

פתרון משימה 1: סיכויים

מאפייני המשימה :

- התאמת מודל הסתברותי לשאלה מציאותית
- מבוא לעקרונות בהסתברות
- הסקת מסקנות לגבי שכיחות יחסית ושכיחות מוחלטת

שאלה 1 הטילו מטבע הוגן שש פעמים. בכל אחת משש ההטלות האלה - המטבע נפל עם ה"גב" למעלה. כעת מטילים את המטבע פעם נוספת. איזו מבין הטענות הבאות נכונה?

ג. יש אותו סיכוי כי בהטלה הזאת ה"פנים" או ה"גב" יהיו כלפי מעלה.

התשובה הנכונה היא: ג'.

הסבר: היות שתוצאות הטלת המטבע הן בלתי תלויות זו בזו, והמטבע הוגן, בכל זריקה

קיימת הסתברות של $\frac{1}{2}$ לתוצאה "גב" כמו-גם לתוצאה "פנים".

שאלה 2 בטופס לוטו מופיעים כל המספרים הטבעיים מ-1 עד 34 (כל אחד פעם אחת). כדי לזכות בפרס הגדול צריך לנחש את כל ששת המספרים שעלו בגורל. לאיזו הצעה יש סיכוי גדול יותר לזכות (אין חשיבות לסדר)?

ד. לכל ההצעות א-ג אותו סיכוי.

התשובה הנכונה היא: ד'.

הסבר: חשוב להדגיש לתלמידים ששוויון ההסתברויות הוא תכונה בסיסית הנובעת מסימטריה, ואין צורך בחישובים כדי להגיע אליה. הגרלת הלוטו הינה הגרלה הוגנת ולכן לכל אחת מההצעות המופיעות בסעיפים א'-ג' אותה ההסתברות, כמו גם לכל ההצעות האחרות הכוללות שישה מספרים טבעיים שונים בין 1 ל-34.

בכל אחת מההצעות למספר הראשון העולה בהגרלה אותה הסתברות (אין עדיפות לאף אחד מהמספרים), וכך גם בכל אחד מחמשת המספרים הבאים.

מיועד למורים: יש רבים הסוברים בטעות, כי הסיכוי של הצעה א' הוא הנמוך ביותר, היות שבחירת המספרים הינה אקראית ולכן 'צריכים להופיע מספרים ללא חוקיות. נימוק דומה, ניתן לעתים גם כהסבר לסיכוי הנמוך שסוברים שיש להצעה ב'. גם בהצעה זו מופיעים מספרים עם חוקיות ברורה (בעלי הפרש קבוע, מכפלות של חמש). מחקרים רבים מצביעים, כי בשאלות מסוג זה רבים הנשאלים הסוברים בטעות כי להצעה א' הסיכוי הנמוך ביותר, ולהצעה ג' הסיכוי הגבוה ביותר לזכייה.

חשוב לדון עם התלמידים על מקריות וסיכויים שווים של תוצאות מקריות.

נחשב לכל אחת מההצעות את ההסתברות שלה לזכייה:

ראשית נסתכל בהסתברות לכל הצעה לו היתה חשיבות לסדר בחירת המספרים:

$$\frac{1}{34} \cdot \frac{1}{33} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29}$$

כעת נסתכל על מספר הסידורים של ששת המספרים המופיעים בהצעה:

$$6! = 720$$

ולכן ההסתברות לכל הצעה היא:

$$720 \cdot \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{33} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29} \approx 7.44 \cdot 10^{-7}$$

דרך נוספת לחישוב ההסתברות, היא להסתכל על מספר האפשרויות לבחירת ששת המספרים מתוך 34 האפשרויות (מספר המדגמים הלא סדורים ללא החזרה בגודל 6 שניתן להוציא מאוכלוסייה בת 34 איברים):

$$\binom{34}{6} = \frac{34!}{6! \cdot 28!} = 1,344,904$$

היות וההגרלה הוגנת ולכל אפשרות אותה ההסתברות, הסיכוי לכל הצעה יהיה על-כן:

$$\frac{1}{1,344,904} \approx 7.44 \cdot 10^{-7}$$

שאלה 3 בקלמר 35 עפרונות בצבעים שונים: אדומים, שחורים, ירוקים וצהובים. ידוע כי

ההסתברות להוצאת עפרון שחור מהקלמר היא $\frac{3}{7}$. כמה עפרונות שחורים נמצאים

בקלמר?

ב. 15

התשובה הנכונה היא: **ב'.**

הסבר: נתון כי ההסתברות להוצאת עפרון שחור היא $\frac{3}{7}$. כלומר, השכיחות היחסית של

מספר העפרונות השחורים בקלמר היא $\frac{3}{7}$. סך הכל יש בקלמר 35 עפרונות, כאשר $\frac{3}{7}$ מהם

בצבע שחור. לכן, בקלמר 15 עפרונות שחורים.

שאלה 4 מפעל המייצר כוסות זכוכית ייצר ביום מסוים 5,000 כוסות. מחלקת בקרת האיכות דגמה באופן אקראי 200 כוסות, ומצאה כי 12 מהן היו פגומות. כמה כוסות פגומות צפוי שיהיו בערך בכל הכמות שיוצרה באותו היום?

ג. 300

התשובה הנכונה היא: ג'.

הסבר: מ- 200 הכוסות שנבדקו, 12 נמצאו פגומות, כלומר, $\frac{12}{200}$ מהכוסות שנבדקו היו

פגומות. היות ונדגמו 200 כוסות באופן אקראי, נצפה כי בערך $\frac{12}{200}$ מכל הכוסות, שיוצרו

באותו היום, תהיינה פגומות. כלומר, $\frac{12}{200}$ של 5,000, שהן בערך 300 כוסות, סביר

שתהיינה פגומות.

לא ניתן לדעת במדויק מה מספר הכוסות הפגומות, שיוצרו באותו היום, אך היות והמדגם שנבחר הינו אקראי, נצפה כי השכיחות היחסית של מספר הכוסות הפגומות, שיוצרו באותו היום, תהייה בקירוב דומה לשכיחות היחסית של מספר הכוסות הפגומות שנמצאו במדגם. יש להדגיש בפני התלמידים כי: (א) בחירה של מדגם קטן אינה יכולה לתת תמונה אמיתית על כלל האוכלוסיה, ו- (ב) בחירה שאינה אקראית, גם היא אינה יכולה לתת תמונה אמיתית על האוכלוסיה כולה.