

פתרון משימה 6: מי נבחר ומי מנצח?

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל הסתברותי לשאלה מציאותית
- זיהוי והבחנה בין מרחבי מדגם שונים (חד- ממדי ודו-ממדי)
- ניתוח של אסטרטגיות משחק

א. בחירות למועצת התלמידים

שאלה 1 א. מהם הסיכויים לבחירת בן כלשהו בכיתה י'1? הסבירו את תשובתכם.

בבחירה אקראית על-ידי הוצאת פתק ועליו שם המועמד, לכל אחד מהתלמידים אותו

סיכוי להיבחר. לכן הסיכוי לבחירת בן כלשהו הוא $\frac{1}{3} \left(\frac{2}{6}\right)$.

ב. מהם הסיכויים לבחירת בת כלשהי בכיתה י'1? הסבירו את תשובתכם בשתי דרכים שונות.

בבחירה אקראית על-ידי הוצאת פתק ועליו שם המועמד, לכל אחד מהתלמידים אותו

סיכוי להיבחר. לכן הסיכוי לבחירת בת כלשהי הוא $\frac{2}{3} \left(\frac{4}{6}\right)$.

ניתן לחשב את הסיכוי לבחירת בת כלשהי באמצעות החישוב של הסיכוי להתרחשות

המאורע המשלים (נבחר בן כלשהו – סעיף א'), והסיכוי יהיה על-כן: $1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

שאלה 2 א. מהם הסיכויים לבחירת בן כלשהו בכיתה י'2? הסבירו את תשובתכם.

הסיכוי לבחירת בן כלשהו הוא $\frac{1}{2}$. סיכוי זה שווה לסיכוי כי המטבע ייפול על "גב".

ב. מהם הסיכויים לבחירת בת כלשהי בכיתה י'2? הסבירו את תשובתכם.

הסיכוי לבחירת בת כלשהי הוא $\frac{1}{2}$. סיכוי זה שווה לסיכוי כי המטבע ייפול על "פנים".

שאלה 3 האם לכל אחד מן המועמדים יש אותו הסיכוי להיבחר בכל אחת משתי הכיתות? הסבירו.

בשיטת הבחירות בכיתה י' לכל אחד מהמועמדים אותו סיכוי להיבחר השווה ל- $\frac{1}{6}$.

בשיטת הבחירות בכיתה י'2 הסיכוי לבחירת בת שווה לסיכוי לבחירת בן ($\frac{1}{2}$). אם נבחרה

בת הסיכוי לבחירת כל אחת מהבנות הוא $\frac{1}{4}$ ואם נבחר בן, הסיכוי לבחירת כל אחד מהבנים

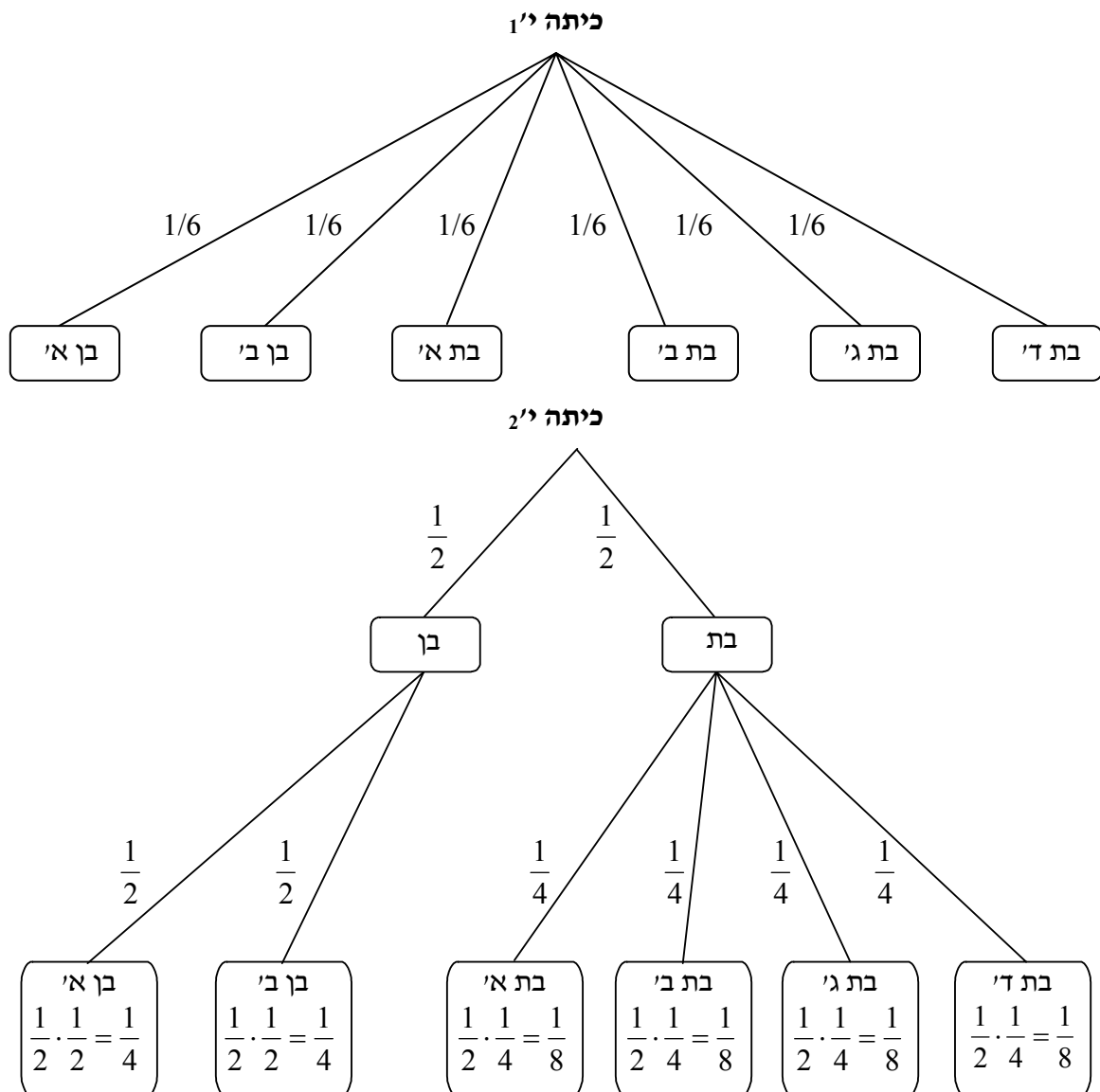
הוא $\frac{1}{2}$. לכן הסיכוי לבחירת כל אחת מהבנות המועמדות הוא $\frac{1}{8}$ ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$) והסיכוי לבחירת

כל אחד מהבנים המועמדים הוא $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$). כלומר, בכיתה י'2 אין סיכוי שווה לכל אחד

מהמועמדים (הסיכוי של כל בן הוא כפליים מהסיכוי של כל בת), לעומת הסיכוי השווה של

כל אחד מהמועמדים בכיתה י'. ניתן גם לתאר את תוצאות הבחירות על-פי שתי השיטות,

באמצעות דיאגרמת עץ:



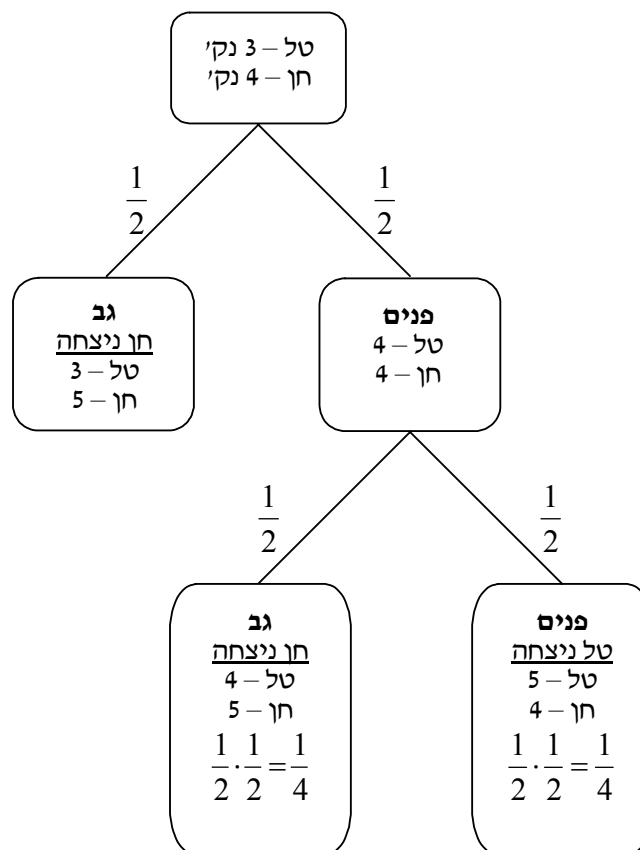
ב. מי מנצח?

שאלה 4 עוד כמה הטלות מטבע לכל היותר, יהיה עליהן להטיל עד לסיום המשחק? הסבירו את תשובתכם.

שתי הטלות. אם בהטלה הראשונה חן זוכה המשחק מסתיים, אך אם בהטלה הראשונה טל זוכה, לשתייהן יהיו ארבע נקודות וההטלה השנייה תקבע מי משתייהן תנצח.

שאלה 5 מה ההסתברות של כל אחת מהבנות לנצח במשחק, אם ימשיכו אותו עד לסיומו? הסבירו את תשובתכם.

דרך טובה לתיאור ניסוי זה, היא באמצעות דיאגרמת עץ המוצגת להלן:



חן יכולה לנצח בשני מקרים:

בהטלה הראשונה המטבע מראה על **גב** ואז המשחק מסתיים, או בהטלה הראשונה המטבע מראה על **פנים** ובהטלה השנייה המטבע מראה על **גב**. ההסתברות במקרה הראשון היא:

$$\frac{1}{2}, \text{ וההסתברות במקרה השני היא: } \frac{1}{4}. \text{ לכן הסיכוי של חן לנצח הוא: } \frac{3}{4}.$$

טל יכולה לנצח רק במקרה אחד (בשאר המקרים חן מנצחת):

בהטלה הראשונה המטבע מראה על פנים וגם בהטלה השנייה המטבע מראה על פנים.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ לפי החישוב: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ניתן גם להסתכל על המאורע המשלים: טל מנצחת אם חן אינה מנצחת, היות ואין מצב של

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ לפי החישוב: } \frac{1}{4}$$

ג. משחק הכדורים

שאלה 6 מהם הסיכויים של שחר לנצח במשחק, אם בן בחר להכניס כדור אחד בכל כד? הסבירו את תשובתכם.

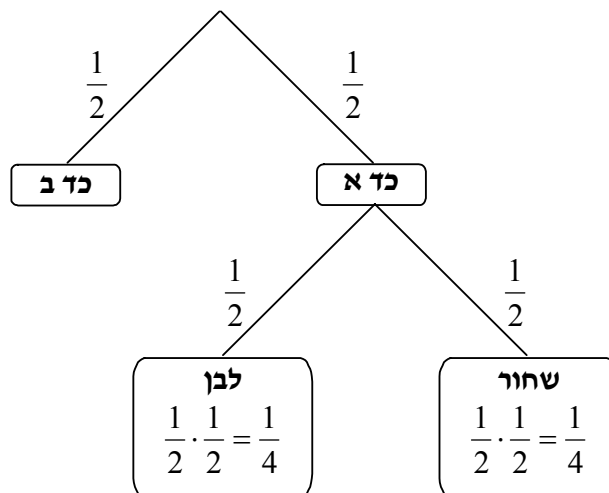
הסיכוי של שחר לנצח הוא $\frac{1}{2}$. במקרה זה בחירת הכד קובעת כבר אם המשתתף מנצח או לא. כל אחד מהכדים מכיל כדור אחד בלבד, לבן או שחור. בחירת הכד המכיל כדור שחור מזכה בנצחון, ואילו בחירת הכד המכיל את הכדור הלבן גורמת להפסד. ההסתברות לבחירת כל אחד מהכדים היא $\frac{1}{2}$ ולכן הסיכוי לנצחון של שחר הוא $\frac{1}{2}$ (כמו גם הסיכוי לנצחון של בן).

שאלה 7 מהם הסיכויים של שחר לנצח במשחק, אם בן בחר להכניס את שני הכדורים לאותו הכד? הסבירו את תשובתכם.

הסיכוי של שחר לנצח במקרה זה הוא $\frac{1}{4}$ בלבד. בחירת הכד הריק גורמת להפסד מיידי (היות ואין סיכוי להוציא ממנו כדור שחור), ואילו, לאחר בחירת הכד המכיל את שני הכדורים עומדות בפני שחר שתי אפשרויות (בעלות סיכויים שווים): הוצאת הכדור השחור ונצחון, או הוצאת הכדור הלבן והפסד. בשביל לנצח במקרה זה, על שחר ראשית, לבחור את הכד המכיל את שני הכדורים (הסתברות $\frac{1}{2}$) ואחר-כך להוציא ממנו את הכדור השחור (הסתברות $\frac{1}{2}$). שני השלבים בלתי תלויים זה בזה, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{4}$ לפי החישוב:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

דרך טובה לתיאור ניסוי זה, היא באמצעות דיאגרמת עץ מתאימה. לדוגמה, נסתכל במקרה בו בן בחר להכניס את שני הכדורים לאותו הכד:



שאלה 8 הציעו לבן דרך למיקום הכדורים בשני הכדים שתגדיל את סיכוייו לנצח במשחק. נמקו את תשובתכם.

בן יכול להכניס את הכדורים לכדים רק בשתי אפשרויות.

אפשרות ראשונה: בן מכניס כדור אחד בכל כד. באפשרות זו דנו התלמידים בשאלה 6.

במקרה זה הסיכוי של שחר לזכות הוא כאמור $\frac{1}{2}$.

אפשרות שנייה: בן מכניס את שני הכדורים לאותו הכד, והכד השני נשאר ריק. באפשרות זו

דנו התלמידים בשאלה 7. במקרה זה הסיכוי של שחר לזכות הוא כאמור $\frac{1}{4}$.

לכן, לבן כדאי לבחור באפשרות השנייה ולהכניס את שני הכדורים לאחד הכדים ולהשאיר את הכד השני ריק.

יש לשים לב, כי לעתים תלמידים עלולים להסתכל על האפשרות הראשונה, בה כל כד מכיל כדור אחד בלבד, כעל שני מקרים שונים:

א. כדור לבן בכד א' וכדור שחור בכד ב'.

ב. כדור לבן בכד ב' וכדור שחור בכד א'.

שני מקרים אלה זהים ולא ניתן להבחין בין שני הכדים, אין משמעות להיכן הוכנסו הכדורים, אלא לאופן הסידור שלהם בין הכדים השונים.

שאלה 9 מהם הסיכויים של שחר לנצח במשחק, בהנחה שבן בוחר באקראי להיכן להכניס את שני הכדורים? הסבירו את תשובתכם.

בסעיף הקודם (שאלה 8) ראינו כי בן יכול להכניס את הכדורים לכדים רק בשתי אפשרויות.

אם הכנסת הכדורים לכדים היא אקראית, ההסתברות לכל אחת משתי אפשרויות אלה היא

$\frac{1}{2}$. השלב של הכנסת הכדורים על-ידי בן והשלב של בחירת הכד והוצאת הכדור על-ידי שחר

בלתי תלויים זה בזה. לכן הסיכויים של שחר לנצח במשחק זה הם $\frac{3}{8}$ לפי החישוב:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

שאלה 10 לאחר מספר סיבובים, הציע שחר לגוון את המשחק ולהוסיף שני כדורים: כדור שחור וכדור לבן. כך שיהיו ברשותם כעת ארבעה כדורים: שניים שחורים ושניים לבנים, וחוקי המשחק לא ישתנו (רק שהפעם בן יכניס את ארבעת הכדורים לשני הכדים באופן אקראי). האם השינוי ישפיע על הסיכויים של שחר לנצח? הסבירו את תשובתכם.

כעת ישנן לבן חמש אפשרויות להכנסת הכדורים לכדים השונים:
אפשרות א': הכנסת ארבעת הכדורים לכד אחד והכד השני נשאר ריק. ההסתברות של שחר

$$\text{לנצח במקרה זה היא: } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right).$$

אפשרות ב': הכנסת שלושה כדורים (שני כדורים שחורים וכדור לבן) לכד אחד, וכדור לבן

$$\text{לכד השני. ההסתברות של שחר לנצח במקרה זה היא: } \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right).$$

אפשרות ג': הכנסת שלושה כדורים (שני כדורים לבנים וכדור שחור) לכד אחד, וכדור שחור

$$\text{לכד השני. ההסתברות של שחר לנצח במקרה זה היא: } \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right).$$

אפשרות ד': הכנסת שני כדורים שחורים לכד אחד, ושני כדורים לבנים לכד השני.

$$\text{ההסתברות של שחר לנצח במקרה זה היא: } \frac{1}{2}.$$

אפשרות ה': הכנסת שני כדורים (כדור לבן וכדור שחור) לכד אחד, ושני כדורים (כדור לבן וכדור שחור) לכד השני. ההסתברות של שחר לנצח במקרה זה היא:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \right).$$

היות והבחירה של בן להכנסת הכדורים על-פי כל אחת מחמש האפשרויות היא אקראית,

$$\text{ההסתברות שבן יבחר בכל אחת מהאפשרויות היא } \frac{1}{5}.$$

ההסתברות של שחר לנצח היא $\frac{9}{20}$. הסתברות זאת היא סכום ההסתברויות של כל אחת

$$\text{מהאפשרויות מוכפלת ב- } \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{20} \right).$$

הערה למורה: יהיו תלמידים שיסברו בטעות כי שינוי מספר הכדורים, תוך שמירה על פרופורציית מספר הכדורים השחורים, אינה משנה את הסיכוי של שחר לנצח במשחק.

הערה כללית:

במשימה זו מופיעים שני הביטויים **הסתברות וסיכויים**, אשר הינם ביטויים זהים.