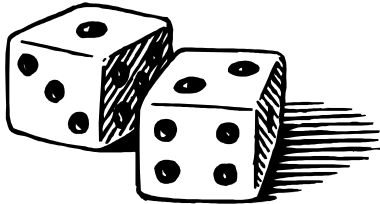


ודאי, בלתי אפשרי ומה שביניהם

שאלה 1.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, הביאו דוגמה למאורע או מאורעות המקיימים את התיאור המופיע בסעיף, אם ניתן למצוא מאורעות כאלה. אם לא, נמקו את תשובתכם.



א. מאורע הקשור בזריקת שתי קוביות הוגנות, שסיכויו לקרות הם הגבוהים ביותר.

ב. מאורע הקשור בזריקת שתי קוביות הוגנות, שאין סיכוי שיתרחש (סיכוי לקרות הם אפס).

ג. שני מאורעות שונים הקשורים בזריקת שתי קוביות הוגנות, שהסיכויים להתרחשותם שווים.

שאלה 2.

לפניכם חמישה מאורעות הקשורים בהטלת מטבע 20 פעמים. סדרו את המאורעות הבאים על פי הסדר הבא: מהמאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר, למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר. הסבירו את תשובתכם.



א. יתקבל "גב" בכל ההטלות.

ב. יתקבל "פנים" מספר שלם של פעמים.

ג. יתקבל "גב" ב- 10 הטלות בדיוק.

ד. יתקבל "גב" או "פנים" יותר מ- 20 פעמים.

ה. יתקבל "גב" יותר פעמים מאשר יתקבל "פנים".

שאלה 3.

לפניכם חמישה מאורעות הקשורים בהטלת מטבע 200 פעמים. סדרו את המאורעות הבאים על פי הסדר הבא: מהמאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר, למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר. הסבירו את תשובתכם.

- א. יתקבל "גב" בכל ההטלות.
- ב. יתקבל "פנים" מספר שלם של פעמים.
- ג. יתקבל "גב" ב- 100 הטלות בדיוק.
- ד. יתקבל "גב" או "פנים" יותר מ- 200 פעמים.
- ה. יתקבל "גב" יותר פעמים מאשר יתקבל "פנים".

שאלה 4.

לפניכם חמישה מאורעות הקשורים בהטלת מטבע 1,000 פעמים. סדרו את המאורעות הבאים על פי הסדר הבא: מהמאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר, למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר. הסבירו את תשובתכם.

- א. יתקבל "גב" בכל ההטלות.
- ב. יתקבל "פנים" מספר שלם של פעמים.
- ג. יתקבל "גב" ב- 500 הטלות בדיוק.
- ד. יתקבל "גב" או "פנים" יותר מ- 1,000 פעמים.
- ה. יתקבל "גב" יותר פעמים מאשר יתקבל "פנים".

פתרון משימה: ודאי, בלתי אפשרי ומה שביניהם

מאפייני המשימה:

- התאמת מודל הסתברותי לשאלה מציאותית;
- המרות בין ייצוגים;
- שכיחות יחסית;
- סידור מאורעות לפי הסתברויותיהם.

שאלה 1. בכל אחד מהסעיפים הבאים, הביאו דוגמה למאורע או מאורעות המקיימים את התיאור המופיע בסעיף, אם ניתן למצוא מאורעות כאלה. אם לא, נמקו את תשובתכם.

א. מאורע הקשור בזריקת שתי קוביות הוגנות, שסיכויו לקרות הם הגבוהים ביותר.

המאורע בעל ההסתברות הגבוהה ביותר הוא המאורע הוודאי, שהסתברותו 1. מאורע זה מכיל את כל איברי מרחב המדגם ולכן זהו מאורע יחיד. ניתן לתארו בצורות שונות, לדוגמה:

- בזריקת שתי קוביות יתקבל סכום חיובי.
- בזריקת שתי קוביות יתקבל סכום הקטן מ- 13.
- בזריקת שתי קוביות יתקבלו מספרים טבעיים.

ב. מאורע הקשור בזריקת שתי קוביות הוגנות, שאין סיכוי שיתרחש (סיכוי לקרות הם אפס).

מאורע הקשור בזריקת שתי קוביות הוגנות, שאין סיכוי שיתרחש, הוא מאורע שהסתברותו שווה לאפס. גם במקרה זה קיים מאורע אחד מתאים, שהוא הקבוצה הריקה. ניתן לתאר מאורע זה בצורות שונות, לדוגמה:

- בזריקת שתי קוביות יתקבל סכום שלילי.
- בזריקת שתי קוביות הפרש המספרים המופיעים על הקוביות יהיה גדול מ- 6.
- בזריקת שתי קוביות מכפלת המספרים המופיעים על הקוביות תהיה 27.

ג. שני מאורעות שונים הקשורים בזריקת שתי קוביות הוגנות, שהסיכויים להתרחשותם שווים.

קיימים מאורעות רבים שהסיכויים להתרחשותם שווים, לדוגמה:

- מאורעות שהסיכויים להתרחשותם הם $\frac{1}{36}$. קיימים 36 מאורעות שונים כאלה.

אלה הם כל המאורעות היסודיים, המצביעים על תוצאה אחת מסוימת. לדוגמה,

המאורע: סכום הקוביות 12, והמאורע: מכפלת שתי הקוביות 25.

- מאורעות שהסיכויים להתרחשותם הם $\frac{34}{36}$. קיימים 630 מאורעות כאלה.

לדוגמה, המאורע: סכום שתי הקוביות בין 1 ל-12 (לא כולל), והמאורע: מכפלת שתי הקוביות שונה מ-2.

יש להסב את תשומת לב התלמידים לכך כי מאורעות הינם שונים אם הם מביאים לתוצאות שונות ולא בשל תיאורם השונה. למאורע אחד ייתכנו שני תיאורים שונים, לדוגמה, שני המאורעות: "לפחות אחת הקוביות מראה מספר זוגי" ו"מכפלת המספרים המופיעים בשתי הקוביות היא זוגית", הם מאורעות זהים, וכמובן שהסתברויותיהם שוות.

שאלה זו מתייחסת לערכי פונקציית ההסתברות השונים, כאשר הערך הנמוך ביותר הוא 0, והערך הגבוה ביותר הוא 1. התלמידים גם רואים כי ישנם מקרים בהם במרחב המדגם ישנם מאורעות שונים, אשר להם הסתברויות שוות.

שאלה 2. לפניכם חמישה מאורעות הקשורים בהטלת מטבע 20 פעמים. סדרו את המאורעות הבאים על פי הסדר הבא: מהמאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר, למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר. הסבירו את תשובתכם.

סדר המאורעות, החל במאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר ועד למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר, הוא: ד, א, ג, ה, ב.
במשימה זו פוגשים התלמידים במאורעות להם ערכי הסתברות שונים, כולל המקרים הקיצוניים 0 ו-1, ומכירים את השמות השונים המתאימים למאורעות אלה: מאורע בלתי-אפשרי, מאורע אפשרי ומאורע ודאי.
א. יתקבל "גב" בכל ההטלות.

מאורע א' הוא מאורע אפשרי, אך הסתברותו מאוד נמוכה: $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

ההסתברות כי בהטלה בודדת יתקבל "גב" היא $\frac{1}{2}$. תוצאת כל אחת מההטלות איננה תלויה בתוצאות ההטלות הקודמות, ולכן ההסתברות כי בכל 20 ההטלות יתקבל "גב" שווה למכפלה של ההסתברות של המאורע "בהטלה בודדת יתקבל "גב" 20 פעמים.

ב. יתקבל "פנים" מספר שלם של פעמים.

מאורע ב' הוא מאורע ודאי, שהסתברותו 1.

ג. יתקבל "גב" ב- 10 הטלות בדיוק.

מאורע ג' הוא מאורע אפשרי, שהסתברותו

$$(20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 19 \cdot 20) \cdot \left[\begin{matrix} 20 \\ 10 \end{matrix} \right] \cdot 0.5^{20} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} \cdot 0.5^{20} \approx 0.176$$

ניתן גם לתת הסבר אינטואיטיבי להסתברות הנמוכה של מאורע ג'. ההסתברות כי מאורע ג' יתרחש קרובה להסתברויות כי יתרחשו המאורעות הבאים: "יתקבל "גב" ב- 11 הטלות בדיוק", "יתקבל "גב" ב- 9 הטלות בדיוק", "יתקבל "גב" ב- 12 הטלות בדיוק" וכו'. בגלל שמאורעות אלה זרים זה לזה, ההסתברות של כל אחד מהם קטנה (כי סכום ההסתברויות של כל המאורעות הזרים הוא 1).

מאורע ג' - הסתברותו חיובית (גדולה מאפס), למרות הסבירות הנמוכה להתרחשותו. ישנם תלמידים המייחסים למאורעות שסבירות התרחשותם נמוכה מאוד - הסתברות אפס, מכיוון שאינם מאמינים כי מאורע זה יכול להתרחש. לעומתם, ישנם תלמידים המייחסים למאורע זה הסתברות חצי, מתוך אי הבנה שמספר התוצאות האפשריות בהטלת מטבע 20 פעמים איננו 2 אלא 21 (למשל, 3 פעמים "גב" ו- 17 פעמים "פנים"), וההסתברויות לתוצאות שונות - שונות זו מזו.

ד. יתקבל "גב" או "פנים" יותר מ- 20 פעמים.

מאורע ד' הוא מאורע בלתי-אפשרי, שהסתברותו 0.

ה. יתקבל "גב" יותר פעמים מאשר יתקבל "פנים".

מאורע ה' הוא מאורע אפשרי, שהסתברותו כ- 0.412.

ישנם שלושה מאורעות זרים המשלימים זה את זה למאורע הוודאי:

i. יתקבל "גב" יותר פעמים מאשר יתקבל "פנים".

ii. יתקבל "גב" פחות פעמים מאשר יתקבל "פנים".

iii. יתקבל "גב" ב- 10 הטלות בדיוק.

ההסתברות לשני המאורעות הראשונים היא שווה, בשל היות המטבע סימטרי. המאורע השלישי הוא מאורע ג' לעיל, שהסתברותו חושבה כ- 0.176. לכן, ההסתברות לקבלת מספר שונה של תוצאות "גב" או "פנים" (יותר "גב" או יותר "פנים") היא $1 - 0.176 = 0.824$. ההסתברות למאורע ה' היא, על כן, חצי מתוצאה זו: $0.412 = 2 : (1 - 0.176)$.

שאלה 3. לפניכם חמישה מאורעות הקשורים בהטלת מטבע 200 פעמים. סדרו את המאורעות הבאים על פי הסדר הבא: מהמאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר, למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר. הסבירו את תשובתכם.

סדר המאורעות, החל במאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר ועד למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר, הוא: ד, א, ג, ה, ב.
במשימה זו יכולים התלמידים להיווכח באילו מקרים משפיע מספר הטלות המטבע על הסתברות המאורע (וכיצד), ובאילו מקרים אין השפעה של מספר ההטלות על התוצאה.
א. יתקבל "גב" בכל ההטלות.

מאורע א' הוא מאורע אפשרי, אך הסתברותו מאוד נמוכה: $\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$.

ההסתברות כי בהטלה בודדת יתקבל "גב" היא $\frac{1}{2}$. תוצאת כל אחת מההטלות איננה תלויה בתוצאות ההטלות הקודמות, ולכן ההסתברות כי בכל 200 ההטלות יתקבל "גב" שווה להכפלה של ההסתברות של המאורע "בהטלה בודדת יתקבל "גב" 200 פעמים.
ההסתברות כאן קטנה מההסתברות שהייתה למאורע א' בשאלה הקודמת. בעוד שם חצי נכפל בעצמו 20 פעם, כאן הוא מוכפל בעצמו 200 פעם, כאשר כל הכפלה בחצי מביאה לתוצאה קטנה יותר.

ב. יתקבל "פנים" מספר שלם של פעמים.

מאורע ב' הוא מאורע ודאי, שהסתברותו 1.

ג. יתקבל "גב" ב- 100 הטלות בדיוק.

מאורע ג' הוא מאורע אפשרי, שהסתברותו

$$\left[\begin{matrix} 200 \\ 100 \end{matrix} \right] \cdot 0.5^{200} = \frac{200!}{100! \cdot 100!} \cdot 0.5^{200} \approx 0.056$$

ההסתברות כי מאורע ג' יתרחש קרובה להסתברויות כי יתרחשו המאורעות הבאים:
"יתקבל "גב" ב- 101 הטלות בדיוק", "יתקבל "גב" ב- 99 הטלות בדיוק", "יתקבל "גב" ב- 102 הטלות בדיוק" וכו'. היותם של מאורעות אלה זרים זה לזה, גורמת לכך כי ההסתברות של כל אחד מהם קטנה (כי סכום ההסתברויות של כל המאורעות הזרים הוא 1).

מאורע ג' - הסתברותו חיובית (גדולה מאפס), למרות הסבירות הנמוכה להתרחשותו. ישנם תלמידים המייחסים למאורעות שסבירות התרחשותם נמוכה מאוד - הסתברות אפס, מכיוון שאינם מאמינים כי מאורע זה יכול להתרחש. לעומתם, ישנם תלמידים המייחסים למאורע

זה הסתברות חצי, מתוך אי הבנה שמספר התוצאות האפשריות בהטלת מטבע 20 פעמים איננו 2. כדאי לשים לב שההסתברות למאורע זה נמוכה מההסתברות למאורע ג' בשאלה הקודמת. ההסתברות הנמוכה יותר נובעת מכך שזהו מאורע בודד מתוך 201 מאורעות אפשריים (למשל, 3 פעמים "גב" ו- 197 פעמים "פנים"), בעוד שבשאלה הקודמת היה מדובר על מאורע בודד מתוך 21 מאורעות.

ד. יתקבל "גב" או "פנים" יותר מ- 20 פעמים.

מאורע ד' הוא מאורע בלתי-אפשרי, שהסתברותו 0.

ה. יתקבל "גב" יותר פעמים מאשר יתקבל "פנים".

מאורע ה' הוא מאורע אפשרי, שהסתברותו כ- 0.472.

ישנם שלושה מאורעות זרים המשלימים זה את זה למאורע הוודאי:

i. יתקבל "גב" יותר פעמים מאשר יתקבל "פנים".

ii. יתקבל "גב" פחות פעמים מאשר יתקבל "פנים".

iii. יתקבל "גב" ב- 100 הטלות בדיוק.

ההסתברות לשני המאורעות הראשונים היא שווה, בשל היות המטבע סימטרי. המאורע השלישי הוא מאורע ג' לעיל, שהסתברותו חושבה כ- 0.056. לכן, ההסתברות לקבלת מספר שונה של תוצאות "גב" או "פנים" (יותר "גב" או יותר "פנים") היא $1 - 0.056 = 0.944$. ההסתברות למאורע ה' היא, על כן, חצי מתוצאה זו: $0.472 = 2 : (1 - 0.056)$.

שאלה 4. לפניכם חמישה מאורעות הקשורים בהטלת מטבע 1,000 פעמים. סדרו את המאורעות הבאים על פי הסדר הבא: מהמאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר, למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר. הסבירו את תשובתכם.

סדר המאורעות, החל במאורע שהסתברותו הנמוכה ביותר ועד למאורע שהסתברותו הגבוהה ביותר, הוא: ד, א, ג, ה, ב.

במשימה זו יכולים התלמידים להיווכח באילו מקרים משפיע מספר הטלות המטבע על הסתברות המאורע (וכיצד), ובאילו מקרים אין השפעה של מספר ההטלות על התוצאה.

א. יתקבל "גב" בכל ההטלות.

$$\text{מאורע א' הוא מאורע אפשרי, אך הסתברותו מאוד נמוכה: } \left(\frac{1}{2}\right)^{1000}.$$

כדאי לשים לב לכך שהסתברות זו קטנה מההסתברויות של מאורע א' בשאלות הקודמות. ככל שמספר ההטלות החוזרות גדל, כך קטנה ההסתברות שאותה תוצאה תחזור על עצמה מספר כה גדול של פעמים.

ב. יתקבל "פנים" מספר שלם של פעמים.

מאורע ב' הוא מאורע ודאי, שהסתברותו 1.

כדאי לשים לב שבכל שלוש השאלות מאורע ב' הוא מאורע ודאי.

ג. יתקבל "גב" ב- 500 הטלות בדיוק.

$$\text{מאורע ג' הוא מאורע אפשרי, שהסתברותו } 0.025 \approx 0.5^{1000} \cdot \left[\frac{1000}{500}\right].$$

כדאי לשים לב לכך שההסתברות למאורע זה נמוכה מההסתברות למאורע ג' בשאלות הקודמות. ההסתברות הנמוכה יותר נובעת מכך שזהו מאורע בודד מתוך 1001 מאורעות אפשריים, בעוד שבשאלות הקודמות היה מדובר על מאורע בודד מתוך 21 או מתוך 201 מאורעות.

ד. יתקבל "גב" או "פנים" יותר מ- 1,000 פעמים.

מאורע ד' הוא מאורע בלתי-אפשרי, שהסתברותו 0.

כדאי לשים לב לכך שבכל שלוש השאלות מאורע ד' הוא מאורע בלתי-אפשרי.

ה. יתקבל "גב" יותר פעמים מאשר יתקבל "פנים".

מאורע ה' הוא מאורע אפשרי, שהסתברותו כ- 0.49.

מאורע ה' משלים את המאורע "יתקבל "גב" פחות פעמים מאשר יתקבל "פנים" או: "יתקבל "גב" אותו מספר פעמים שיתקבל "פנים" (כלומר, 500 פעמים)". מאורע זה הוא איחוד של שני מאורעות זרים: "יתקבל "גב" פחות פעמים מאשר יתקבל "פנים" - שהסתברותו שווה להסתברות של מאורע ה', ושל מאורע ג' שהסתברותו שווה ל- 0.025. לכן, ההסתברות של מאורע ג' היא: $0.487 = 2 \cdot (1 - 0.025)$.