac{4}{9}$ היא ההסתברות שנועה תנצח במשחק השעונים.

מכפלה שלילית מתקבלת מהכפלת מספר חיובי במספר שלילי. נחשב את ההסתברות לקבלת מכפלה שלילית מהכפלת המספרים שהראו מחוגי שני השעונים. חישוב ההסתברות הוא כדלקמן:

P(מכפלה שלילית) = P(שעון ראשון מראה מס׳ חיובי) • P(שעון שני מראה מס׳ שלילי) +
P(שעון ראשון מראה מס׳ שלילי) • P(שעון שני מראה מס׳ חיובי)

לחילופין, קבלת מכפלה שלילית היא מאורע משלים לקבלת מכפלה חיובית. לפיכך ניתן לחשב ביתר קלות את ההסתברות לקבלת מכפלה שלילית בדרך הבאה:

P(מכפלה שלילית) = 1 – P(מכפלה חיובית) = $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

חישוב ההסתברויות דלעיל, מראה כי הסיכוי של מיכל לנצח במשחק הראשון ($\frac{5}{9}$) גבוה מהסיכוי של נועה לנצח ($\frac{4}{9}$).

שאלה 2. למי מהשתיים סיכוי גדול יותר לנצח במשחק השני? נמקו את תשובתכם.

מחישוב דומה לזה שנעשה בסעיף הקודם, עולה כי הסיכוי של מיכל לנצח ($\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$) שווה לסיכוי של נועה לנצח ($\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$).

שאלה 3. האם שני המשחקים הוגנים? הסבירו את תשובתכם.

ראינו כי במשחק הראשון - לאחד השחקנים סיכוי גבוה יותר לנצח, ואילו במשחק השני - לשני השחקנים סיכוי זהה לנצח, סיכוי השווה ל- $\frac{1}{2}$. כלומר: רק המשחק השני הוגן.

שאלה 4 . נועה רצתה להחליף את שעוני המשחק בשעונים אחרים. כיצד ניתן לדעת האם הצעתה הוגנת?

ראינו בסעיף הקודם כי כאשר אחד השעונים הוא "**שעון הוגן**" (שעון שבו ההסתברות לקבלת מספר חיובי בסיבוב בודד היא $\frac{1}{2}$) - המשחק היה הוגן.

ניתן להכליל תוצאות אלו, ולנסח את הטענה הבאה:

המשחק הוגן, אם לפחות אחד משני השעונים הוא "**שעון הוגן**" (שעון שבו ההסתברות לקבלת מספר חיובי בסיבוב בודד היא $\frac{1}{2}$).

טענה זו ניתנת להוכחה, למשל בדרך הבאה:

יהא השעון הראשון "שעון הוגן". ב**שעון הראשון** ההסתברות לקבל מספר חיובי בסיבוב בודד היא $\frac{1}{2}$. לפיכך, ההסתברות לקבל מספר שלילי בסיבוב בודד בשעון זה גם היא $\frac{1}{2}$.

נגדיר עבור ה**שעון השני**: ההסתברות לקבל מספר חיובי בסיבוב בודד היא Q. לפיכך, ההסתברות לקבל מספר שלילי בסיבוב בודד בשעון השני היא $1-Q$.

נחשב כעת את ההסתברות לקבלת מכפלה חיובית במצב זה:

P(מכפלה חיובית כאשר שעון אחד לפחות הוא שעון "הוגן") =

P(שעון ראשון מראה מס' חיובי) • P(שעון שני מראה מס' חיובי) +

P(שעון ראשון מראה מס' שלילי) • P(שעון שני מראה מס' שלילי) =

$$\frac{1}{2}\cdot Q+(1-\frac{1}{2})\cdot(1-Q)=\ \frac{1}{2}Q+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}Q=\frac{1}{2}$$

כלומר, כאשר אחד השעונים הוא "שעון הוגן", ההסתברות לקבלת מכפלה חיובית היא $\frac{1}{2}$, **ללא תלות בערך של Q** (ההסתברות לקבל מספר חיובי בסיבוב בודד בשעון השני). כיוון שבמשחק זה אין אפשרות לקבלת תיקו, ההסתברות לקבלת מכפלה שלילית (המאורע המשלים) שווה גם היא ל- $\frac{1}{2}$. הטענה הנזכרת לעיל הוכחה.