

פתרון משימה 3: משלושה יוצא אחד

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל הסתברותי לשאלה מציאותית
- מרחב מדגם המורכב משלוש
- בדיקת ההוגנות של משחקים

שאלה 1 נתחו את מהלך השלב הראשון של ההגרלה:

א. רשמו את כל התוצאות האפשריות של השלב הראשון בהגרלה זו.

בכל שלב שמונה תוצאות אפשריות, היות שלכל ילד שתי אפשרויות להראות את ידו: כף יד, או גב יד. נתאר את שמונה התוצאות האפשריות בטבלה הבאה. ליד כל אפשרות, רשמנו בעמודה השמאלית מי מהילדים זוכה.

אלון	בן	גל	הזוכה
כף	כף	כף	תיקו
כף	כף	גב	גל
כף	גב	כף	בן
כף	גב	גב	אלון
גב	כף	כף	אלון
גב	כף	גב	בן
גב	גב	כף	גל
גב	גב	גב	תיקו

יש לשים לב, כי לפי חוקי ההגרלה אם תוצאת השלב הראשון היא תיקו (שני מקרים מתוך שמונה אפשריים), ההגרלה מתחדשת ולכן התיאור המופיע בטבלה לעיל הינו חלקי.

ב. חשבו את ההסתברויות של כל ילד לזכות בשלב הראשון של ההגרלה. הסבירו את תשובתכם.

ההסתברות כי כל אחד משלושת הילדים יזכה בשלב הראשון היא $\frac{1}{4}$ ($\frac{2}{8}$ - העמודה

השמאלית בטבלה), אך ההסתברות של כל אחד מהם לזכות בהגרלה בכללותה היא $\frac{1}{3}$.

נסתכל לדוגמה באופן החישוב של ההסתברות של אלון לזכות בהגרלה: הסתברות זו

היא למעשה סכום של הסתברויות לנצחון של אלון בסיבוב הראשון, אם יתקיים סיבוב אחד, ועוד ההסתברות של אלון לנצח בסיבוב השני במקרה בו בסיבוב הראשון יצא תיקו ובסיבוב השני הוא מנצח, ועוד ההסתברות של אלון לנצח בסיבוב השלישי במקרה בו בשני הסיבובים הראשונים יצא תיקו ואלון ניצח בסיבוב השלישי, וכו'. חישוב הסתברות בדרך זאת נעשה על-ידי חישוב סכום של טור הנדסי אינסופי יורד (המתאים לתלמידי 4 – 5 י"ל), אך התלמידים יכולים לחשב את ההסתברות כי כל אחד משלושת הילדים יזכה בהגרלה, משיקולי סימטריה. היות וחוקי ההגרלה זהים לכל שלושת המתמודדים, ואין מצב של תיקו בסופה של ההגרלה, ההסתברות של כל אחד מהמתמודדים לזכות זהה ושווה ל- $\frac{1}{3}$. תלמיד יכול לטעון שיש מצב של תיקו, כאשר בכל שלב שלושת הילדים מראים אותו צד של היד (כאשר חזרה של מצב זה היא אינסופית). ההסתברות של מאורע זה היא אפס.

שאלה 2 בן וגל החליטו (מבלי שאלון יידע על כך), להראות מצב כף יד שונה. האם ה"סידור" הזה שינה את סיכוייו של אלון לנצח בהגרלה?

במקרה זה אין לאלון אפשרות לזכות, ולכן סיכוייו יהיו שווים לאפס. אם אלון יראה את גב ידו, יזכה הילד (בן או גל) שיראה את כף ידו, ואם אלון יראה את כף ידו, יזכה הילד (בן או גל) שיראה את גב ידו. לפי ה"סידור" של בן וגל, תמיד יהיה אחד מהם, שיראה את כף ידו, או את גב ידו, ולכן תמיד יהיה מנצח מבין שניהם וזאת כבר בתום השלב הראשון.