

אולימפיאדת מדעי המחשב תשע"א – תשובות לשאלות שלב א'

שאלה 1 – מספר תת-מחרוזות

תשובה עבור מחרוזת 1: 14 תשובה עבור מחרוזת 2: 9

הסבר: כל C "פותח" בדיוק תת-מחרוזות אחת מהסוג הנדרש, חוץ משני ה-C האחרונים. לכן, מספר התת-מחרוזות שווה למספר ה-C-ים הכולל פחות 2.

שאלה 2 – מספר מינימלי

תשובה לסעיף 1: 257 תשובה לסעיף 2: 22

הסבר: יש למיין את המספרים לסדרה עולה; ואז, ניתן לראות שעם 1 ו-2 ניתן ליצור את 1, 2, 3. המספר 4 ישנו בסדרה, ואותו אפשר לחבר לכל המספרים שכבר הצלחנו ליצור, ולכן אפשר "להאריך את רצף הייצור" עד (וכולל) 7. עתה, אם המספר הבא הסדרה הוא בגודל 8 או פחות, ניתן להמשיך להאריך את רצף הייצור. המספר 7 ישנו בסדרה, ואפשר לחבר אותו לכל המספרים שכבר הצלחנו ליצור; לכן, נוכל להאריך את רצף הייצור עד 14; וכך הלאה – בעזרת ה-14 הנתון ניתן להאריך את רצף הייצור עד 28, בעזרת ה-22 הנתון ניתן להאריך עד 50, בעזרת ה-29 – עד 79, בעזרת ה-80 – עד 159, ובעזרת ה-97 – עד 256. המספר הבא שישנו איננו קטן מ-257 או שווה לו, אלא 258. לכן, אי אפשר ליצור את 257.

בסעיף 2, ניתן לראות שניתן להאריך את רצף הייצור ל-28 ללא שימוש ב-22. 29 נתון, וממנו ניתן להתקדם הלאה. לכן, נוכל להחליף את 22 ב-44 ולהאריך את טווח הייצור למרחק גדול יותר. (הכפלה של אחד מן המספרים האחרים, במקום 22, תקטע את "רצף הייצור" מוקדם יותר.)

שאלה 3 – תת-קבוצה בגודל מירבי

תשובה לסעיף 1: 15 תשובה לסעיף 2: 36

הסבר: כדאי למיין את המספרים, ואז להפריד אותם ל"שרשראות" של מספרים, כך שכל מספר בשרשרת הינו פי-שנים מקודמו בשרשרת. חלק מן השרשראות יכללו כמה מספרים (כגון השרשרת 9, 18, 36, 72, והשרשרת 5, 10, 20) וחלק מן השרשראות יכללו מספר אחד בלבד (כגון 31). ניתן לשים לב, שכל מספר אי-זוגי מתחיל שרשרת נפרדת; ומספר זוגי עשוי להתחיל שרשרת (למשל 8) או להמשיך שרשרת קיימת. לקבלת התשובה לסעיף 1, ניקח מספר אחד מכל שרשרת שבה מספר אחד בלבד, או שבה שני מספרים; ומכל שרשרת גדולה יותר ניקח מספרים לסירוגין (כך שלמשל מהשרשרת: 9, 18, 36, 72 ניקח את 9 ו-36). ישנן 12 שרשראות; מ-9 מהן ניתן לקחת רק מספר אחד ומ-3 מהן ניתן לקחת שני מספרים; לכן התשובה היא 15.

בסעיף 2, ניתן לראות שמשרשראות באורך זוגי יש יותר מאפשרות בחירה אחת. משרשראות באורך 2 יש שתי אפשרויות בחירה (הראשון או השני), ומשרשראות באורך 4 יש שלוש אפשרויות בחירה (למשל, מ: 9, 18, 36, 72, ניתן לקחת את 9 ו-36, או את 18 ו-72, או את 9 ו-72). ישנן 4 שרשראות באורך זוגי, שתיים באורך 2 ושתיים באורך 4, לכן התשובה היא $2 \times 2 \times 3 \times 3$, כלומר 36.

שאלה 5 – כובעים

כל אחד יפעיל חוק אחר. יוסי יביט בכובע של לילך וינחש את הצבע שהוא רואה; ולילך תביט בכובע של יוסי ותנחש את ההיפך מן הצבע שהיא רואה. כך, אחד מהם לבטח ינחש נכון, והשני לבטח יטעה. הסיבה לכך היא שישנן בסך-הכל 4 אפשרויות לשילובי הצבעים, והניחוש של כל אחד מהם "מכסה" שתיים אחרות מהן (יוסי ינחש נכון בשני המקרים בהם שני הכובעים באותו הצבע, ולילך תנחש נכון בשני המקרים בהם שני הכובעים בצבעים שונים).

שאלה 4 – שחזור קוד

א. התשובה לסעיף זה היא 401.

הסבר

הקודים ששכום הספרות בהם הוא 10 מתחלקים ל-4 קבוצות: אלו שהספרה האחרונה בהם היא 1, אלו שהספרה האחרונה בהם היא 2, אלו שבהם היא 3 ואלו שבהם היא 4. כל קוד ששכום ספרותיו 10 ומסתיים בספרה 1 הוא בעצם קוד ששכום ספרותיו 9 שהוסיפו לו בסוף את הספרה 1. בדומה, כל קוד ששכום ספרותיו 10 ומסתיים בספרה 2 הוא בעצם קוד ששכום ספרותיו 8 שהוסיפו לו בסוף את הספרה 2; קוד שמסתיים בספרה 3 מורכב מקוד ששכום ספרותיו 7 שהוסיפו לו 3; וקוד שמסתיים בספרה 4 הוא קוד ששכום ספרותיו 6 שהוסיפו בסופו את הספרה 4. (לדוגמא, את הקוד 12313 אפשר לראות בתור הקוד 1231, ששכומו 7, שהוסיפו את הספרה 3 בסופו.)

לכן, מספר הקודים ששכום ספרותיהם הוא 10 שווה למספר הקודים ששכום ספרותיהם 9, ועוד מספר הקודים ששכום ספרותיהם 8, ועוד מספר הקודים ששכום ספרותיהם 7 ועוד מספר הקודים ששכום ספרותיהם 6.

ננסה זאת באמצעות נוסחה רקורסיבית:

$$F(10)=F(9)+F(8)+F(7)+F(6)$$

כאשר $F(N)$ מסמן את מספר הקודים ששכום ספרותיהם הוא N .

למעשה, אין דבר מיוחד בשכום הספרות 10. כלומר, לכל מספר A , גדול מ-4 מתקיים:

$$F(A)=F(A-1)+F(A-2)+F(A-3)+F(A-4)$$

את ארבעת ערכי הבסיס של F ניתן לחשב בנוסחה, שחלקה רקורסיבית וחלקה מספר מפורש, כמתואר להלן. החלק המפורש (+1) נגזר מן המקרה של ספרה בודדת שיוצרת את הקוד.

$$F(4)=F(3)+F(2)+F(1)+1$$

$$F(3)=F(2)+F(1)+1$$

$$F(2)=F(1)+1$$

$$F(1)=1$$

ובסה"כ, כדי לחשב את התשובה, נמלא את השורה הבאה משמאל לימין:

F(1)	F(2)	F(3)	F(4)	F(5)	F(6)	F(7)	F(8)	F(9)	F(10)
1									

מילוי הטבלה יעשה על-פי הנוסחאות לעיל. הנה הטבלה באופן חלקי:

F(1)	F(2)	F(3)	F(4)	F(5)	F(6)	F(7)	F(8)	F(9)	F(10)
1	2	4	8	15	29	56			

אם נמשיך למלא את הטבלה משמאל לימין (כלומר, קודם כל את הערך של $F(8)$, אז את $F(9)$ ולבסוף את $F(10)$), נקבל את התשובה בתור הערך של $F(10)$ (כדאי לנסות לחשב כדי לוודא שהבנתם; התשובה שתקבלו אם תחשבו נכון היא 401).

הערה: כתיבת הפתרון בצורה של נוסחה כמו $F(A)=F(A-1)+F(A-2)+F(A-3)+F(A-4)$ המאפשרת לחשב את התשובה על-ידי פתרון בעיות דומות אך "קטנות יותר" נקרא "פתרון ברקורסיה". שימוש בשורה או טבלה כדי לחשב את הפתרון לפי נוסחת הרקורסיה באופן שיטתי (ויעיל) נקרא "פתרון בתכנון דינמי".

הערה: במהלך החישוב יש לחשב כל מספר בטבלה כשכום של ארבעה מספרים אחרים. אפשר לחסוך בחישובים אם משתמשים בנוסחת רקורסיה פשוטה יותר: $F(A)=2 \cdot F(A-1)-F(A-5)$ לכל A גדול מ-5. (מדוע גם נוסחת רקורסיה זו פותרת נכון את הבעיה?)

ב. התשובה לסעיף זה היא: 44.

הסבר

מכיוון שהמספרים המעורבים בחישוב לא מאד גדולים, ניתן היה להגיע לתשובה גם ללא פתרון מסודר ויעיל באמצעות ניסוי וטעייה. אפשר גם למצוא נוסחה מתמטית לחישוב הפתרון, אך זה לא פשוט.

לעומת זאת, נציג כאן פתרון מסודר ויעיל אשר רלוונטי גם אם סכום הספרות המבוקש היה גדול בהרבה. השיקולים יהיו דומים לאלו שבסעיף א', אך מעט מורכבים יותר.

הקודים בני 4 ספרות שסכום ספרותיהם 10 נחלקים ל – 4 קבוצות, לפי הספרה האחרונה בהם, שיכולה להיות 1, 2 או 3. כל קוד כזה, אם הוא מסתיים בספרה 1 אז הוא בעצם קוד של 3 ספרות שסכום ספרותיו 9 שהוסיפו לו את הספרה 1. אם הוא מסתיים בספרה 2 אז הוא בעצם קוד של 3 ספרות שסכום ספרותיו 8 שהוסיפו לו את הספרה 2. בדומה, את מסתיים ב – 3 אז הוא קוד של 3 ספרות עם סכום 7 שהוסיפו לו 3, ואם מסתיים ב – 4, אז הוא קוד של 3 ספרות עם סכום 6 שהוסיפו לו 4. (לדוגמא, את הקוד בעל 4 ספרות וסכום 10-2314, אפשר לראות בתור הקוד 231 שהוא בעל 3 ספרות וסכום 6 שהוסיפו את הספרה 4 בסופו.)

שוב נכתוב נוסחה רקורסיבית, אך הפעם לה שני פרמטרים – מספר ספרות וסכום ספרות (לעומת הפרמטר היחיד – סכום ספרות – בסעיף הקודם). נסמן ב – $G(D,S)$ את מספר הקודים בעלי D ספרות בדיוק שסכום ספרותיהם S. אז מהדיון המופיע בפסקה הקודמת נוכל להסיק ש:

$$G(4,10) = G(3,9) + G(3,8) + G(3,7) + G(3,6)$$

ובאופן יותר כללי, מכיוון שאין שום דבר מיוחד בסכום 10, לכל מספר S גדול מ-4, ולכל D גדול מ-1, מתקיים:

$$G(D,S) = G(D-1,S-1) + G(D-1,S-2) + G(D-1,S-3) + G(D-1,S-4)$$

לכן כדי לחשב את התשובה נמלא את הטבלה הבאה:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	2	3						
3	0	0	1	3						
4	0	0	0	1						

כאשר בתא שנמצא בעמודה ה – i ובשורה ה – j יופיע הערך של $G(j,i)$. חלק מן הערכים חישובנו ישירות וכתבנו בטבלה (וודאו מדוע אלו הערכים הנכונים). אם תמשיכו לחשב לפי נוסחת הרקורסיה תקבלו את התשובה בתא הנמצא בעמודה ה – 10 בשורה ה – 4 (מדוע?). את החישוב יש לעשות שורה אחר שורה, מלמעלה למטה, כאשר בכל שורה מחשבים את הערכים משמאל לימין. סדר חישוב זה מבטיח שבבואנו לחשב ערך מסוים, יהיו בידנו בטבלה כל הערכים הנחוצים לשם כך. השלמת החישוב תוביל לתשובה הסופית: $G(4,10) = 44$.