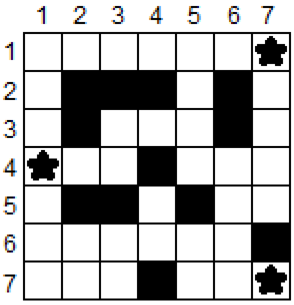
פתרון מבחן שלב א׳ של אולימפיאדת מדעי המחשב תשע״ב

***שאלה 1 (15 נק׳)* – נקודות מפגש**

שלושה רובוטים נמצאים על משבצות שונות של לוח משבצות, הנתון להלן. המיקום ההתחלתי של כל אחד מהרובוטים מסומן על הלוח באמצעות כוכב. מעוניינים להפגיש את שלושת הרובוטים באותה המשבצת, באמצעות סדרה של צעדים. צעד של כל אחד משלושת הרובוטים הוא הזזתו למשבצת סמוכה אנכית או אופקית (למעלה/למטה/ימינה/שמאלה). אסור להזיז רובוט למשבצת שחורה או להוציאו מהלוח. בכל זמן מותר שיהיה על משבצת יותר מרובוט אחד. המטרה היא להפגיש את שלושת הרובוטים באותה המשבצת תוך מספר כולל קטן ככל האפשר של צעדים.



א. מהו מספר הצעדים הכולל הקטן ביותר כדי להפגיש את הרובוטים בציור לעיל במשבצת אחת?
(נדגיש: כל צעד של אחד הרובוטים מגדיל את מספר צעדים הכולל ב-1.)

תשובה: 15

ב. מהן המשבצות שבהן ניתן להפגיש את הרובוטים תוך מספר זה של צעדים?

תשובה:

	שורה	עמודה
נקודת מפגש 1	3	5
נקודת מפגש 2	4	6
נקודת מפגש 3	6	6
נקודת מפגש 4		
נקודת מפגש 5		

רעיון הפתרון: הדרך המתאימה להגיע לפתרון היא על-ידי התקדמות במתכונת "מניפה" מכל אחת מנקודות המוצא בנפרד, תוך רישום המרחק הקצר ביותר של כל משבצת בלוח מכל רובוט. בכל משבצת נסכם את המרחקים משלושת הרובוטים, והתשובה תכלול את המשבצות שבהן הסכום מינימלי. (בחישוב ידני, ניתן לקצר את התהליך במקצת, תוך הימנעות מחישוב עבור משבצות שניתן מיד לראות שאינן רלוונטיות.)

שאלה 2 (15 נק') – מספר פעולות חשבון

נתונות שתי פעולות החשבון: +1, ×2. המטרה היא להגיע מן המספר **10** לכל אחד משני המספרים הבאים באמצעות שימוש חוזר בפעולות החשבון הנתונות. מהו המספר הקטן ביותר של פעולות הנדרש להשגת המטרה עבור כל אחד מן המספרים הבאים? **417** ו- **794**

למשל, כדי להגיע ל-**21**, מספיקות שתי פעולות חשבון: תחילה ×2 ואחר-כך +1. כדי להגיע ל-**24** מספיקות שלוש פעולות חשבון: +1, +1, ואז ×2 (אם מכפילים ב-2 תחילה, אזי מספר הפעולות שיידרש הינו 5: ×2, +1, +1, +1, +1).

תשובה עבור 417: 9

תשובה עבור 794: 11

רעיון הפתרון: חישוב לאחור. כלומר, הגעה מכל אחד מן המספרים אחורה ל-10, על-ידי פעולות של חיסור 1 וחלוקה ב-2.

שאלה 3 (30 נק') – מספר סדרות לא-יורדות

נתונה הסדרה S הבאה, ובה 10 מספרים:

420 396 374 350 320 250 194 146 96 50

אנו מעוניינים לחשב את מספר הסדרות הלא-יורדות (כל מספר שווה או גדול מקודמו) של <u>11</u> מספרים שלמים חיוביים אשר <u>בכל אחת מהן</u>: הממוצע של זוג המספרים הראשון (המספרים הראשון והשני) הוא המספר הראשון ב-S, הממוצע של זוג המספרים השני (המספרים השני והשלישי) הוא המספר השני ב-S, וכך הלאה. (הממוצע של זוג המספרים האחרון (המספרים ה-10 וה-11) הוא המספר ה-10 ב-S.)

למשל, עבור הסדרה 'S הבאה בת 4 מספרים: **12 10 7 4** התשובה היא: 3.

כיון שניתן ליצור אותה מכל אחת מ-3 הסדרות הבאות בנות 5 מספרים:

14 10 10 4 4 (הממוצע של **4** ו-**4** הוא **4**, הממוצע של **4** ו-**10** הוא **7**, וכך הלאה)

12 12 8 6 2

13 11 9 5 3

א. מהו מספר הסדרות הלא-יורדות עבור הסדרה S הנתונה לעיל? **תשובה: 15**

ב. האם שינוי של המספר **350** ב-S יכול להגדיל את התשובה לסעיף א'? **כן**

אם כן, לאיזה מספר היית משנה את **350** כדי להגדיל התשובה ל-א' באופן מירבי? **354**

ג. האם שינוי של המספר **320** ב-S יכול להגדיל את התשובה לסעיף א'? **כן**

אם כן, לאיזה מספר היית משנה את **320** כדי להגדיל התשובה ל-א' באופן מירבי? **כל מספר בין 306 ל-316 הינו תשובה נכונה.**

רעיון הפתרון: דרך מתאימה לפתור את הבעיה היא על ידי הליכה משמאל לימין עם <u>תחום מספרים רציף</u>, אשר "מוטל בשיקוף" מסביב לכל מספר בסדרה הנתונה, ומתכווץ ככל שמתקדמים. כלומר, כל מספר בסדרה הנתונה משמש כ"ציר שיקוף". תחילה התחום הוא בגודל אינסופי. אחרי ה-50 גודלו 47 (מ-50 ל-96), וכך גם אחרי ה-96: מ-96 ל-<u>142</u>. אחרי ה-146 גודלו קטן ל-45, כיון ש"הטלתו בשיקוף" סביב 146 מובילה לתחום מ-150 ל-194. "הטלתו הבאה בשיקוף", מסביב ל-194 כציר, מובילה לתחום מ-194 ל-238, ו"הטלתו" הבאה, מסביב ל-250, מובילה לתחום מ-262 ל-306. "ההטלה" הבאה, סביב 320, מובילה לתחום המצומצם בהרבה, בגודל 17: מ-334 ל-350, וכך הלאה. בסוף התהליך נותר תחום בגודל 15. כל מספר בתחום זה מסיים סדרה לא-יורדת אחרת. בתשובות לסעיפים ב' ו-ג' יש לבחון כיצד ניתן לדאוג לכיווץ מינימלי של התחום, בתהליך המתואר, כך שכל אחד מן המספרים 350 ו-320 ישמש כציר "שיקוף" שיקטין פחות עד כמה שאפשר את התחום.

שאלה 4 (25 נק') – מספר דרכים שונות

א. נתון סולם שבו **10** שלבים. אדם מעוניין לטפס על הסולם, כך שהוא מתחיל בתחתיתו (מתחת לשלב הראשון), ובכל צעד הוא עולה שלב אחד, או שני שלבים, או שלושה שלבים. כמה *דרכים שונות* של טיפוס קיימות כדי להגיע לשלב העשירי?

למשל, עבור סולם שבו רק **4** שלבים התשובה היא: 7.

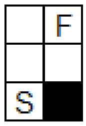
שבעת הדרכים הן: 1+1+1+1 (כלומר, ארבעה צעדים בגודל 1), 2+1+1 (כלומר, שני צעדים ראשונים בגודל 1, וצעד אחרון בגודל 2), 1+2+1 (כלומר, צעד בגודל 1, צעד בגודל 2, ועוד צעד בגודל 1), 2+1+1, 2+2, 1+3, 3+1.

תשובה: 274

רעיון הפתרון: מספר הדרכים להגיע לשלב כשלהוא (החל מן השלב הרביעי) שווה למספר הדרכים להגיע לשלב שלפני ואז לבצע צעד בגודל 1, או לשלב שהוא שני שלבים לפני ואז לבצע צעד בגודל 2, או לשלב שהוא שלושה שלבים לפני ואז לבצע צעד בגודל 3. יש דרך טיפוס אחת לעלות לשלב 1, שתי דרכים לטפס עד שלב 2, ארבע דרכים לעלות עד שלב 3, ואז: 4+2+1=7 דרכים לעלות עד שלב 4, 7+4+2=13 דרכים לעלות עד שלב 5, 13+7+4 דרכים לעלות עד שלב 6, וכך הלאה.

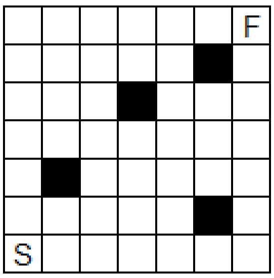
ב. רובוט נמצא בפינה השמאלית-תחתונה של לוח משבצות ועליו להגיע לפינה הימנית-עליונה. הרובוט יכול לנוע בכל צעד משבצת אחת ימינה או משבצת אחת למעלה. חלק ממשבצות הלוח שחורות. הרובוט לא יכול להיכנס למשבצת שחורה. יש לחשב את *מספר המסלולים השונים* בהם יכול הרובוט להגיע ממשבצת ההתחלה, המסומנת באות S, למשבצת הסיום, המסומנת באות F (מבלי לעבור דרך משבצות שחורות, ותוך תנועה ימינה ולמעלה בלבד).

למשל, עבור הלוח הבא:



התשובה היא: 2 (מסלול אחד: למעלה-למעלה-ימינה. מסלול שני: למעלה, ימינה, למעלה)

מהו מספר המסלולים השונים האפשריים עבור הלוח הבא?



תשובה: 160

רעיון הפתרון: מספר הדרכים השונות להגיע לכל משבצת שווה למספר הדרכים השונות להגיע לזו שמשמאלה (ואז לבצע צעד ימינה) ועוד מספר הדרכים השונות להגיע לזו שמתחתיה (ואז לבצע צעד למעלה). כך תיבנה התשובה מן החלק השמאלי התחתון של הלוח עד החלק הימני העליון.

שאלה 5 (15 נק') – מסירות במעגל

960 רובוטים מסודרים במעגל, וממוספרים עם כוון השעון (כך שהרובוט מספר 1 משמאלו של 960, כשפניו של 960 הם למרכז המעגל). הרובוטים מוסרים כדור, אשר נמצא בתחילת המשחק אצל רובוט 960. כל מסירה היא לרובוט שנמצא **675** עמדות קדימה עם כוון השעון. לכן המסירה הראשונה, שאותה מוסר 960, תגיע לרובוט 675, המסירה השנייה תגיע לרובוט 390 (המתקבל משארית החלוקה של 675+675 ב-960), השלישית תגיע לרובוט 105 (המתקבל משארית החלוקה של 675+390 ב-960), הרביעית תגיע ל- 780, וכך הלאה. אחרי כמה מסירות יחזור הכדור לרובוט 960?

למשל, אם היו רק **5** רובוטים במעגל, ומסירה היתה **2** עמדות קדימה, אזי הכדור שנמצא בתחילה אצל רובוט 5 היה חוזר אליו לאחר 5 מסירות (מ-5 ל-2, מ-2 ל-4, מ-4 ל-1, מ-1 ל-3, ומ-3 ל-5).

תשובה: 64

רעיון הפתרון: המחלק המשותף המקסימלי של שני המספרים הוא 15 (ניתן לראות זאת על-ידי חלוקתם תחילה ב-5 ואחר-כך ב-3, ואז להגיע לשני מספרים זרים – 64 ו-45). מנת החלוקה של 960 ב-15 היא 64 (ושל 675 – היא 45). לכן, המספר הקטן ביותר בו נכפיל את 675 כדי להגיע לכפולה של 960 הוא 64. (שימו לב ש: $960\times45=675\times64$)