

אולימפיאדת המתמטיקה

אביב ובן הם נציגי שתי כיתות ח' המתמודדות באולימפיאדת המתמטיקה.

הם בוחנים ארבעה משחקי מזל שונים, שישמשו להכרעה בשאלה איזו כיתה תישאל ראשונה באולימפיאדה. לפניכם תיאור ארבעת המשחקים:

משחק ראשון: משחק המספרים

מארגן התחרות פותח באופן אקראי ספר עב כרס, בו מספרי העמודים הם בין 10 ל-999. אם מספר העמוד הנפתח הוא דו-ספרתי – אביב מנצח, ואם מספר העמוד הוא תלת-ספרתי – בן מנצח.

שאלה 1. האם המשחק הוגן? נמקו.

משחק שני: "זוג או פרט" – גרסה ראשונה

אביב ובן משחקים במשחק "זוג או פרט".

לפי כללי המשחק, על שניהם להראות בבת אחת מספר אצבעות בין אחת לחמש.

כל אחד מהם יבחר באופן אקראי את מספר האצבעות אותו הוא יראה.

- **אביב** זוכה אם **סכום** מספרי האצבעות של שניהם הוא זוגי.
- **בן** זוכה אם **סכום** מספרי האצבעות של שניהם הוא אי-זוגי.

שאלה 2. נתחו את מהלך המשחק:

א. מהו מספר זוגות המספרים אותם ניתן לקבל במהלך משחק זה?

ב. רשמו את כל הזוגות האפשריים במשחק זה.

ג. חשבו את ההסתברויות של כל שחקן לניצחון במשחק.

ד. האם הסיכויים לניצחון של שני השחקנים שווים?

שאלה 3. האם תשובותיכם לשאלות הקודמות ישתנו, אם במשחק בו מחושב סכום מספרי האצבעות, יוכלו הילדים לבחור גם באפשרות שלא להראות אף אחת מאצבעותיהם (אפס אצבעות)? הסבירו את תשובתכם.

משחק שלישי: "זוג או פרט" - גרסה שנייה

אביב ובן משחקים שוב במשחק "זוג או פרט", הפעם בגרסה אחרת.

לפי כללי המשחק, על שניהם להראות בבת אחת מספר אצבעות בין אחת לחמש.

- **אביב** זוכה אם **מכפלת** מספרי האצבעות של שניהם היא זוגית.

- **בן** מנצח אם **מכפלת** מספרי האצבעות היא אי-זוגית.

שאלה 4. קבעו: האם המשחק הוגן? נמקו.

משחק רביעי: "אבן, נייר ומספריים"

אביב ובן משחקים במשחק "אבן, נייר ומספריים".

לפי כללי המשחק, על שניהם להראות בבת אחת את יד ימין באחד משלושת המצבים: אבן, נייר או מספריים [ראו ציור].



מספריים



נייר



אבן

כללי הניצחון במשחק זה הם:

- אבן מנצחת את המספריים (שוברת).
- נייר מנצח את האבן (עוטף).
- מספריים מנצחים את הנייר (גוזרים).

כאשר שני השחקנים מראים מצב זהה, איש אינו מנצח (תיקו).

שאלה 5. נתחו את מהלך המשחק "אבן, נייר ומספריים":

- רשמו את כל התוצאות האפשריות במשחק זה.
- חשבו את ההסתברויות של כל שחקן לניצחון במשחק.
- האם הסיכויים לניצחון של כל אחד מן השחקנים שווים?

סיכום: השוואת המשחקים

שאלה 6. עזרו לאביב ולבן לסכם את סיכוייהם לזכייה במשחקי המזל אותם בחנו: השוו בין ארבעת המשחקים. הסבירו את תשובתכם.

פתרון משימה: אולימפיאדת המתמטיקה

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל הסתברותי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים;
- שכיחות יחסית;
- הבנה כי שתי אפשרויות זרות המשלימות זו את זו אינן, בהכרח, שוות הסתברות;
- זיהוי מרחב מדגם דו-ממדי, וחישוב ההסתברויות של המאורעות החלים בו;
- שיקולי כדאיות;
- בדיקת ההוגנות של משחקים.

משחק ראשון: משחק המספרים

שאלה 1. האם המשחק הוגן? נמקו.

משחק זה אינו הוגן.

בספר עב הכרס הכולל 990 עמודים (מ- 10 עד 999), ישנם מספרים תלת-ספרתיים רבים יותר מאשר מספרים דו-ספרתיים. ליתר דיוק, קיימים 90 מספרים דו-ספרתיים (מ- 10 עד 99), ואילו מספר המספרים התלת-ספרתיים הוא 900 (מ- 100 עד 999). לפי כללי המשחק, אם מספר העמוד הוא דו-ספרתי – אביב מנצח, ואם מספר העמוד הוא תלת-ספרתי – בן מנצח. לכן הסיכוי של בן לנצח גבוה מהסיכוי של אביב. הסיכוי של אביב לנצח הוא: $\frac{90}{990} = \frac{1}{11}$, לעומת הסיכוי של בן לנצח: $\frac{900}{990} = \frac{10}{11}$. כלומר, ההסתברות שבן ינצח גדולה פי עשרה מההסתברות שאביב ינצח.

הערה למורה: יש תלמידים הסוברים מתוך טעות כי משחק זה הוגן, כי למשחק שתי תוצאות אפשריות: מספר דו-ספרתי ומספר תלת-ספרתי. בשל כך טועים הם לחשוב כי ההסתברות של כל אחת מסוגי התוצאות היא חצי.

משחק שני: "זוג או פרט" - גרסה ראשונה

שאלה 2. נתחו את מהלך המשחק:

א. מהו מספר זוגות אותם ניתן לקבל במהלך משחק זה?

במשחק זה יכולים להתקבל 25 זוגות מספרים. כל אחד מהילדים יכול להראות 5 אפשרויות שונות (1–5 אצבעות). המספר הכולל של הזוגות האפשריים הוא: $5 \cdot 5$, כלומר: 25 זוגות מספרים. לדוגמה: אם אביב מראה אצבע אחת, בן יכול להראות אצבע אחת, שתי אצבעות, ..., חמש אצבעות, וכדומה.

ב. רשמו את כל הזוגות האפשריים במשחק זה.

זוג אפשרי במשחק זה הוא **זוג סדור (אביב, בן)** המייצג את מספרי האצבעות שהראו אביב ובן בהתאמה. כל זוג אפשרי כזה הוא שווה הסתברות. במקרה כזה נוח מאוד להראות את אוסף כל הזוגות האפשריים (מרחב המדגם) בטבלה דו-ממדית, כמודגם להלן. ליד כל אפשרות רשמנו את הסכום המתקבל ואת שמו של המנצח.

סכום	1	2	3	4	5
1	(1, 1) 2 אביב	(1, 2) 3 בן	(1, 3) 4 אביב	(1, 4) 5 בן	(1, 5) 6 אביב
2	(2, 1) 3 בן	(2, 2) 4 אביב	(2, 3) 5 בן	(2, 4) 6 אביב	(2, 5) 7 בן
3	(3, 1) 4 אביב	(3, 2) 5 בן	(3, 3) 6 אביב	(3, 4) 7 בן	(3, 5) 8 אביב
4	(4, 1) 5 בן	(4, 2) 6 אביב	(4, 3) 7 בן	(4, 4) 8 אביב	(4, 5) 9 בן
5	(5, 1) 6 אביב	(5, 2) 7 בן	(5, 3) 8 אביב	(5, 4) 9 בן	(5, 5) 10 אביב

ג. חשבו את ההסתברויות של כל שחקן לניצחון במשחק.

קיימות 25 תוצאות אפשריות במשחק, וכולן שוות הסתברות (ראו טבלה לעיל). מתוכן, ב- 13 מקרים מתקבל סכום זוגי, וב- 12 מקרים מתקבל סכום אי-זוגי. לפיכך, ההסתברות שאביב ינצח במשחק, שווה להסתברות כי סכום האצבעות יהיה

זוגי: $\frac{13}{25}$; בעוד ההסתברות שבן ינצח במשחק, שווה להסתברות כי סכום האצבעות

יהיה אי-זוגי: $\frac{12}{25}$.

ד. האם הסיכויים לניצחון של כל אחד מן השחקנים שווים?

כפי שראינו בסעיף הקודם, קיימות 25 אפשרויות שוות הסתברות במשחק זה. לכן, כבר מכך ניתן להסיק כי ההסתברויות של שני השחקנים לנצח אינן יכולות להיות שוות (כיוון שאין אפשרויות הנותנות תיקו). לפיכך, משחק זה אינו הוגן.

הערה: יש תלמידים הסוברים בטעות כי המשחק הוגן, והנימוקים השגויים אותם הם מציגים הם, לעתים, חוץ מתמטיים, כמו: "זה משחק מקובל שמטרתו לקבוע, למשל, מי ה'עומד' במשחק מחבואים – ולכן ברור כי הוא הוגן"; או נימוקים מתמטיים, כמו: "למרות שיש יותר מקרים בהם מספר האצבעות הוא אי-זוגי, אין זה משנה, כי סכומם של שני מספרים אי-זוגיים הוא זוגי", ועוד.

שאלה 3. האם תשובתיכם לשאלות הקודמות ישתנו, אם במשחק בו מחושב סכום מספרי האצבעות, יוכלו הילדים לבחור גם באפשרות שלא להראות אף אחת מאצבעותיהם (אפס אצבעות)? הסבירו את תשובתכם.

במקרה זה מרחב המדגם יכול $6 \cdot 6 = 36$ אפשרויות. ניתן לבנות טבלה הדומה לטבלת האפשרויות שהופיעה בשאלה 2. המשחק החדש הינו הוגן, כיוון שמחצית התוצאות (18) הן זוגיות ומחצית התוצאות הן אי-זוגיות. לפיכך, ההסתברות של אביב לנצח במשחק החדש שווה לחצי ($\frac{1}{2} = \frac{18}{36}$), וההסתברות של בן לנצח במשחק החדש שווה גם היא לחצי.

משחק שלישי: "זוג או פרט" - גרסה שנייה

שאלה 4. קבעו: האם המשחק הוגן? נמקו.

לפי כללי המשחק בגרסה זו בוחנים את המכפלה של מספר האצבעות במקום את סכומם. מרחב המדגם מכיל 25 אפשרויות (בדיוק כמו במשחק הראשון). להלן טבלת כל התוצאות האפשריות במשחק זה (ליד כל אפשרות רשמנו את המכפלה המתקבלת, ואת שמו של המנצח):

מכפלה	1	2	3	4	5
1	(1, 1) 1 בן	(1, 2) 2 אביב	(1, 3) 3 בן	(1, 4) 4 אביב	(1, 5) 5 בן
2	(2, 1) 2 אביב	(2, 2) 4 אביב	(2, 3) 6 אביב	(2, 4) 8 אביב	(2, 5) 10 אביב
3	(3, 1) 3 בן	(3, 2) 6 אביב	(3, 3) 9 בן	(3, 4) 12 אביב	(3, 5) 15 בן
4	(4, 1) 4 אביב	(4, 2) 8 אביב	(4, 3) 12 אביב	(4, 4) 16 אביב	(4, 5) 20 אביב
5	(5, 1) 5 בן	(5, 2) 10 אביב	(5, 3) 15 בן	(5, 4) 20 אביב	(5, 5) 25 בן

מפירוט התוצאות בטבלה ניתן ללמוד כי גם המשחק בגרסה השנייה אינו משחק הוגן. ניתן להיעזר בכללי הכפל כדי להגיע למסקנה זוה: כאשר לפחות אחד מהילדים מראה מספר זוגי של אצבעות, התוצאה תהיה זוגית. כלומר, רק בתשע האפשרויות הבאות

$(1, 1); (3, 1); (5, 1); (1, 3); (3, 3); (5, 3); (1, 5); (3, 5); (5, 5)$ מתקבלת תוצאה אי-זוגית. ב-16 האפשרויות הנותרות התוצאה היא זוגית. לפיכך, ההסתברות של אביב לנצח במשחק החדש שווה ל- $\frac{16}{25}$ וההסתברות של בן לנצח במשחק החדש שווה ל- $\frac{9}{25}$.

משחק רביעי: "אבן, נייר ומספריים"

שאלה 5. נתחו את מהלך המשחק:

א. רשמו את כל התוצאות האפשריות במשחק זה.

נוח לרשום את התוצאות האפשריות במשחק זה (מרחב המדגם) בטבלה דו-ממדית (ליד כל אפשרות רשמנו את שמו של המנצח):

אביב \ בן	אבן	נייר	מספריים
אבן	(אבן, אבן) תיקו	(נייר, אבן) אביב	(מספריים, אבן) בן
נייר	(אבן, נייר) בן	(נייר, נייר) תיקו	(מספריים, נייר) אביב
מספריים	(אבן, מספריים) אביב	(נייר, מספריים) בן	(מספריים, מספריים) תיקו

ב. חשבו את ההסתברויות של כל שחקן לניצחון במשחק.

בכל סיבוב של משחק, ההסתברות כי אביב ינצח היא: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

בכל סיבוב של משחק, ההסתברות כי בן ינצח היא: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

בכל סיבוב של משחק, ההסתברות לקבלת תיקו היא: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

ג. האם הסיכויים לניצחון של כל אחד מן השחקנים שווים?

כפי שראינו בסעיף הקודם, הסיכויים של שני השחקנים לנצח זהים ושווים ל- $\frac{1}{3}$.

לכן, משחק זה הוא הוגן. קיימות 9 אפשרויות לתוצאות המשחק, וכולן שוות הסתברות. למרות שמספר האפשרויות הוא אי-זוגי, המשחק הוגן, כיוון ששלוש מהאפשרויות נותנות תוצאת תיקו.

סיכום: השוואת המשחקים

שאלה 6. עזרו לאביב ולבן לסכם את סיכוייהם לזכייה במשחקי המזל אותם בחנו: השוו בין ארבעת המשחקים. הסבירו את תשובתכם.

נסכם את שלמדנו לגבי ארבעת המשחקים בעזרת הטבלה הבאה:

#	שם המשחק	מס' האפשרויות	קיום מצב של תיקו	הסיכוי של בן לזכות	הסיכוי של אביב לזכות	האם המשחק הוגן?
א.	"המספרים"	990	לא	$\frac{10}{11}$	$\frac{1}{11}$	לא הוגן
ב.	"זוג או פרט" - גרסה ראשונה	25	לא	$\frac{12}{25}$	$\frac{13}{25}$	לא הוגן
	"זוג או פרט" - גרסה ראשונה, כולל אפס	36	לא	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	הוגן
ג.	"זוג או פרט" - גרסה שנייה	25	לא	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$	לא הוגן
ד.	"אבן, נייר ומספריים"	9	כן	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	הוגן

נכליל כעת את התוצאות. נזכיר כי לכל אחת מהתוצאות האפשריות במשחקים הללו יש הסתברות שווה.

1. משחק במרחב אחיד, בו מספר התוצאות האפשריות הוא אי-זוגי:

א. אם אין במשחק תוצאת תיקו, לא ייתכן כי יהיה הוגן, כפי שראינו במשחק "זוג או פרט" (במקרה בו לא ניתן להראות אפס אצבעות).

ב. אם יש במשחק תוצאת תיקו, ייתכן כי יהיה הוגן, כמו המשחק "אבן, נייר ומספריים".

2. משחק במרחב אחיד, בו מספר התוצאות האפשריות הוא זוגי ואין במשחק תוצאת תיקו:

לא ניתן להכליל, כי קיימות שתי אפשרויות מנוגדות:

א. ייתכן שיהיה משחק הוגן, כמו המשחק "זוג או פרט" בגרסה הכוללת אפס אצבעות;

ב. ייתכן גם שיהיה משחק לא הוגן, כמו משחק "המספרים".

3. משחק הוגן במרחב אחיד:

א. אם במשחק אין תוצאת תיקו, ההסתברות לניצחון של כל אחד משני השחקנים היא $\frac{1}{2}$, כמו במשחק "זוג או פרט" (בגרסה שכוללת אפס אצבעות).

ב. אם יש אפשרות לקבל תוצאת תיקו, ההסתברות של שני השחקנים לנצח היא שווה, אך קטנה מחצי, כמו במשחק "אבן, נייר ומספריים".