

פתרון משימה 7: שעוני משחק

מאפייני המשימה :

- התאמת מודל הסתברותי לשאלה מציאותית
- זיהוי מרחב מדגם דו-ממדי וחישוב הסתברויות של מאורעות בו
- השפעת מספר החזרות על ההסתברות של מאורע

משחק ראשון

שאלה 1 א) רשמו את כל התוצאות האפשריות למשחק זה.

ארבע תוצאות אפשריות בסיבוב של שני החצים :

(כהה, בהיר) , (בהיר, כהה) , (בהיר, בהיר) , (כהה, כהה).

ב) חשבו את ההסתברויות של כל משתתף לנצח במשחק.

בכל אחד מבין שני השעונים, חצי שעון צבוע בצבע כהה, ומחציתו השנייה צבועה בצבע בהיר.

ההסתברות של כל אחד משני השעונים לעצור על צבע בהיר או כהה הינה $\frac{1}{2}$.

לכן ההסתברות של כל אחת מארבע התוצאות האפשריות היא $\frac{1}{4}$.

לכן :

$$P(\text{משתתף א' ינצח}) = P(\text{כהה, כהה}) + P(\text{בהיר, בהיר}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{משתתף ב' ינצח}) = P(\text{כהה, בהיר}) + P(\text{בהיר, כהה}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ג) האם ייתכן שבסדרה של עשרה משחקים משתתף א' הפסיד תמיד? הסבירו את תשובתכם.

ייתכן כי משתתף א' הפסיד בכל עשרת המשחקים. ההסתברות כי משתתף א' יפסיד במשחק

בודד היא $\frac{1}{2}$, היות ועשרת המשחקים בלתי תלויים זה בזה, המשתתף יכול להפסיד בכל

עשרת המשחקים.

ד) האם ההסתברות של המאורע מסעיף ג' שווה לרבע, גדולה מרבע, או קטנה מרבע? הסבירו את תשובתכם.

ההסתברות של המאורע מסעיף ג' קטנה מרבע ושווה ל- $\frac{1}{1024}$ לפי החישוב:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

ה) האם ייתכן שבסדרה של עשרה משחקים, משתתף א' ניצח רק פעם אחת? מה ההסתברות למאורע זה? הסבירו את תשובתכם.

(סעיף זה נועד לתלמידי 4 ו-5 י"ל בלבד.)

ייתכן שבסדרה של עשרה משחקים, משתתף א' ניצח רק פעם אחת. מאורע זה יכול להתרחש ב-10 אפשרויות שונות: ניצחון במשחק הראשון בלבד (והפסד בכל השאר), ניצחון במשחק השני בלבד (והפסד בכל השאר), ניצחון במשחק השלישי בלבד (והפסד בכל השאר), וכך הלאה.

הסיכוי של משתתף א' לנצח או להפסיד במשחק יחיד הוא $\frac{1}{2}$. ההסתברות להתרחשות כל

אחת מעשר האפשרויות שתוארו היא לכן $\frac{1}{1024}$ לפי החישוב: $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$.

ההסתברות לניצחון יחיד של שחקן א' היא סכום עשר ההסתברויות של עשרת המאורעות

הללו, אשר זרים זה לזה כלומר: $\frac{10}{1024} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$. הסתברות זו שווה בערך ל-0.01.

ו) קבעו איזו הסתברות גדולה יותר: ההסתברות שבסדרה של עשרה משחקים, משתתף א' ניצח בדיוק פעם אחת (סעיף ה'), או ההסתברות שבסדרה של מאה משחקים, משתתף א' ניצח בדיוק עשר פעמים. הסבירו את תשובתכם.

(סעיף זה נועד לתלמידי 4 ו-5 י"ל בלבד.)

בסדרה של מאה משחקים, יש 101 אפשרויות שונות למספר הניצחונות של משתתף א': 0 ניצחונות, ניצחון יחיד (ו-99 הפסדים), 2 ניצחונות (ו-98 הפסדים), וכך הלאה עד האפשרות האחרונה שהיא 100 ניצחונות. בשל ריבוי האפשרויות, ההסתברות להתרחשות כל אחת מהן בנפרד היא קטנה מאד, וזאת למרות שההסתברויות השונות אינן שוות בדרך כלל זו לזו.

היות שההסתברות לניצחון יחיד היא $\frac{1}{2}$, נצפה ששיעור הניצחונות יהיה קרוב לחצי ככל

שמספר המשחקים הולך וגדל. יוצא שההסתברות לזכייה ב- 0 עד 10 ניצחונות מתוך 100 משחקים קטנה מההסתברות לזכייה ב- 40 עד 50 ניצחונות. אפשרות הניצחון בעשרה משחקים בדיוק היא אפשרות בודדת מתוך עשר האפשרויות הפחות סבירות, ולכן היא מאורע נדיר מאוד. הסתברות לאפשרות זו שווה בערך ל- 10^{-17} , לפי החישוב הבא:

ההסתברות של כל צירוף של 10 ניצחונות ושל 90 הפסדים הוא $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$. מספר הצירופים

האפשריים הוא: $\binom{100}{10} = \frac{100!}{10!90!}$. ההסתברות הכוללת היא מכפלתם.

כפי שראינו בסעיף הקודם, בסדרה של עשרה משחקים הסיכוי כי משתתף א' ינצח בדיוק במשחק אחד גם הוא נמוך, אך סביר יותר מניצחון של עשרה משחקים בסדרה של מאה משחקים (וההסתברותו שווה בערך ל- 10^{-2}).

משחק שני

שאלה 2 האם הסיכויים של שני המשתתפים לנצח שווים זה לזה? הסבירו את תשובתכם.

הסיכוי של החץ של שעון א' לעצור על החלק הכהה הוא $\frac{3}{4}$, והסיכוי שיעצור על החלק

הבהיר הוא $\frac{1}{4}$. גם הסיכוי של שעון ב' לעצור על החלק הכהה הוא $\frac{3}{4}$, והסיכוי שיעצור על

החלק הבהיר הוא $\frac{1}{4}$.

התוצאות האפשריות בסיבוב של החצים, והסיכויים המתאימים הם:

$$P(\text{כהה, כהה}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$P(\text{כהה, בהיר}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{בהיר, כהה}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{בהיר, בהיר}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

הסיכוי של משתתף א' לנצח:

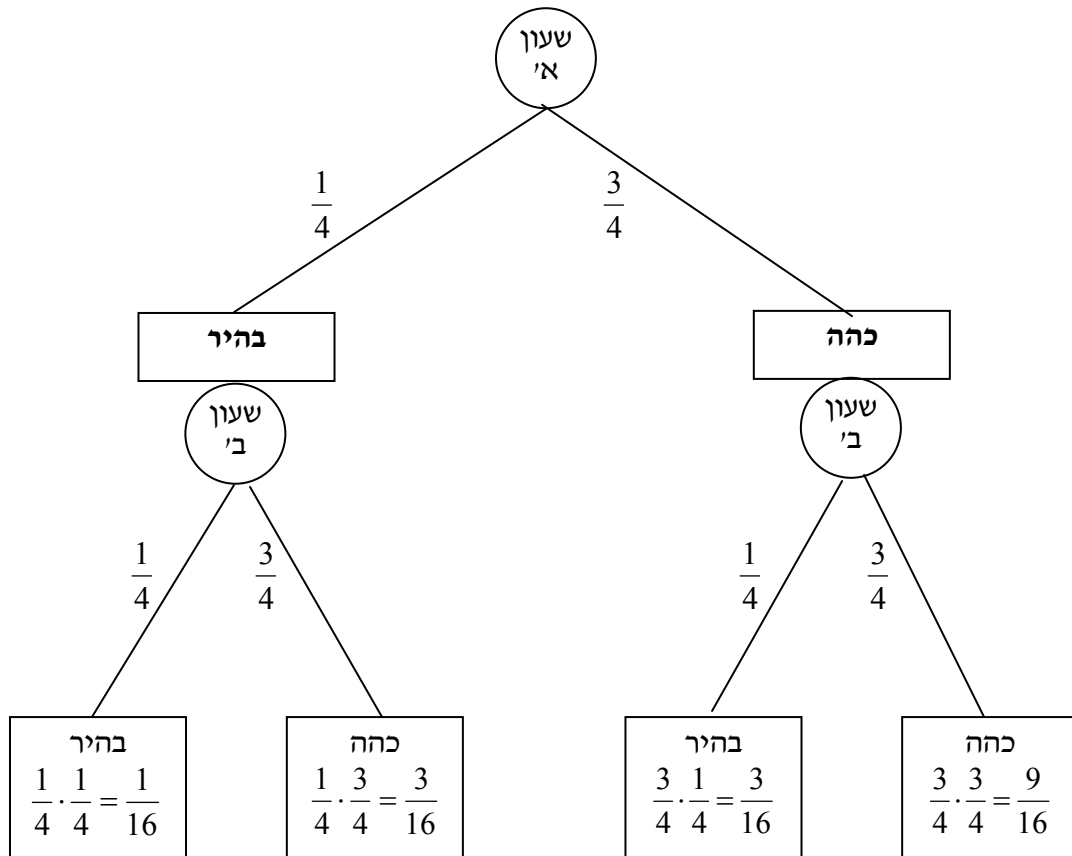
$$P(\text{כהה, כהה}) + P(\text{בהיר, כהה}) = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

הסיכוי של משתתף ב' לנצח:

$$P(\text{בהיר, כהה}) + P(\text{בהיר, כהה}) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

למשתתף א' סיכוי גבוה יותר לנצח במשחק.

ניתן גם לתאר את תוצאות המשחק, באמצעות דיאגרמת עץ:



שאלה 3 מי מבין שני המשחקים הוגן? הסבירו את תשובתכם.

המשחק הראשון הוא משחק הוגן, כי לשני המשתתפים סיכוי זהה לנצח (שווה ל- $\frac{1}{2}$).

במשחק השני הסיכוי של משתתף א' לנצח גבוה מאשר הסיכוי של משתתף ב' לנצח, כלומר המשחק אינו הוגן.

שאלה 4 הראו שבכל מקרה בו השטח הכהה אינו שווה לשטח הבהיר, המשחק מוטה לטובתו של משתתף א'.

נסמן ב- a את אחוז השטח הכהה בכל שעון, וב- b את אחוז השטח הבהיר בכל שעון.

$$P(\text{משתתף א' מנצח}) =$$

$$P(\text{שעון שני מראה כהה}) \cdot P(\text{שעון ראשון מראה כהה}) +$$

$$P(\text{שעון שני מראה בהיר}) \cdot P(\text{שעון ראשון מראה בהיר}) = a^2 + b^2$$

$$P(\text{משתתף ב' מנצח}) =$$

$$P(\text{שעון שני מראה בהיר}) \cdot P(\text{שעון ראשון מראה כהה}) +$$

$$P(\text{שעון שני מראה כהה}) \cdot P(\text{שעון ראשון מראה בהיר}) = ab + ba = 2ab$$

לכל a ו- b מתקיים:

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

לפיכך כאשר השטח הכהה אינו שווה לשטח הבהיר, כלומר $a \neq b$, המשחק מוטה לטובתו של משתתף א' סיכוייו לזכות גדולים מסיכויי משתתף ב'.

השוויון $a^2 + b^2 = 2ab$ מתקיים אם ורק אם $a=b$ כלומר, כאשר השטח הכהה שווה לשטח הבהיר, ושניהם שווים למחצית שטח העיגול. רק במקרה זה המשחק הוגן. בכל שאר המקרים, למשתתף א' סיכוי גבוה יותר לזכות.

הערה כללית: במשימה זו מופיעים שני הביטויים **הסתברות וסיכויים**, אשר הינם ביטויים זהים.