

פתרון משימה 11: שיעון ההסתברות

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל הסתברותי לשאלה מציאותית
- הסתברויות של חיתוך מאורעות ושל איחודם
- הסתברות מותנית

שאלה 1 חשבו את ההסתברויות להתרחשות המאורעות הבאים, כאשר מסובבים את חץ שיעון ההסתברות. הסבירו את תשובתכם בכל מקרה.

א. החץ יצביע על החלק המסומן במספר 1.

ההסתברות שהחץ יצביע על החלק המסומן במספר 1 היא $\frac{1}{12}$.

הסבר: שיעון ההסתברות מחולק ל-12 חלקים שווים. לכן השטח המסומן ב-1

מהווה $\frac{1}{12}$ משטח העיגול. מכאן נובע שההסתברות שהחץ יצביע על החלק המסומן

ב-1, היא $\frac{1}{12}$.

ב. החץ יצביע על חלק בו מופיע מספר אי-זוגי.

ההסתברות שהחץ יצביע על חלק בו מופיע מספר אי-זוגי היא $\frac{1}{2}$.

הסבר: המספרים האי-זוגיים המסומנים על-גבי החלקים של שיעון ההסתברות הנתון הם 1, 3, 5, 7, 9, 11. שטח כל אחד מששת חלקים אלה וזהה ושווה לשטח כל אחד מששת החלקים האחרים. השטח עליו מסומנים מספרים אי-זוגיים מהווה,

איפוא, $\frac{1}{2}$ משטח העיגול. לכן, ההסתברות שהחץ יצביע על חלק בו מופיע מספר

אי-זוגי היא $\frac{1}{2}$.

ג. החץ יצביע על חלק הצבוע בלבן.

ההסתברות שהחץ יצביע על חלק הצבוע בלבן היא $\frac{1}{2}$.

הסבר: שטח החלק הצבוע בלבן הוא $\frac{1}{2}$ משטח העיגול. לכן, ההסתברות שהחץ

יצביע על חלק הצבוע בלבן היא $\frac{1}{2}$.

סעיפים ב' ו- ג' מתארים אותו מאורע, היות שהחלקים המתאימים בשעון ההסתברות לכל אחד מהמאורעות, זהים בשני המקרים.

ד. החץ יצביע על חלק הצבוע בלבן, או על חלק המסומן במספר המתחלק ב- 4.

ההסתברות שהחץ יצביע על חלק הצבוע בלבן, או על חלק המסומן במספר המתחלק

$$\text{ב- 4 היא } \frac{3}{4}.$$

הסבר : שטח החלק הצבוע בלבן הוא $\frac{1}{2}$. ישנם שלושה חלקים עליהם מסומנים

מספרים המתחלקים ב- 4 : 4, 8, ו- 12. שטח כל אחד משלושת חלקים אלה הוא

$\frac{1}{12}$. היות ששלושת החלקים הללו והחלק הצבוע בלבן הינם זרים זה לזה, שטחם

הכולל הוא $\frac{3}{4} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right)$. לכן, ההסתברות כי החץ יצביע על חלק הצבוע בלבן,

או על חלק המסומן במספר המתחלק ב- 4 היא $\frac{3}{4}$.

ניתן לחשב את ההסתברות גם על-ידי חישוב ההסתברות של המאורע המשלים :
 "חלק המסומן במספר שאינו מתחלק ב- 4 ואינו צבוע בלבן". ישנם שלושה חלקים המתאימים לתיאור הנזכר לעיל : חלקים אלה מסומנים במספרים : 2, 6, ו- 10.

שטחם של חלקים אלה הוא $\frac{1}{4}$ משטח העיגול, ולכן ההסתברות המבוקשת היא :

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

ה. החץ יצביע על חלק הצבוע בלבן, או על חלק המסומן במספר ראשוני.

ההסתברות שהחץ יצביע על חלק הצבוע בלבן, או על חלק המסומן במספר ראשוני

$$\text{היא } \frac{7}{12}.$$

הסבר : שבעה חלקים מתאימים לתיאור הנזכר לעיל ומסומנים במספרים :

1, 2, 3, 5, 7, 9, 11. שטח זה הוא $\frac{7}{12}$ משטח העיגול. לכן, ההסתברות המבוקשת

$$\text{היא } \frac{7}{12}.$$

יש לשים לב, כי שני המאורעות : חלק הצבוע בלבן, וחלק המסומן במספר ראשוני אינם זרים זה לזה, היות שישנם חלקים הצבועים בצבע לבן ומסומנים במספר

ראשוני. לכן ההסתברות למאורע המבוקש אינה סכום ההסתברויות של שני מאורעות אלה.

ו. החץ יצביע על חלק המסומן במספר אי-זוגי שעל רקע אפור.

ההסתברות שהחץ יצביע על חלק המסומן במספר אי-זוגי שעל רקע אפור היא אפס.

הסבר: היות שכל החלקים הצבועים באפור מסומנים במספרים זוגיים, המאורע המבוקש אינו מכיל אף חלק של העיגול. לכן ההסתברות כי החץ יצביע על חלק הצבוע באפור ומסומן במספר אי-זוגי היא אפס. מאורע כזה נקרא **מאורע בלתי-אפשרי**.

שאלה 2 מה ההסתברות להתרחשות המאורעות הבאים. הסבירו את תשובתכם.

א. ידוע שהחץ מצביע על חלק הצבוע בלבן. מה ההסתברות שהחץ מצביע על החלק המסומן במספר 1?

ההסתברות המבוקשת היא $\frac{1}{6}$.

הסבר: החלק הצבוע בלבן מחולק לשישה חלקים שווים, כאשר אחד החלקים מסומן במספר 1. לכן ההסתברות כי החץ יצביע על החלק המסומן במספר 1 היא $\frac{1}{6}$. הסתברות המאורע בסעיף זה שונה מההסתברות של המאורע: "החץ מצביע על החלק המסומן במספר 1" (המופיע בסעיף א' של השאלה הראשונה). תוספת המידע כי החץ מצביע על חלק הצבוע בלבן מגדילה את ההסתברות להתרחשות המאורע. הסתברות כזו נקראת: **הסתברות מותנית**.

היות שתוספת המידע כי החץ מראה על חלק הצבוע בלבן, משנה את ההסתברות לכך שהחץ מצביע על חלק המסומן במספר 1, שני המאורעות: "החץ מצביע על חלק הצבוע בלבן", ו"החץ מצביע על חלק המסומן במספר 1", הם שני **מאורעות תלויים**.

ב. ידוע שהחץ מצביע על חלק הצבוע בלבן. מה ההסתברות שהחץ מצביע על החלק המסומן במספר 8?

ההסתברות להתרחשות מאורע זה היא 0 (אפס).

הסבר: החלק הצבוע בלבן מחולק לשישה חלקים שווים, כאשר אף לא אחד החלקים מסומן במספר 8. לכן ההסתברות כי החץ יצביע על החלק המסומן במספר 8 היא 0.

תוספת המידע כי החץ מצביע על חלק הצבוע בלבן מקטינה את ההסתברות להתרחשות המאורע. הסתברות כזו נקראת: **הסתברות מותנית**.

ג. ידוע שהחץ מצביע על חלק שמספרו אי-זוגי. מה ההסתברות שהחץ מצביע על חלק הצבוע בלבן?

ההסתברות להתרחשות מאורע זה היא 1 (אחד).

הסבר: היות שנתון כי החץ מצביע על חלק המסומן במספר אי-זוגי, ברור גם כי החץ מצביע על חלק הצבוע בלבן. לכן ההסתברות היא 1. מאורע כזה נקרא **מאורע ודאי**.

תוספת המידע כי החץ מצביע על חלק שמספרו אי-זוגי מגדילה את ההסתברות להתרחשות המאורע. הסתברות כזו נקראת: **הסתברות מותנית**.

ד. ידוע שהחץ מצביע על חלק הצבוע בלבן. מה ההסתברות שהחץ מצביע על חלק המסומן באחד המספרים מ-1 עד 6?

ההסתברות להתרחשות מאורע זה היא $\frac{1}{2}$.

הסבר: החלק הצבוע בלבן מחולק לשישה חלקים שווים, כאשר שלושה חלקים מסומנים במספרים מ-1 עד 6 (1, 3 ו-5). לכן ההסתברות כי החץ יצביע על חלק

המסומן במספרים מ-1 עד 6 היא $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{6}\right)$. תוספת המידע כי החץ מראה על חלק

הצבוע בלבן, אינה משנה את ההסתברות לכך שהחץ מצביע על חלק המסומן באחד

המספרים מ-1 עד 6 השווה ל- $\frac{1}{2} \left(\frac{6}{12}\right)$. שני המאורעות: "החץ מצביע על חלק

המסומן באחד המספרים מ-1 עד 6", ו"החץ מצביע על חלק הצבוע בלבן", הם שני מאורעות **בלתי-תלויים**.

ה. ידוע שהחץ מצביע על חלק הצבוע בלבן. מה ההסתברות שהחץ מצביע על חלק המסומן במספר ראשוני?

ההסתברות המבוקשת היא $\frac{2}{3}$.

הסבר: החלק הצבוע בלבן מחולק לשישה חלקים שווים, כאשר ארבעה מהם מסומנים במספרים ראשוניים: 3, 5, 7, 11. לכן ההסתברות שהחץ מצביע על חלק

המסומן במספר ראשוני, כאשר ידוע כי החץ מצביע על חלק הצבוע בלבן, היא $\frac{2}{3}$.

תוספת המידע כי החץ מצביע על חלק הצבוע בלבן מגדילה את ההסתברות

להתרחשות המאורע. הסתברות כזו נקראת: **הסתברות מותנית**.

ו. ידוע שהחץ מצביע על חלק המסומן במספר ראשוני. מה ההסתברות שהחץ מצביע על חלק הצבוע בלבן?

ההסתברות להתרחשות מאורע זה היא $\frac{4}{5}$.

הסבר: ישנם חמישה חלקים הזהים בשטחם המסומנים במספרים ראשוניים: 2, 3, 5, 7, 11. רק ארבעה חלקים מתוכם צבועים בצבע לבן (3, 5, 7, 11), לכן

ההסתברות היא $\frac{4}{5}$.

תוספת המידע כי החץ מצביע על חלק המסומן במספר ראשוני מגדילה את ההסתברות להתרחשות המאורע. הסתברות כזו נקראת: **הסתברות מותנית**.

הערות למורה:

- שאלה 2 עוסקת בהסתברות מותנית ומתאימה לכן לתלמידי 4 ו-5 י"ל.

- ניתן לדון עם התלמידים במקרים השונים בהם: **שני המאורעות תלויים** – כאשר התנאי מגדיל את ההסתברות (לדוגמה, סעיפים א', ג', ה' ו-ו') או כאשר התנאי מקטין את ההסתברות (לדוגמה, סעיף ב'); **שני המאורעות בלתי תלויים** – התנאי אינו משנה את ההסתברות (לדוגמה, סעיף ד').

- בסעיפים ה' ו-ו' התלמידים מתבקשים לחשב את ההסתברויות המותנות $P(A/B)$ (קרי: P של A בתנאי ש-B) ו- $P(B/A)$ (קרי: P של B בתנאי ש-A). לעתים התלמידים מבלבלים בין שתי הסתברויות אלה, וגם סוברים בטעות כי הסתברויות אלה חייבות להיות שוות. למשל, בדוגמאות הנזכרות לעיל קיבלנו שההסתברויות הן שונות:

$$P(A/B) = P(\text{חלק לבן} / \text{מס' ראשוני}) = \frac{2}{3} \quad \text{בסעיף ה':}$$

$$P(B/A) = P(\text{מס' ראשוני} / \text{חלק לבן}) = \frac{4}{5} \quad \text{בסעיף ו':}$$