אוסף
בעיות מתמטיות
עם רמזים
ופתרונות
מאת
ג'ורג' פוליה
וג'רמי קילפטריק

מאנגלית:
נצה מובשוביץ-הדר

ג'. פוליה, ג'. קילפטריק: אוסף בעיות מתמטיות, עם רמזים ופתרונות   הוצאת "קשר-חם", תשס"ז

אוסף
בעיות מתמטיות
עם רמזים
ופתרונות
מאת
ג'ורג' פוליה
וג'רמי קילפטריק

"כמה ילדים יש לך ובני כמה הם?" - שאל האורח את המורה למתמטיקה. "יש לי שלושה בנים" - ענה המורה - "מכפלת הגילים שלהם היא 72 וסכום הגילים הוא כמספר הבית בו אנו גרים".
האורח הלך להביט בשלט המואר שבכניסה לבית, חזר ואמר: "אי אפשר לפתור את הבעיה". "נכון" - אמר לו המורה - "אבל אני מקווה שכשבני הבכור ישרת בצבא - יהיה שלום".
בני כמה הבנים? - יש לנמק את התשובה.

המבחנים התחרותיים במתמטיקה לתלמידי בתי הספר התיכוניים מטעם אוניברסיטת סטנפורד שבקליפורניה התקיימו מדי שנה בשנה מ-1946 עד 1965. ספרון זה מציג לראשונה את עשרים קבצי הבעיות יחד עם רמזים ופתרונות לכולן. הבעיות - בעלות אופי מאתגר, הן כאלו שרק לעיתים נדירות מוצאים דוגמתן בספרי הלימוד. הן תוכננו לא רק כדי לבחון את מידת המקוריות בחשיבה של המתחרים, אלא גם כדי להעשיר את העשייה המתמטית של תלמידים ומוריהם.

פרופסור ג'ורג' פוליה (1985-1887) היה מתמטיקאי ממוצא הונגרי שהיגר לארה"ב ב-1940. את רוב שנותיו בארה"ב עשה באוניברסיטת סטנפורד, הוא היה מתמטיקאי בעל שם בינלאומי ומורה בחסד עליון. באמצעות ההוראה והספרים המיוחדים שכתב, השפיע פוליה על שלושה דורות של סטודנטים. אחד מהם, ג'רמי קילפטריק, התחיל את דרכו כחוקר בחינוך מתמטי באוניברסיטת קולומביה, עבר לאוניברסיטת סטנפורד וכיום הוא פרופסור באוניברסיטה של ג'ורג'יה. הוא ניהל סמינרים על דרכים לפתרון בעיות בהשראת מורו ורבו.

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
"קשר-חם" - המרכז הארצי
לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי

1986-2006
קשר חם
שנת העשרים

אוסף בעיות מתמטיות
עם רמזים ופתרונות

מאת
ג׳ורג׳ פּוֹליה וג׳רמי קילפטריק

מאנגלית:
נצה מובשוביץ-הדר

אוסף בעיות מתמטיות עם רמזים ופתרונות
מאת
ג'ורג' פוליה וג'רמי קילפטריק

"כמה ילדים יש לך ובני כמה הם?" – שאל האורח את המורה למתמטיקה.
"יש לי שלושה בנים" – ענה המורה – "מכפלת הגילים שלהם היא 72 וסכום הגילים הוא כמספר הבית בו אנו גרים".
האורח הלך להביט בשלט המואר שבכניסה לבית, חזר ואמר: "אי אפשר לפתור את הבעיה". "נכון" – אמר לו המורה - "אבל אני מקווה שכשבני הבכור ישרת בצבא – יהיה שלום".
בני כמה הבנים? – יש לנמק את התשובה.

המבחנים התחרותיים במתמטיקה לתלמידי בתי הספר התיכוניים מטעם אוניברסיטת סטנפורד שבקליפורניה התקיימו מדי שנה בשנה מ1946 עד 1965. ספרון זה מציג לראשונה את עשרים קבצי הבעיות יחד עם רמזים ופתרונות לכולן. הבעיות – בעלות אופי מאתגר, הן כאלו שרק לעיתים נדירות מוצאים דוגמתן בספרי הלימוד. הן תוכננו לא רק כדי לבחון את מידת המקוריות בחשיבה של המתחרים, אלא גם כדי להעשיר את העשייה המתמטית של תלמידים ומוריהם.

פרופסור **ג'ורג' פוליה** 1887-1985 היה מתמטיקאי ממוצא הונגרי שהיגר לארה"ב ב-1940. את רוב שנותיו בארה"ב עשה באוניברסיטת סטנפורד, הוא היה מתמטיקאי בעל שם בינלאומי ומורה בחסד עליון. באמצעות ההוראה והספרים המיוחדים שכתב, השפיע פוליה על שלושה דורות של סטודנטים. אחד מהם, **ג'רמי קילפטריק**, התחיל את דרכו כחוקר בחינוך מתמטי באוניברסיטת קולומביה, עבר לאוניברסיטת סטנפורד וכיום הוא פרופסור באוניברסיטה של ג'ורג'יה. הוא ניהל סמינרים על דרכים לפתרון בעיות בהשראת מורו ורבו.

1986-2006
קשר חם
שנת העשרים

הטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
"**קשר-חם**" – המרכז הארצי
לקידום, שיפור ורענון החינוך המתמטי

זהו תרגום לעברית של:

The Stanford Mathematics Problem Book With Hints and Solutions,

George Pólya, Stanford University

Jeremy. Kilpatrick, Teachers College, Columbia University

Teachers College Press, Teachers College, Columbia University, New York & London, 1974

תרגום מאנגלית:

נצה מובשוביץ-הדר 1976.

עובד מחדש והובא לדפוס ברשות המו"ל, תשס"ז, 2007.
סייעו בהכנת המהדורה העברית:
גב' חגית ליאב, ד"ר בוריס קויצ'ו וד"ר אלה שמוקלר.

הודפס בישראל ומופץ על-ידי "**קשר חם**" –
המרכז הארצי לקידום **ש**יפור **ו**רענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי,
הטכניון, חיפה 32000
http://kesher-cham.technion.ac.

תוכן העניינים

כותרת **עמוד**

<u>כותרת</u> **<u>עמוד</u>**

מבוא

במשך עשרים שנה, בין השנים 1946 ל-1965, ניהלה המחלקה למתמטיקה באוניברסיטת סטנפורד מבחן-תחרות לתלמידים בשנה האחרונה ללימודיהם התיכוניים. המטרה המיידית והמרכזית של המבחן הייתה לזהות, בקרב בוגרי כל שנה, תלמידים בעלי יכולת מובהקת ולמשוך אותם ללימודים בסטנפורד. המטרה הרחבה יותר הייתה לעורר עניין במתמטיקה בקרב תלמידי תיכון ומוריהם, וגם בציבור הרחב.

המבחן נבנה לאור המודל של תחרות אֶאוֹטְווֹש (מס. 23 ברשימה הביבליוגרפית שבסוף החוברת), שאורגנה בהונגריה ב-1894 ושימשה כמודל גם לתחרויות דומות באנגליה ובצרפת. גאבּור סְזֶגו, ראש המחלקה למתמטיקה בסטנפורד בשנת 1946 שזכה בתחרות אאוטווש בשנת 1912, יזם את המבחן בסטנפורד.

המבחן התקיים מתוך אמונה שביטוי פומבי של יכולת מתמטית מצביע באופן ברור על אינטליגנציה יוצאת דופן והתאמה למנהיגות אינטלקטואלית בכל תחום חקר. מעבר לזאת, יכולת מתמטית אפשר לבחון בגיל צעיר יחסית כי היא מתגלה לא כל כך הודות לכמות הידע המצטבר, אלא בעיקר הודות מקוריות החשיבה הנחשפת במהלך ההתמודדות עם פתרון בעיות קשות, אם כי אלמנטאריות.

כפי שבאק [1] ציין תוך כדי סקירת התחרויות המתמטיות, אפשר לתכנן מבחנים, כשמדובר באופן כוללני, כך שיבדקו הישגים או כשרון. מבחן התחרות של סטנפורד במתמטיקה נועד לבחון כשרון. הוא שם דגש על

> מקוריות ובוננות ולא על כישורים רוטיניים...שאלה אופיינית עשויה להצריך ידע מסוים שעומד לרשותם של הנבחנים, אבל תדרוש מהנבחנים לרתום אותו לשימוש בדרכים בלתי רגילות הדורשות רמה גבוהה של תחכום. הבעיה יכולה גם להציג מושגים מסוימים שהנבחן איננו מכיר אותם. בקיצור, התלמיד הזוכה צריך להראות יכולת חקירה. [1, עמ' 5-4-2]

המבחן הראשון של תחרות סטנפורד התקיים בשנת 1946 והשתתפו בו 322 תלמידים מ-60 בתי ספר על יסודיים בקליפורניה. הזוכה קיבל מענק שכר לימודים לשנה

באוניברסיטת סטנפורד. ציון לשבח וספר מתמטיקה הוענקו לשלושה משתתפים אחרים. ב-1953 הורחבה התחרות אל מחוץ לגבולות קליפורניה וכללה את אריזונה, אורגון וושינגטון. מספר המלגות הוגדל לשתיים ומספר הציונים לשבח והספרים הוגדל לכעשרה. מ-1958 עד 1962 ניתנה לתחרויות חסות משותפת של חברת סילבניה מוצרי חשמל בע״מ. המבחן האחרון ב-1965, הועבר לכ-1200 משתתפים ב-151 מרכזים בקליפורניה, אריזונה, איידהו, מונטנה, נבדה, אורגון וושינגטון. פרסים כספיים של 500$, 250$, 250$ הוענקו לשלושה זוכים. ציון לשבח וספר מתמטיקה הוענקו לשמונה-עשר משתתפים. התחרות הופסקה אחרי 1965, בעיקר מפני שהמחלקה למתמטיקה בסטנפורד שינתה את מוקד התעניינותה ללימודי המשך לקראת תארים גבוהים.

ההודעה על התחרות נשלחה בכל שנה לכל בתי הספר העל יסודיים, פרטיים וציבוריים בכל מדינה בה היא הייתה אמורה להתקיים. בתי ספר גדולים היוו מרכזי-מבחן, תלמידים מבתי ספר אחרים יכלו לבחור במקום נוח להם כדי להיבחן.

המבחן התנהל על-ידי מורים וצוות בית הספר בשבת אחר הצהריים בחודש מרץ או אפריל. הנבחנים קיבלו שלוש שעות כדי לנסות ולפתור בין 3 ל-5 בעיות. ההוראות היו כדלקמן:

> אין להשתמש בספרים או רשימות כלשהם. ייתכן שלא יהיה לך די זמן כדי לפתור את כל הבעיות בשלוש השעות, אבל עליך לעשות כל מאמץ כדי שכל פעולותיך ייעשו במחשבה קפדנית וזהירה. מותר להשתמש בעיפרון או בעט. אין לשאול שאלות הנוגעות למבחן את מי שמשגיח על התנהלות המבחן.
>
> איכות ההגשה קובעת!
> עליה להיות בהירה, שלמה ותמציתית.

דפי-התשובות נקראו בשני שלבים. בשלב ראשון על-ידי צוותים של סטודנטים לתואר גבוה במחלקה למתמטיקה, כולל במידת האפשר, כאלה שהם בעלי ניסיון בהוראת מתמטיקה בתיכון. לכל צוות של שני סטודנטים ניתנה בעיה אחת לבדיקה במספר גדול ככל שיכלו של דפי-תשובה. דפי-תשובה שהכילו מספר מינימאלי של פתרונות נכונים (למשל אחד וחצי או שניים מתוך ארבעה), או שהכילו משהו מאד מיוחד, הועברו לשלב הבדיקה השני. בשלב השני, כל דף-

תשובות שעמד בשלב הראשון נקרא על-ידי חבר סגל אחד לפחות מהמחלקה למתמטיקה בסטנפורד. אלה שנראו כבעלי סיכוי גבוה לזכות נקראו על-ידי כל חברי הסגל.

כדי להקל על בחירת הזוכים, תוכננו הבעיות כך שרק מספר קטן של משתתפים יוכל לפתור את כולן. מצד שני, כדי למנוע תסכול, הבעיה הראשונה הייתה באופן בולט יותר נגישה מהאחרות, במיוחד בשנים המאוחרות יותר, כך שנבחנים רבים היו מסוגלים לפתור לפחות אותה.

אף כי התוכן המתמטי של הבעיות לא היה מעבר לתוכנית הלימודים של בית הספר התיכון, הבעיות היו מסוג שלא נמצא בדרך כלל בספרי הלימוד. המטרה של בעיות כאלו הייתה לא רק לבחון את המקוריות של המשתתפים, אלא גם להעשיר את תוכנית הלימודים בבית הספר התיכון במתן כיוונים חדשים לעבודת התלמידים והמורים. הבעיות היו מסוג: (1) "נחש והוכח", שבהן על הנבחן לשער תחילה ואז להוכיח עובדה מתמטית; (2) "בדיקת המסקנות", שבהן על הנבחן לברר את ההשלכות של קביעה כוללת; (3) "ייתכן ששגית", שבהן השערה מאד סבירה מתבררת כשגויה; (4) ""תיאוריה בזעיר אנפין", שבהן סדרה של תת בעיות מצביעה על מבנה תיאורטי ; (5) "הסחת דעת", שבהן יחסים ברורים כמעט מאליהם בין הנתונים, אינם רלבנטיים לפתרון (ר' [9]; [19] עמ' 160-161, דוגמא 1; [21] עמ' 139 דוגמא 14.23).

הבעיות היו מהסוג שבו נעשה שימוש בספר "כיצד פותרין" [17], בשני הכרכים של כל אחד מספריו של ג'ורג' פוליה [18, 19], [20, 21]. לאמיתו של דבר, בעיות רבות הופיעו, בדרך כלל עם פתרונות, באחד הספרים הללו.

רוב הבעיות הופיעו גם בכתבי העת המקצועיים. הבעיות ורשימת הזוכים בכל תחרות מ-1946 עד 1953 (פרט ל-1952) פורסמו בכתב העת *American Mathematical Monthly* [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], ורשימה מלאה של הבעיות, יחד עם הקדמה שחלקה מופיע גם כאן, הופיע בגיליון יוני-יולי 1973 של אותו כתב עת [24]. מאמרים הכוללים בעיות, פתרונות, הערות ורשימת הזוכים מ-1953 עד 1961 (למעט 1959) פורסמו ב-*California Mathematics Council Bulletin* [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

עד כה לא פורסמה רשימה מלאה של הבעיות עם רמזים ופתרונות לכולן. כל החומר הכלול כאן הותר לפרסום על-ידי בעלי הזכויות.

חלק ניכר מהרמזים והפתרונות הם תולדה של דיונים בסמינריון על פתרון בעיות שהתקיים באוניברסיטת סטנפורד ו *Teachers College* באוניברסיטת קולומביה. נעשה שימוש בבעיות כדי להדגים טכניקות שונות של פתרון בעיות לסטודנטים בשנה הראשונה ללימודיהם, לפרחי הוראה ולמורים מנוסים כאחד. מורים ומורי-מורים עשויים למצוא הצעות מועילות לשימוש בבעיות בספר *Mathematical Discovery* (ר' [20], עמ' 209-212).

דבר המתרגמת

במשך שנים רבות שימשה אותי החוברת שתרגומה מובא כאן, להכשרת מורים למתמטיקה בעל-יסודי לקראת הוראה המשלבת התמודדות עם פתרון בעיות לא שגרתיות. במיוחד שמתי דגש על הדרכת תלמידיהם לסגל לעצמם את ההעזה המתמטית לנקוט צעד בלתי מקובל, לקשור בין דברים שלכאורה נראים בלתי קשורים ולהפריד בין דברים שלכאורה כרוכים זה בזה, בד בבד עם פיתוח החוסן המתמטי בפני תסכול, הדרושים כדי להתמודד עם בעיות כאלה. ספריו של ג'ורג' פּוליה (המצוינים ברשימה הביבליוגראפית בסוף החוברת) היו לי בבחינת "אורים ותומים". אני שמחה להגיש לציבור המורים ומורי המורים למתמטיקה את התרגום לעברית של אוסף המבחנים של אוניברסיטת סטנפורד, מפרי עטם של פּוליה ותלמידו ג'ירמי קילפטריק, מהבולטים בקהיליית החינוך המתמטי בת-זמננו. באוסף זה מיושמת הגישה ההיוריסטית של פּוליה להתרת בעיות. "הויריסטית" פירושו, כפי שפּוליה עצמו הגדיר, "משרתת לגילוי". תמצית הגישה היא אוסף של שאלות-עזר אותן אפשר לשאול במהלך החיפוש אחר פתרון לבעיה מתמטית מאתגרת. רשימת שאלות

כאלו מופיעה בהקדמה לספרו "כיצד פותרין" [17] שראה אור בעברית בהוצאת אוצר המורה ב-1957 ומובאת כאן כלשונן.[1]

גישה הויריסטית להתרת בעיות

כיצד פותרין? רשימת שאלות-על

הבנת הבעיה

ראשית: עליך להבין את הבעיה

מהו הנעלם? מהם הנתונים? מהו התנאי? כלום אפשר לקיים את התנאי?

האם התנאי מספיק כדי למצוא את הנעלם? או שמא אינו מספיק? אולי הוא מיותר? או היש בו סתירה?

שרטט תרשים. קבע בו סימון מתאים. הפרד את התנאי לחלקיו. היכול אתה לנסח אותו בכתב?

עריכת תוכנית

הרואה אתה בעיה זו בפעם הראשונה? או אולי ראית אותה בעיה בצורה שונה במקצת? המכיר אתה בעיה קרובה לזו? המכיר אתה משפט העשוי להביא תועלת? התבונן בנעלם! נסה להעלות בדעתך בעיה מוכרת לך, בה מופיע אותו נעלם עצמו, או נעלם דומה לו.

הרי לך בעיה קרובה לבעייתך, אשר נפתרה כבר. התוכל להשתמש בה? התוכל להשתמש בתוצאה שלה? התוכל להשתמש בשיטת -הפתירה שלה? האם עליך להוסיף גורם-עזר כלשהו כדי שיאופשר השימוש בה?

שנית: מצא את הקשר בין הנתונים לבין הנעלם. ייתכן שתיאלץ לגייס בעיות-עזר, אם לא יימצא לך קשר ישיר. לבסוף עליך להגיע לכלל עריכת תוכנית לקראת הפתרון.

התוכל לנסח את הבעיה מחדש? התוכל לשוב ולנסח בדרך אחרת? חזור ועיין בהגדרות.

אם אין בכוחך לפתור את הבעיה הנתונה, נסה לפתור תחילה בעיה קרובה לה. התוכל להעלות בדעתך בעיה מעין זו, קרובה לה, שכיחה יותר? בעיה כללית יותר? בעיה פרטית יותר? בעיה מקבילה?היכול אתה לפתור חלק מן הבעיה? נסה לקיים רק חלק מן התנאי והתעלם מחלקו; באיזו מידה ניתן לקבוע את הנעלם במקרה זה? כיצד עשוי הוא להשתנות? התוכל להפיק דבר-מה מועיל מן הנתונים? התוכל לשנות את הנתונים, או, אם צריך, את שניהם, כך שהנעלם החדש והנתונים החדשים יהיו קרובים יותר זה אל זה? האם השתמשת בכל הנתונים? האם

---

1 שאלות-העל התואמות לאלה המופיעות כאן, מופיעות בקבצי הרמזים לשאלות שבחוברת. הניסוח העברי בקבצים שבגוף החוברת שונה במעט מזה המופיע כאן בלשון זכר, כדי לאפשר לשני המינים לקרוא את הרמזים באופן אישי.

השתמשת בכל התנאי כולו? האם הבאת בחשבון את כל המושגים העיקריים המקופלים בבעיה זו?

<u>ביצוע התוכנית</u>

שלישית: בצע את תוכניתך.	עם ביצוע תוכנית-פתרונך, <u>בדוק כל צעד וצעד</u>. האם ברי לך שהצעד נכון? התוכל להוכיח את נכונותו?

<u>סקירה אחורנית</u> (ביקורת)

רביעית: בחן את הפתרון שנתקבל.	התוכל <u>לבדוק את התוצאה</u>? התוכל לבדוק את שיקולי ההנמקה? התוכל להגיע לכלל תוצאה זו בדרך אחרת? התוכל להבחין בכך בטביעת-עין ראשונה? התוכל להשתמש בתוצאה, או בשיטה לפתרון בעיה אחרת כלשהי?

לעניות דעתי, על כל מורה למתמטיקה לשנן ולאמץ את רשימת שאלות-העל הללו, ולשלוף אחת או יותר מהן כל אימת שתלמיד מתחבט בפתרון בעיה, על מנת להושיט יד, מבלי לגזול את שמחת הפתרון ואת תחושת הסיפוק עם השגתו.

אחרון וחשוב – התעתיק העברי של שמו של ג'ורג' פוליה נעשה לאחר התייעצות עם המחבר השני, ג'רמי קילפטריק, שכתב לי כי לא ידוע לו שמישהו בארה"ב, ארץ מגוריו ומחוז יצירתו של פוליה במשך 45 שנים מחייו, ביטא את שמו בהשמטת ה-ל', כפי שאנו בישראל נוהגים, כנראה בהשפעת ההיגוי ההונגרי המקורי של השם *György Pólya* שניתן לו בארץ הולדתו. בתרגום לעברית הרשיתי לעצמי גם לשנות פה ושם פרטים שוליים, כמו שמות וסוג מטבע, כדי להתאימם למקובל בישראל. כמו כן, לנוחיות המשתמשים, נקטתי בלשון פנייה ניטרלית לשני המינים ושיניתי את העריכה כך שאחרי כל קובץ של שאלות מופיע הקובץ המתאים של רמזים ופתרונות (במקור האנגלי השאלות, הרמזים והפתרונות מקובצים לשלושה פרקים נפרדים). לבסוף, ברשימת המקורות הוספתי שני פריטים חשובים המסכמים מחקר בנושא הויריסטיקה של פתרון בעיות לאחר ימיו של פוליה. אחד [25] של שיינפלד (1992) ואחד [26] של קויצ'ו, ברמן ומור (2006).

נצה מובשוביץ-הדר,

תשרי תשס"ז אוקטובר 2006

קובץ 1 – בעיות

1. בטורניר טניס משתתפים $2n$ אנשים. בסיבוב הראשון כל משתתף משחק בדיוק פעם אחת, כך שיש n משחקים שבכל אחד מהם משתתף זוג אנשים. יש להראות כי מספר הדרכים בהן ניתן לארגן את הסיבוב הראשון הוא בדיוק $1\times 3\times 5\times 7\times 9\times (2n-1)$.

2. בטטראדר (שאינו בהכרח משוכלל) שני מקצועות נגדיים הם בעלי אורך a והם ניצבים זה לזה. בנוסף לכך, כל אחד מהם ניצב לקטע באורך b המחבר את נקודות האמצע שלהם. יש לבטא את נפח הטטראדר באמצעות a, b ולהוכיח את התשובה.

3. ארבעת הפסוקים הבאים אינם בהכרח פסוקי אמת:

1) אם מצולע החסום במעגל הוא שווה-צלעות, הוא גם שווה-זוויות.

2) אם מצולע החסום במעגל הוא שווה-זוויות, הוא גם שווה-צלעות.

3) אם מצולע החוסם מעגל הוא שווה-צלעות, הוא גם שווה-זוויות.

4) אם מצולע החוסם מעגל הוא שווה-זוויות, הוא גם שווה-צלעות.

א. אילו מארבעה הפסוקים שלעיל הם פסוקי אמת ואילו הם פסוקי שקר? עליך להוכיח את טענתך בכל אחד מהמקרים.

ב. אם במקום מצולעים נתייחס למרובעים בלבד, אילו מהפסוקים שלעיל הם פסוקי אמת ואילו שקר? ואם נתייחס למחומשים בלבד? בענותך לסעיף ב׳ מותר לך להעלות השערות. חשוב לנסות להוכיח עד כמה שאפשר יותר מהן. בכל מקרה יש לציין במפורש מה הוכח ומה נשאר בגדר השערה.

קובץ 1 - רמזים

1. *אולי אפשר לנסח מחדש את השאלה?*

נניח שהיית אחד המשתתפים. בכמה דרכים אפשר למצוא לך שותף למשחק? איך ניתן לפצל את השאלה לשתיים:

א. בחירת המתנגד שלך.

ב. יצירת זוגות בין יתר המשתתפים.

2. *מה ידוע על הנעלם?*

הנעלם הוא נפח הטטראדר אותו ניתן לחשב כאשר ידועים שטח הבסיס וגובהו של טטראדר. אך לא זה ולא זה נתונים בבעיה.

האם יש קשר לבעיה דומה שניתן לפתור אותה? (האם קיים טטראדר אחר שהוא חלק מהטטראדר הנתון ואת נפחו ניתן לחשב?).

3. *איזה משפטים המתקשרים לבעיה ידועים לך?*

הוכחת כל אחד מהמשפטים היא הוכחת שוויון קטעים או שוויון זוויות. האם ידוע לך משפט או משפטים הקשורים לשוויון זוויות או שוויון קטעים הקשורים למעגל?

לעיתים מועיל לשרטט שרטוט. האם ניתן להוסיף לשרטוט תוספות אחדות שתאפשרנה יישום המשפטים שבהם נזכרת בהקשר זה?

קובץ 1 – פתרונות (חלקיים)

1. נקרא למספר האופנים בהם ניתן לחלק $2n$ שחקנים לזוגות - P_n.

אם היית אחד המשתתפים, אפשר לצרף אליך כל אחד מ- $2n-1$ המשתתפים האחרים. לאחר שבן זוגך נבחר נותרו

$$2n-2=2(n-1)$$

משתתפים שאותם ניתן לחלק לזוגות ב- P_{n-1} אופנים.
על-כן

$$P_n=(2n-1)P_{n-1}$$

מכאן ואילך ההמשך ברור.

2. המישור העובר דרך אחד המקצועות שאורכו a והניצב שאורכו b מחלקים את הטטראדר לשני טטראדרים חופפים שבכל אחד מהם שטח הבסיס $\frac{ab}{2}$ והגובה $\frac{a}{2}$.

נפח הטטראדר הוא אפוא: $2\times\frac{1}{3}\times\frac{ab}{2}\times\frac{a}{2}=\frac{a^2b}{6}$

3. א. טענות 1, 4 נכונות. טענות 2, 3 אינן נכונות.

ב. טענות 2, 3 אינן נכונות – המלבן והמעוין הם דוגמאות נגדיות המספיקות להפרכת הטענות.
טענות 2, 3 נכונות למחומשים ונובעות מהטענות הבאות בהתאמה:

'2: אם מצולע החסום במעגל הוא שווה זוויות, כל זוג צלעות המופרדות בדיוק על-ידי צלע אחת הן שוות זו לזו.

'3: אם מצולע החוסם מעגל הוא שווה צלעות, כל שתי זוויות המופרדות בדיוק על-ידי זווית אחת הן שוות זו לזו.

כדי להוכיח את טענות 1, '2, '3, 4 יש לחבר את מרכז המעגל לקדקודי המצולע, להוריד אנכים מהמרכז אל הצלעות ולמצוא משולשים חופפים.

קובץ 2 – בעיות

1. על מנת למספר את העמודים של ספר עב-כרס הזדקק המדפיס ל- 1890 ספרות . כמה עמודים בספר ?

2. בין ניירותיו של סבא נמצא החשבון הבא :

72 תרנגולי הודו _67.9_ ש״ח

הספרה הראשונה והאחרונה של המספר המייצג מן הסתם את המחיר הכולל של העופות ניטשטשו ועל-כן הוחלפו במקומות ריקים . מהן הספרות החסרות ומהו בהתאם לכך מחירו של כל תרנגול הודו?

3. מה צריך להיות הערך של m כך שלמשואה הבאה יהיו ארבעה פתרונות ממשיים (עבור x) ושהפתרונות יהוו סדרה חשבונית ?

$$x^4-\left(3m+2\right)x^2+m^2=0$$

4. יהיו α,β,γ סימונים לזוויותיו של משולש. יש להוכיח כי :

א. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

ב. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

ג. $\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=-4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$

קובץ 2 – רמזים

1. *הנה בעיה קרובה לבעיה המקורית*: אם יש בספר בדיוק 9 דפים ממוספרים, לכמה ספרות יזדקק המדפיס? (תשובה: 9)

2. *אולי אפשר לנסח מחדש את הבעיה?* מהן הספרות שניטשטשו אם המחיר הכולל, כשמבטאים אותו באגורות, מתחלק ב-72?

3. *מהו התנאי?* ארבעת הפתרונות צריכים ליצור סדרה חשבונית. יחד עם זה למשוואה יש תכונה מיוחדת – היא מכילה רק חזקות זוגיות של הנעלם x. על-כן אם a הוא פתרון, אז גם a- הוא פתרון.

4. *איזה משפטים המתקשרים לבעיה ידועים לך?* כדאי לשים לב לדמיות שבין שלוש הזהויות, בפרט באגפיהן השמאליים. אם הוכחת זהות אחת, איך אפשר אז לעבור לשתיים האחרות?

קובץ 2 – פתרונות (חלקיים)

1. להדפסת ספר שיש בו 999 דפים יזדקק המדפיס ל- $9+2\times 90+3\times 900=2889$ ספרות. אם בספר העבה עליו שואלים יש x דפים, אזי:
$$189+3(x-99)=1890$$
$$x=666$$

2. אם 679 מתחלק ב-72 הוא מתחלק גם ב-8 וגם ב-9. בהיותו מתחלק ב-8, שלוש הספרות האחרונות שלו מוכרחות ליצור מספר המתחלק ב-8 (מדוע?) ועל-כן _679_ מתחלק ב-8 לפיכך הספרה החסרה מימין היא 2. מאידך 6792_ צריך כאמור להתחלק גם ב-9 על-כן סכום הספרות חייב להתחלק ב-9 (מדוע?) על-כן הספרה

החסרה משמאל מוכרחה להיות 3. מחירו של תרנגול הודו אחד היה (בימי סבא...) $367.92:72=5.11$ ש״ח.

3. אם a ו $-a$ הם הפתרונות בעלי הערך המוחלט הנמוך ביותר, הסדרה תהיה בעלת הצורה: $-3a\,,-a\,,a\,,3a$.

על-כן: $(x^2-a^2)(x^2-9a^2)=x^4-(3m+2)x^2+m^2$

על-ידי השוואת מקדמים של חזקות בעלות מעריכים שווים נקבל את המערכת:

$$10a^2=3m+2$$

$$9a^4=m^2$$

על-ידי חילוץ a נקבל: $19m^2-108m-36=0$

ולכן $m=6$ או $m=-\dfrac{16}{9}$

4. אם $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

אז $(\pi-2\alpha)+(\pi-2\beta)+(\pi-2\gamma)=\pi$

על-כן נוכל לעבור מזהות א׳ ל-ב׳ ומ-ב׳ ל-ג׳ על-ידי הצבת $\pi-2\alpha\,,\pi-2\beta\,,\pi-2\gamma$ עבור $\alpha\,,\beta\,,\gamma$ בהתאמה.

נשאר להוכיח את א׳ וזה ניתן לביצוע בדרכים אחדות. למשל: נציב $2u\,,2v$ ו- $\pi-2u-2v$ עבור α,β,γ בהתאמה. נקבל בזהות א׳:

$$\sin u\cos u+\sin v\cos v=$$

$$(2\cos u\cos v-\cos(u+v))\sin(u+v)$$

לסיום יש להשתמש במשפטים על הסינוס והקוסינוס של סכום זוויות.

קובץ 3 – בעיות

1. לפניך הטבלה הבאה:

$$1 = 1$$
$$2+3+4 = 1+8$$
$$5+6+7+8+9 = 8+27$$
$$10+11+12+13+14+15+16 = 27+64$$

עליך לנסות להעלות השערה על הכלל שדוגמאות אלו מהוות מקרים פרטיים שלו, לבטא את הכלל באופן מתמטי, ולהוכיח אותו.

2. שלושה מספרים מהווים סדרה חשבונית. שלושה מספרים אחרים מהווים סדרה הנדסית. כשמחברים את האיברים המתאימים של שתי הסדרות מקבלים 85, 76, 84, בהתאמה. סכום שלושת האיברים של הסדרה החשבונית הוא 126. מהם אברי כל אחת משתי הסדרות?

3. מפסגתו של הר רואים שתי נקודות A, B במישור. קווי הראייה של שתי נקודות אלו כולאים זווית γ. זווית הנטייה של הקו הראשון כלפי האופק היא α, וזווית הנטייה של קו הראייה השני היא β. ידוע כי הנקודות A ו-B נמצאות באותו גובה ושהמרחק ביניהן הוא c.
עליך לבטא את הגובה x של פסגת ההר מעל לגובה המשותף של A, B באמצעות α, β, γ והמרחק c.

4. כדור אחד בעל רדיוסו r_1 חסום בארבעון (טטראדר) משוכלל. הארבעון חסום בכדור שני שרדיוסו r_2. הכדור השני חסום בקובייה. הקובייה חסומה בכדור שלישי שרדיוסו r_3. יש למצוא את היחס $r_1 : r_2 : r_3$ (האסטרונום קפלר חשב שזהו היחס בין ממוצעי המרחקים של הכוכבים מאדים, צדק ושבתאי מהשמש, אך למעשה נמצא שזה איננו היחס הנכון).

קובץ 3 – רמזים

1. גילוי על-ידי אינדוקציה מצריך התבוננות. עליך להתבונן בביטויים שמצד ימין בכל אחד השוויוניים ובביטויים שמצד שמאל בכל השוויונים . מהו הכלל?

2. *איך אפשר להפריד את התנאי לחלקים שונים?* כדאי לרשום אותם כל אחד לחוד באמצעות סימון של איברי הסדרה החשבונית כך: $a-d, a, a+d$ ואיברי הסדרה ההנדסית כך: bq^{-1}, b, bq.

3. *איך אפשר להפריד את התנאי לחלקים שונים?* באמצעות סימון האורכים (הבלתי ידועים) של קווי הראיה ב-a וב-b , וסימון זוויות הנטייה שלהם כלפי המישור האופקי ב-α וב-β בהתאמה. ניתן אולי להפריד את התנאי לשלושה חלקים הנוגעים ל:
   א. נטייה של a
   ב. נטייה של b
   ג. משולש שצלעותיו a, b, c.

4. *מה ידוע על הנעלם?* - יש שני נעלמים: היחס $r_1 : r_2$ והיחס $r_2 : r_3$.

קובץ 3 – פתרונות (חלקיים)

1. הכלל הוא: $(n^2+1)+(n^2+2)+...+(n+1)^2=n^3+(n+1)^3$.
ההוכחה – באינדוקציה על n.

2. התנאי ניתן להפרדה לארבעה חלקים המבוטאים על-ידי ארבע המשוואות הבאות:

$$a-d+bg^{-1}=85$$

$$a+b=76$$

$$a+d+bg=84$$

$$3a=126$$

מהמשוואה האחרונה מתקבל $a=42$ ואחר כך מהשנייה מתקבל $b=34$. על-ידי חיבור שתי המשוואות הנותרות מקבלים: $2a+b(g^{-1}+g)=169$. מאחר ש-a ו-b ידועים כבר, המשוואה שלעיל היא משוואה ריבועית ב-g.
ממנה מתקבל $g=2,\ d=-26$ או $g=\frac{1}{2},\ d=25$.
הסדרות הן על-כן:

$$\begin{matrix} 68,42,16 \\ 17,34,68 \end{matrix} \quad \text{או} \quad \begin{matrix} 17,42,67 \\ 68,34,17 \end{matrix}$$

3. שלושת חלקי התנאי מבוטאים כך:

$$\sin\alpha=\frac{x}{a}$$

$$\sin\beta=\frac{x}{b}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

על-ידי חילוץ a , b מקבלים:

$$x^2=\frac{c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}$$

4. בטטראדר הגובה הוא אחד הניצבים של משולש ישר-זווית שהיתר שלו הוא אחד המקצועות. אם אורך המקצוע הוא a, הניצב השני של המשולש ישר הזווית אורכו $a\sqrt{3}$ (שני-שליש מהגובה של פאה). מאחר שאורכו של הגובה הוא $r_1 + r_2$ אנו מקבלים:

$$r_1 + r_2 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

מרכז הטטראדר מונח על הגובה, והקטע המחבר את המרכז עם הקדקוד הנגדי של המשולש ישר-זווית, אורכו r_2 והוא מהווה יתר של משולש ישר-זווית שני שניצביו אורכיהם r_1 ו- $\frac{a}{\sqrt{3}}$. על-כן:

$$r_2^2 - r_1^2 = \frac{a^2}{3}$$

על-ידי חילוק במשוואה הקודמת מקבלים את המערכת:

$$r_2 - r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$r_2 + r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

שפתרונה $r_1 = a\frac{\sqrt{6}}{12}$, $r_2 = a\frac{\sqrt{6}}{4}$. לפיכך

$$r_1 : r_2 = 1:3$$

בקובייה, אם b הוא אורך המקצוע אז $r_2 = \frac{b}{2}$ ו-

$r_3 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. לפיכך

$$r_2 : r_3 = 1:\sqrt{3} \quad \text{ו-} \quad r_1 : r_2 : r_3 = 1:3:3\sqrt{3}$$

קובץ 4 – בעיות

1. עליך להוכיח כי אף אחד מהמספרים בסדרה הבאה איננו ריבוע של מספר שלם

$11, 111, 1111, 11111, ...$

2. שלוש הצלעות של משולש אורכיה l,m,n בהתאמה. המספרים l,m,n הם שלמים חיוביים ומתקיים $l \le m \le n$.

א. נניח כי $n=9$, מהו מספר המשולשים האפשריים לפי ההנחות שלעיל.

ב. עליך לקבוע ערכים שונים עבור n ולמצוא כלל.

3. א. איך אפשר להוכיח את המשפט הבא: אם נקודה נמצאת בתוך משולש שווה צלעות ומרחקיה משלוש הצלעות הם x,y,z בהתאמה, h הוא גובה המשולש, אזי מתקיים:

$$x+y+z=h$$

ב. מהו הנוסח המדויק ומהי ההוכחה של משפט דומה (למשפט הנ"ל) בהנדסת המרחב המתייחס למרחקיה של נקודה פנימית בטטראדר משוכלל מארבע הדפנות שלו.

ג. איך אפשר להכליל את שני המשפטים כך שהם יהיו נכונים לגבי כל נקודה במישור או במרחב, בהתאמה (ולאו דווקא לגבי נקודות בתוך המשולש או בתוך הטטראדר). עליך לחשוב על ניסוח מדויק ולתת הוכחה.

קובץ 4 – רמזים

1. *איך אפשר לנסח מחדש את הבעיה?*
אפשר לנסח את השאלה גם כך: "יש למצוא ריבוע שלם S בעל הצורה $1+10+10^2+...+10^k$ באשר k הוא מספר שלם חיובי".

איך ניתן להפריד את התנאי לחלקים שונים? איך אפשר לרשום אותם?
ניתן להבחין בשני חלקים לתנאי:
א. S חייב להיות ריבוע שלם.
ב. S צריך להיות בעל הצורה הנ"ל.

2. גילוי אינדוקטיבי מצריך התבוננות. האם יש לך דרך שיטתית למניית המשולשים עבור ערך מסוים של n?

3. *האם יש לך ידיעה על משפט שקשור לעניין?*
הגובה הוא h, האם זכור לך משפט פשוט יותר על גובהו של משולש?

קובץ 4 – פתרונות (חלקיים)

1. אם S הוא מספר בסדרה, הריהו בעל הצורה:
$$11+100m=4(25m+2)+3$$
באשר m מספר שלם אי-שלילי. על-כן S משאיר שארית 3 בחילוק ב-4. אבל ריבועים הם בעלי הצורה $4n^2$ או $4n^2+4n+1$ ועל-כן יכולים להשאיר בחילוק ב-4 רק שארית 0 או 1.

2. א. הערכים של l מ-1 עד 9 (כולל 9) מתאימים ל-
$$1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1$$
משולשים בהתאמה או סך הכול $25=5^2$ משולשים.

ב. הכלל יהיה $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ עבור n זוגי או $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ עבור n אי-זוגי. יש חוק אחד לשני המקרים: המספר השלם הקרוב ביותר ל- $\frac{(n+1)^2}{4}$.

3. א. תהי a צלע של משולש שווה-צלעות. על-ידי חיבור הנקודה הפנימית לשלושת הקדקודים, מחלקים את המשולש לשלושה משולשים ששטחיהם מסתכמים לשטח הכללי. על-כן:

$$\frac{ax}{2}+\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}=\frac{ah}{2}.$$

חילוק ב- $\frac{a}{2}$ משני צידי השוויון מביא לסיום ההוכחה.

ב. נקודה בתוך טטראדר שגובהו h היא בעלת מרחקים w, z, y, x מארבע הדפנות בהתאמה. טענה: $x+y+z+w=h$. ההוכחה דומה להוכחה במקרה המישורי: על-ידי חילוק הטטראדר לארבעה טטראדרים.

ג. היחס נשאר נכון בשני המקרים א׳, ב׳ גם עבור נקודות מחוץ למשולש ולטטראדר, ובלבד שלוקחים את המרחקים x, y, z (ו- w) עם סימניהם המתאימים: פלוס (+) כאשר המסתכל הניצב בנקודה רואה את הצלע (הדופן) מבפנים, מינוס (-) כאשר הוא רואה אותה מבחוץ. ההוכחה – עקרונית זהה.

קובץ 5 – בעיות

1. נשים לב לכך ש-

$$1 = 1$$
$$1 - 4 = -(1 + 2)$$
$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$
$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)$$

איזה חוק כללי עולה ממקרים אלה? עליך לבטא אותו באופן מתמטי ולהוכיח אותו.

2. נתון ריבוע, יש למצוא את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמהן רואים את הריבוע בזווית של:

א. 90°

ב. 45°

בכל מקרה נא לשרטט את המקום הגיאומטרי, ולתת תיאור מלא והוכחה.

הערה: תהי P נקודה מחוץ לריבוע, במישור הריבוע. הזווית הקטנה ביותר בעלת קדקוד בנקודה P המכילה בתוכה את הריבוע, נקראת זווית הראיה של הריבוע מנקודה P).

3. נגדיר כ"ציר" של גוף במרחב, ישר כלשהו המחבר שתי נקודות על פני הגוף כך שכאשר מסובבים את הגוף סביב ישר זה בזווית מסוימת גדולה מ- 0° וקטנה מ- 360° הגוף מתלכד עם עצמו. לקובייה יש 13 צירים שונים משלושה סוגים שונים.
יש לתאר בבהירות את מקומם של הצירים ולרשום לגבי כל אחד מהם את זווית הסיבוב המתאימה.
בהנחה שמקצוע הקובייה אורכו יחידה אחת, עליך לחשב את הממוצע החשבוני של אורכי 13 הצירים.

קובץ 5 – רמזים

1. *גילוי אינדוקטיבי דורש התבוננות רבה ובדיקה.* מן הראוי לבחון את המעבר ממקרה אחד לשני.

2. *האם מוכרת לך בעיה קשורה לבעיה זאת?*

המקום הגיאומטרי של הנקודות שמהן רואים קטע בזווית *מסוימת*, מורכב משתי קשתות הנשענות על הקטע, והן סימטריות זו לזו ביחס לקטע.

3. חלק מהצירים אפשר למצוא בקלות על-ידי הסתכלות, אך האם אלה הם <u>כל</u> הצירים? איך אפשר <u>להוכיח</u> שמיצית את <u>כל</u> הצירים האפשריים? האם הרשימה שבידך בנויה על עקרון מיון ברור?

קובץ 5 – פתרונות (חלקיים)

1. החוק הכללי הוא:

$$1-4+9-16+...+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

המעבר מ-n ל-$n+1$ מצריך הוכחה ש:

$$(-1)^n(n+1)^2 = (-1)^n\,\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

2. בכל מצב, שוקי הזווית חייבות לעבור דרך שני קדקודים של הריבוע. כל זמן שהן עוברות דרך אותו זוג קדקודים, קדקוד הזווית נע לאורך אותה קשת (בהתאם למשפט המצוטט ברמז). על-כן כל אחד מהמקומות הגיאומטריים המבוקשים מכיל קשתות אחדות: במקרה א' - 4 חצאי מעגל ובמקרה ב' - 8 רבעי מעגל.

3. 13 צירים ניתנים למיון כדלקמן:

א. ארבעה צירים, כל אחד מחבר זוג קדקודים נגדיים. זוויות הסיבוב - $120^\circ, 240^\circ$.

ב. ששה צירים, כל אחד מחבר את נקודות האמצע של שני מקצועות נגדיים. זוויות הסיבוב - 180°.

ג. שלושה צירים, כל אחד מחבר את המרכזים של שתי פאות נגדיות. זוויות הסיבוב- $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$.

אורכי הצירים הם: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ בהתאמה והממוצע הוא:

$$\frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+3}{13} = 1.42$$

קובץ 6 – בעיות

1. מידת היקפו של משולש ישר-זווית הוא 60 ס״מ ומידת הגובה היורד על היתר הוא 12 ס״מ. מהן מידותיהן של צלעות המשולש.

2. מרובע מחולק לארבעה משולשים על-ידי שני האלכסונים. נקרא לשני משולשים בשם ״נגדיים״ אם יש להם קדקוד משותף ,אך אין להם אף צלע משותפת. עליך להוכיח את הטענות הבאות:

א. מכפלת השטחים של זוג אחד של משולשים נגדיים שווה למכפלת השטחים של הזוג השני.

ב. המרובע הוא טרפז אם ורק אם יש זוג משולשים נגדיים שהם שווי-שטח .(יש לשים לב לכך שלטענה זו יש שני חלקים!)

ג. המרובע הוא מקבילית אם ורק אם ארבעת המשולשים הם שווי-שטח. (כנ״ל)

3. נתבונן בחרוט ישר (מעגלי) קטום. נקרא בשם ״מעגל מרכזי״ לחיתוך של החרוט הקטום עם מישור המקביל לבסיסיו (העליון והתחתון) והעובר במרחק שווה משניהם.

לחרוט קטום ולגליל מסוים יש אותו גובה. המעגל המרכזי של החרוט הנ״ל הוא גם בסיסו של הגליל.

נפחו של איזה משני הגופים גדול יותר? – עליך להוכיח את תשובתך.

קובץ 6 – רמזים

1. איך אפשר *להפריד את התנאי לחלקים שונים? איך אפשר לרשום אותם?*
ניתן למצוא בתנאי שלושה חלקים שונים המתייחסים אל:
א. ההיקף
ב. הזווית הישרה
ג. הגובה על היתר

2. כדאי *לשרטט שרטוט ולהכניס בו סימון מתאים.* איך אפשר להראות ששטחים (או מכפלותיהם) שווים זה לזה?

3. כדאי *לשרטט שרטוט ולהכניס בו סימון מתאים.* (הוכחה אפשרית היא בדרך אלגברית: יש לבטא את שני הנפחים באמצעות הנתונים ולטפל בהפרש ביניהם כדי לקבוע את סימנו).

קובץ 6 – פתרונות (חלקיים)

1. יהיו a,b,c צלעות המשולש, c – היתר. שלושת חלקי התנאי ניתנים לביטוי כך:

$$a+b+c=60$$

$$a^2+b^2=c^2$$

$$ab=12c$$

הואיל ו- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, מקבלים משלושת השוויונות שלעיל:

$$(60-c)^2=c^2+24c$$

ועל-כן $c=25$ ו- $b=20$, $a=15$ או $b=15$, $a=20$.

2. המרובע חייב להיות קמור, נסמן את ארבעת המשולשים הנוצרים על-ידי האלכסונים ב-: I, II, III, IV ואת שטחיהם נסמן (I), (II), (III), (IV) בהתאמה. כמו כן יהיו: s, r, q, p אורכי ארבעת הקטעים מהקדקודים לנקודת חיתוך האלכסונים כך שהקטע באורך p משותף ל-I ול-IV, q ל-I ול-II, r ל-II ול-III, s ל-III ול-IV. I הוא מול III, II מול IV, $p+r$ הוא אורך האלכסון האחד ו-$q+s$ אורכו של השני. אם q, p כולאים את הזווית α אזי

$$2\,(\mathrm{I}) = pq\sin\alpha$$

$$2\,(\mathrm{II}) = qr\sin\alpha$$

$$2\,(\mathrm{III}) = rs\sin\alpha$$

$$2\,(\mathrm{IV}) = sp\sin\alpha$$

על-כן

א. $(\mathrm{I})\ (\mathrm{III}) = (\mathrm{II})(\mathrm{IV})$

ב. "הבסיס" של I מקביל לזה של III אם ורק אם:

$$(\mathrm{II}) = (\mathrm{IV}) \text{ או } \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$$

ג. המרובע הוא מקבילית אם ורק אם:

$$(\mathrm{I}) = (\mathrm{II}) = (\mathrm{III}) = (\mathrm{IV}) \text{ או } p = r,\ q = s$$

4. יהי h הגובה המשותף של החרוט והגליל ויהיו a, b הרדיוסים של בסיסי החרוט הקטום. רדיוסו של הגליל הוא אפוא $\frac{a+b}{2}$. ההפרש בין נפחו של החרוט הקטום לבין נפחו של הגליל הוא:

$$\pi h\left[\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi h(a-b)^2}{12}$$

הפרש זה הוא חיובי, למעט המקרה $a = b$ שחל כאשר הגופים מתלכדים. על-כן נפח החרוט הקטום גדול (או שווה) לנפח הגליל.

קובץ 7 – בעיות

1. יש להוכיח את הטענה הבאה :

אם צלעו של משולש קטנה באורכה מהממוצע החשבוני של אורכי שתי הצלעות האחרות, אז הזווית שמולה מידתה קטנה יותר מהממוצע של מידות הזוויות האחרות.

2. נתבונן בפירמידה ישרה קטומה בעלת בסיסים ריבועיים . נקרא בשם "חתך-אמצעי" לחיתוך של הפירמידה הקטומה עם מישור מקביל לבסיסים העובר במרחק שווה משניהם . נקרא בשם "מלבן-ביניים" למלבן שצלעו האחת היא כצלע של הבסיס התחתון והשנייה כצלע של הבסיס העליון .

ארבעה תלמידים מסכימים כי נפח הפירמידה הקטומה שווה למכפלת הגובה בשטח מסוים, אך הם חלוקים בדעותיהם ביחס לשטח זה ומעלים ארבע הצעות שונות :

א. החתך האמצעי
ב. הממוצע של הבסיסים
ג. הממוצע של הבסיסים והחתך האמצעי
ד. הממוצע של הבסיסים ומלבן הביניים

יהי h גובה הפירמידה הקטומה, a ו- b צלע הבסיס התחתון והעליון בהתאמה .

נא לבטא את ארבע ההצעות באופן אלגברי, להחליט איזה מהן נכונה ולהוכיח זאת.

3. עליך להוכיח כי הפתרון היחיד של המשוואה $x^2+y^2+z^2=2xyz$ מעל למספרים השלמים הוא $x=y=z=0$.

קובץ 7 – רמזים

1. *מהי ההנחה? מהי המסקנה?*
יהיו $a,\ b,\ c$ צלעות המשולש ו- A, B, C הזוויות הנגדיות בהתאמה.

ההנחה היא: $a < \dfrac{b+c}{2}$.

המסקנה היא: $A < \dfrac{B+C}{2}$.

2. *האם מוכרת לך בעיה קרובה לזאת? יותר מיוחדת?*

מה קורה כאשר משנים את נתוני הבעיה?

3. *מהו התנאי?*

סכום הריבועים של שלושה מספרים שלמים חייב להיות כפליים מכפלתם, הסכום מוכרח להיות זוגי.

קובץ 7 – פתרונות (חלקיים)

1. מאחר ש- $A+B+C=180°$, להוכיח ש- $A<\frac{1}{2}(B+C)$

פירושו להוכיח כי $A<\frac{1}{2}\left(180°-A\right)$ או $A<60°$. אבל

$A<60°$ שקול ל- $\cos A>\frac{1}{2}$. לפי ההנחה $b+c>2a$.

אם נעלה את שני הצדדים בריבוע ונשתמש במשפט הקוסינוסים ונקבל:

$$b^2+2bc+c^2>4(b^2+c^2-2bc\cos A)$$

או

$$8bc\cos A>3b^2+3c^2-2bc$$

נחסר $4bc$ משני הצדדים ונקבל:

$$4bc(2\cos A - 1) > 3(b-c)^2 \ge 0$$
$$\Rightarrow 2\cos A - 1 > 0$$
$$\Rightarrow \cos A > \frac{1}{2}$$

2. לפי ארבע האפשרויות המוצעות נפחה של הפירמידה הקטומה יהיה בהתאמה

א. $[(a+b)/2]^2 h$

ב. $[(a^2+b^2)/2]h$

ג. $[a^2+b^2+(a+b)^2/4]h/3$

ד. $[a^2+b^2+ab]h/3$

אם $b=a$ הפירמידה הקטומה הופכת למנסרה שנפחה a^2h. כל אחת מארבע ההצעות עומדת במבחן זה.

אם $b=0$ הפירמידה הקטומה הופכת לפירמידה רגילה והנפח הוא $a^2h/3$. רק האפשרות הרביעית עומדת בפני מקרה פרטי זה. על-כן יתר השלוש בודאי אינן נכונות.

כדי להוכיח שאפשרות ד' נכונה באופן כללי, נסמן ב-x את גובה הפירמידה הקטנה שחותכים מהפירמידה הגדולה כדי לקטום אותה. נסמן ב-B, A, F את נפחיהם של הפירמידה הקטומה, הפירמידה השלמה והפירמידה הקטנה (שגובהה x), בהתאמה. קיים:

$$F = A - B = \frac{a^2(x+h)}{3} - \frac{b^2x}{3} = [a^2h + (a^2-b^2)x]\frac{1}{3}$$

חתך מישורי של הפירמידה דרך הגובה ובמקביל לאחת מצלעות הבסיס מכיל שני משולשים דומים שמהם מתקבלת הפרופורציה

$$\frac{x}{x+h} = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{bh}{a-b}$$

בהציבנו ערך זה של x בביטוי של F נקבל

$$F=\left[a^2h+\frac{a^2-b^2}{a-b}bh\right]\cdot\frac{1}{3}=\left[a^2+b^2+ab\right]\cdot\frac{h}{3}$$

3. יהיו x, y, z שלמים, תהי 2^k באשר $k\geq 0$ החזקה הגבוהה ביותר של 2 שמחלקת את $x,\ y,\ z$ כך ש- $z=2^k z', y=2^k y', x=2^k x'$. אם נציב ביטויים אלה במשוואה ונחלק ב- 2^{2k} נקבל:

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2=2^{k+1}x'y'z'$$

מאחר והביטוי בצד ימין הוא זוגי גם אגף שמאל זוגי וקיים: או ש- x', y', z' שלושתם זוגיים או שבדיוק אחד מהם זוגי. נניח כי x', y', z' לא שלושתם שווים ל- 0. מהנחה זו נובע כי אף אחד מהמספרים הללו אינו אפס, כיוון שאם אחד מהם מתאפס אז שלושתם מוכרחים להתאפס. בהיותם שונים מ-0, המספרים x', y', z' לא יכולים להיות שלושתם זוגיים מפני ש-2 אינו גורם משותף להם לפי הגדרתם. נניח על-כן ש- x' זוגי ו- z', y' אינם זוגיים. על-ידי חיסור $(x')^2$ משני צידי המשוואה האחרונה נקבל: $(y')^2+(z')^2=x'(2^{k+1}y'z'-x')$. גם $(y')^2$ וגם $(z')^2$ הם בעלי הצורה $4n^2+4n+1$ ועל-כן אגף שמאל מתחלק ב-4 עם שארית 2, אבל אגף ימין מתחלק ב-4 ללא שארית (x' והביטוי בסוגריים מתחלקים ב-2). סתירה. המסקנה היא כי x', y', z' שלושתם אפס, כלומר:

$$x'=y'=z'=0\Rightarrow\ x=y=z=0$$

קובץ 8 – בעיות

1. לראובן יש עשרה כיסים ו-44 מטבעות זהב. הוא רוצה לשים את המטבעות היקרות האלה כך שבכל כיס יהיה מספר שונה של מטבעות.

א. האם יוכל לעשות זאת?

ב. מהי הכללת הבעיה עבור p כיסים ו-n מטבעות. מדוע הבעיה היא מעניינת ביותר עבור

$$n=\frac{(p+1)(p-2)}{2}\ ?$$

2. עליך לאמת כי הערך של

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$$

הוא $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{23}{24}$, עבור $n=1$, $n=2$, $n=3$ בהתאמה. מהו הניחוש שלך לגבי החוק הכללי (אפשר להגיע לניחוש מוצלח על-ידי התבוננות בערכים פרטיים נוספים, אם נחוץ). איך ניתן להוכיח שהניחוש שלך נכון?

3. מה הם ערכי x,y,u,v המספקים את מערכת המשוואות:

$$x+7y+3v+5u=16$$
$$8x+4y+6v+2u=-16$$
$$2x+6y+4v+8u=16$$
$$5x+3y+7v+u=-16$$

(הבעיה נראית מַלְאָה ומשעממת. האם יש קיצורי דרך?)

4. ארבע הנקודות G, H, V, U (בסדר זה) הן ארבעת הקדקודים של מרובע. מודד רוצה לקבוע את האורך של $x=UV$. הוא יודע את האורך של $GH=l$ ומודד את הזוויות:

$$\angle GUH = \alpha,\ \angle HUV = \beta,\ \angle UVG = \gamma,\ \angle GVH = \delta$$

נסייע לו כך:

א. נבטא את x באמצעות $\alpha, \beta, \gamma, \delta, l$.

ב. נמצא דרך לבחון את נכונות התוצאה.

ג. אם הייתה לך תוכנית ברורה לתשובה על א', איך אפשר לאפיין אותה במשפט אחד קצר?

קובץ 8 – רמזים

1. אילו היו לראובן הרבה מטבעות זהב ודאי לא היה קושי למלא כל כיס באופן שונה מרעהו.

האם אפשר לנסח מחדש את הבעיה?

מהו המספר הקטן ביותר של מטבעות שאפשר לשים ב-10 כיסים כך שלא יהיו שני כיסים שונים המכילים מספר שווה של מטבעות?

2. האם זיהית את המכנים 2, 6, 24?

האם מוכרת לך בעיה קרובה? בעיה מקבילה?

3. על מנת לפתור מערכת כזאת עלינו לצרף את המשוואות באיזה שהוא אופן. כדאי לחפש יחסים בין המשוואות שיכולים להצביע על צרוף תועלתי במיוחד.

4. ניוטון ציין פעם כי בבעיות הנדסיות מסוימות מתקבלת אותה מערכת משוואות באופן בלתי תלוי בבחירת הנתונים והנעלמים. לפיכך, בבעיות כאלה יש לבחור את הנתונים והנעלמים כך שיהיה קל לערוך את המשוואות.

קובץ 8– פתרונות (חלקיים)

1. א. המספר הקטן ביותר של מטבעות בכל כיס הוא ללא ספק 0. אחר כך באים לפי הסדר 1, 2, ... והמספר בכיס האחרון (העשירי) הוא לפחות 9. לכן המספר הקטן

ביותר של מטבעות שבאמצעותו ניתן לספק את התנאי הוא: $0+1+2+...+9=45$.

לראובן 44 מטבעות, לכן הוא לא יכול לעשות זאת.

ב. במקרה הכללי הבעיה פתירה אם

$$n \ge 0+1+2+...+(p-1)=\frac{p(p-1)}{2}$$

ואין לה פתרון אם

$$n \le \frac{p(p-1)}{2}-1=\frac{(p+1)(p-2)}{2}$$

2. הכלל הוא: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

המעבר מ-n ל- $n+1$ מצריך הוכחה ש:

$$\frac{n+1}{(n+2)!}=-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

או

$$\frac{n+2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

שמתקיים עבור $n=1,\ 2,\ 3,...$

3. מן הראוי לשים לב שהקשר בין המשוואה הראשונה והרביעית זהה לזה שבין השנייה והשלישית. האגף השמאלי של בנות הזוג הוא בעל אותם מקדמים בסדר הפוך, והאגפיים הימניים נגדיים זה לזה. על-ידי חיבור המשוואה הראשונה לרביעית והשנייה לשלישית מקבלים:

$$6(x+u)+10(y+v)=0$$
$$10(x+u)+10(y+v)=0$$

ומכאן $x+u=0$ ו- $y+v=0$. אם נציב $(-x)$ עבור u ו-$(-y)$ עבור v במשוואות המקוריות, נמצא כי:

$$-4x+4y=16$$
$$6x-2y=-16$$

ועל-כן: $x=-2$, $y=2$, $u=2$, $v=-2$.

4. א. בבואנו לערוך את המשוואות נחשוב על x ועל הזווית $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ כעל נתונים ועל l כעל נעלם. מתוך ΔUVG נמצא את GV מבוטא על-ידי $\gamma,\ \alpha+\beta,\ x$ באמצעות משפט הסינוסים.

ממשולש VUH נמצא HV מבוטא על-ידי $\gamma+\delta,\ \beta,\ x$ באמצעות משפט הסינוסים. ממשולש ΔGHV נקבל את l מבוטא על-ידי $GV,\ HV$ ו- δ באמצעות משפט הקוסינוסים. תוך שימוש בביטוים עבור $GV,\ HV$, מקבלים:

$$l^2=x^2\left(\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma+\delta)}-\frac{2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\delta}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin(\beta+\gamma+\delta)}\right)$$

ב. במקרה הפרטי שבו

$$\alpha=\delta,\ \beta=\gamma,\ \alpha+\beta=\gamma+\delta=\frac{\pi}{2}$$

המשוואה שלעיל נותנת $x=l$ כפי שצריך להיות. אפשר גם להתבונן במקרה שבו $\beta=\gamma,\ \alpha=\delta$ אבל הערך של $\alpha+\beta$ אינו נתון, וגם במקרה שבו β,γ,δ ו- α מוצבות במקום γ,β,α ו- δ, בהתאמה. אפשר גם לעשות "בחינת ממדים".

ג. אחד הנתונים מחליף תפקיד עם הנעלם.

קובץ 9 – בעיות

1. נתבונן בטבלה הבאה

1	$=1$
$3+5$	$=8$
$7+9+11$	$=27$
$13+15+17+19$	$=64$
$21+23+25+27+29$	$=125$

איזה כלל עולה מדוגמאות אלה? מהו הניסוח המתמטי שלו? מהי הוכחתו?

2. צלעו של משושה משוכלל היא באורך n (n הוא מספר שלם). מחלקים את המשושה ל- T משולשים שווי-צלעות שאורך הצלע שלהם הוא 1, על-ידי כך שמעבירים קוים מקבילים לצלעות המשושה במרחקים שווים. יהי V מספר הקדקודים המופיעים בחלוקה כזאת. יהי L מספר קווי השפה שאורכם יחידה אחת (קו שפה הוא צלע משותפת לשני משולשים או צלע של משולש אחד, כל קדקוד משותף לשנים או יותר משולשים). עבור $n=1$, שהוא המקרה הפשוט ביותר, $T=6$, $V=7$, $L=12$.

מהו המקרה הכללי? איך אפשר לבטא את L, V, T על-ידי n (מותר לנחש, עדיף להוכיח את הניחוש).

3. עליך להראות כי אי אפשר למצוא מספרים (ממשיים או מרוכבים) a,b,c ו- A,B,C כך שהמשוואה:

$$x^2+y^2+z^2=(ax+by+cz)(Ax+By+Cz)$$

היא זהות ביחס למשתנים בלתי תלויים x, y, z.

קובץ 9 – רמזים

1. גילוי אינדוקטיבי – כידוע – דורש התבוננות מעמיקה. נתבונן באגף הימיני של כל שוויון. נתבונן במספר הראשון ובמספר האחרון בצד שמאל של כל שוויון. איזה חוק כללי עולה בדעתך?

2. *רצוי לשרטט שרטוט*. זה עשוי לעזור לך לגלות את הכלל באופן אינדוקטיבי או להוביל אותך לקשרים בין L, V, T ל-n.

3. *האם ניתן לספק את התנאי?*
האם התנאי מספיק כדי לקצוב את ערכם של הנעלמים?
איך אפשר לחלק את התנאי לחלקים מתאימים?

קובץ 9 – פתרונות (חלקיים)

1. בשורה ה-n–ית האגף הימיני הוא כנראה n^3 והסכום באגף השמאלי הוא של n איברים. המחובר האחרון בסכום הוא המספר האי-זוגי ה-m-י או: $2m-1$ באשר $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

על-כן המחובר האחרון באגף השמאל הוא $2m-1=n^2+n-1$. את המחובר הראשון בסכום ניתן לראות בשתי דרכים שונות: קודם כל על-ידי הליכה אחורנית $n-1$ צעדים מהמחובר האחרון או על-ידי התקדמות של צעד אחד מהמחובר האחרון בשורה הקודמת:

$$(n^2+n-1)-2(n-1)=n^2-n+1$$

$$[(n-1)^2+(n-1)-1]+2=n^2-n+1$$

אבל

$$(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+\cdots+(n^2+n-1)$$

הוא הסכום של n איברים עוקבים בסדרה חשבונית שההפרש בין איבריה העוקבים הוא 2. סכום זה הוא:

$$\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2}-n=n^3$$

(אפשר לבדוק בדיקה מהירה שהשורה ה-n-ית מכילה n מחוברים שהאמצעי בהם הוא n^2).

2. היקפו של המשושה מכיל $6n$ קווי-שפה באורך יחידה, ו-$6n$ קדקודים. על-כן:

$$V=1+6(1+2+3+\cdots+n)=3n^2+3n-1$$

על-ידי שלושה אלכסונים העוברים דרך מרכזו, המשושה מחולק ל-6 משולשים (גדולים) שווי-צלעות. בחינת אחד מהם נותנת:

$$T=6(1+3+5+\cdots+2n-1)=6n^2$$

ל-T המשולשים יש ביחד $3T$ צלעות. בסכום זה כל קו חלוקה פנימי באורך 1 נמנה פעמיים. בעוד ש-$6n$ הקווים לאורך ההיקף של המשושה נמנים רק פעם אחת. לכן:

$$2L=3T+6n$$

$$L=9n^2+3n$$

(ממשפט אוילר על פאונים נובע כי $T+V=L+1$).

3. על-ידי פיתוח האגף הימני של השויון והשוואות מקדמים מתאימים מתקבל:

$$aA=bB=cC=1 \quad \Rightarrow \quad abcABC=1$$

$$bC+cB=cA+aC=aB+bA=0\Rightarrow$$

$$bC=-cB$$

$$cA=-aC$$

$$aB=-bA$$

על-ידי כפל שלושת השוויונות האחרונים מתקבל:

$$abcABC=-abcABC$$

ועל-כן $abcABC=0$, בסתירה למה שקיבלנו לעיל. לפיכך הזהות ההיפותטית בלתי אפשרית.

קובץ 10 – בעיות

1. ראובן מעוניין לקנות חלקת אדמה, אשר יש לה ארבעה קווי גבול כך ששני קווי גבול עוברים בדיוק בכיוון צפון-דרום והשנים האחרים עוברים בדיוק בכיוון מערב-מזרח. כמו כן כל קו גבול אורכו בדיוק 100 מטר. האם יוכל ראובן למצוא חלקה כזאת בישראל? (יש להניח כי החלקה צריכה להיות משטח ברמה אחת כלומר ללא הרים ובקעות וכדומה).

2. א. יש למצוא שלושה מספרים p,q,r כך שמשוואה הבאה תהיה זהות ביחס למשתנה x.

$$x^4+4x^3-2x^2-12x+9=\left(px^2+qx+r\right)^2$$

ב. הבעיה הנ״ל דורשת הוצאת שורש ריבועי ״מדויק״ מפולינום נתון ממעלה 4. דבר זה עשוי להיות אפשרי במקרה שלפנינו, אך בדרך כלל זה בלתי אפשרי. מדוע ?

3. ראובן, שמעון ולוי מטילים יחד. שמעון ולוי הם צועדים טובים. כל אחד מהם הולך p ק״מ בשעה. לראובן כואבת הרגל והוא נוהג במכונית קטנה שיש בה רק שני מקומות (נהג + נוסע אחד). המכונית עוברת c ק״מ בשעה. שלושת החברים אמצו לעצמם השיטה הבאה: הם מתחילים ביחד. לוי נוסע במכונית עם ראובן ושמעון הולך ברגל. כעבור זמן מה ראובן מוריד את לוי ולוי ממשיך ללכת. ראובן חוזר חזרה לאסוף את שמעון, ושניהם נוסעים במכונית עד שהם משיגים את לוי. בנקודה זאת הם מתחלפים. לוי נוסע במכונית ושמעון צועד, כפי שהיה בהתחלה, וחוזר חלילה.

א. איזו התקדמות עשה השלישייה במשך שעה ? (תשובה בק״מ).

ב. במשך איזה חלק מזמן הנסיעה יש במכונית רק נוסע אחד ?

ג. עליך לבדוק את המקרים המיוחדים $p=0$ ו-$p=c$.

4. הקדקוד שמול הבסיס בפירמידה נקרא: ״ראש הפירמידה״.

א. נקרא לפירמידה בשם ״שוות צלעות״ אם ראשה נמצא במרחקים שווים מכל קדקודי הבסיס. יש להוכיח כי בסיס של פירמידה שוות-צלעות חסום במעגל שמרכזו הוא בהיטל ראש הפירמידה על הבסיס (כלומר בעקב של הגובה היורד מראש הפירמידה אל בסיסה).

ב. נקרא עכשיו לפירמידה בשם ״שוות צלעות״ אם ראשה נמצא במרחקים (אנכיים) שווים מכל צלעות הבסיס. על סמך ההגדרה הזאת (השונה מהקודמת !) יש להוכיח כי בסיסה של פירמידה שוות צלעות חוסם מעגל שמרכזו הוא היטל ראש הפירמידה על הבסיס.

קובץ 10 – רמזים

1. *מה השאלה?* מהי משמעותה?

זוהי למעשה שאלה של פירוש: עליך לפרש את המונחים 'צפון', 'דרום', 'מזרח', 'מערב', 'שטוח' על גבי כדור הארץ בהנחה שהוא אכן בדיוק כדורי.

2. *האם ניתן לספק את תנאי הבעיה?*
האם התנאי מספיק כדי לקצוב את ערכו של הנעלם?
איך אפשר לפצל את התנאי לחלקים מתאימים?

3. *איך אפשר לפצל את התנאי לחלקים שונים? רצוי לרשום אותם.*

בין ההתחלה לבין הנקודה שבה שלושת החברים נפגשים שוב יש שלושה מצבים שונים:
א. ראובן נוסע עם לוי;
ב. ראובן נוסע לבדו;
ג. ראובן נוסע עם שמעון.

נקרא בשם t_3, t_2, t_1 למשך זמני הנסיעה בשלושת המצבים א', ב', ג' בהתאמה. איך אפשר לפצל את התנאי לחלקים מתאימים?

4. *האם מוכר לך משפט קרוב למשפט זה?*

במשולש שווה צלעות הגובה, מקדקוד מסוים אל הצלע שמולו, חוצה את הצלע. זהו משפט שקשור לבעיה הנתונה ומוכח קודם, באופן בלתי תלוי בה.

האם ניתן להשתמש בשיטת ההוכחה של משפט זה לפתרון הבעיה הנתונה?

המשפט על המשולש שווה-הצלעות מוכח על סמך חפיפת שני משולשים ישרי זווית שגובהם הוא הצלע המשותפת שלהם.

קובץ 10 – פתרונות (חלקיים)

1. חלוקת האדמה שראובן מעוניין לקנות מוגבלת בין שני קווי אורך ובין שני מעגלים מקבילים. הקשת של מעגל-רוחב המגבלת בין שני קווי אורך קבועים הולכת וקצרה ככל שמתרחקים מקו המשווה. על-כן מרכז החלקה שראובן מחפש מוכרח להיות על קו המשווה. הוא לא ישיג חלקה כזאת בישראל.

2. א. על-ידי השוואת מקדמים של חזקות שוות משני צידי השוויון נקבל:

$$1 = p^2, \quad 4 = 2pq, \quad -2 = q^2 + 2pr$$

$$-12 = 2qr, \quad 9 = r^2$$

משלוש המשוואות הראשונות בזו אחר זו מקבלים שתי מערכות של פתרונות: $p = -1,\ q = -2,\ r = 3$ ו-

$$p = 1,\ q = 2,\ r = -3$$

ב. בדרך כלל אי אפשר לספק מערכת שיש בה יותר משוואות מנעלמים.

3. א. שלושת החברים, ראובן, שמעון ולוי עברו מרחקים שווים מרגע צאתם לדרך עד רגע הגיעם למטרתם. על-כן (בהתאם לסימון בדף הרמזים)

$$ct_1 - ct_2 + ct_3 = ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3$$

המשוואה השנייה נותנת:

$$(c-p)t_1 = (c-p)t_3$$

הואיל ואנו מניחים כי $c > p$, נובע מכאן ש- $t_1 = t_3$, כלומר, שמעון ולוי הולכים בדיוק באותו זמן. מהמשוואה הראשונה אנו מוצאים כי:

$$(c-p)t_3 = (c+p)t_2$$

ומכך מתקבל:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{c+p}{c-p}$$

ועל-כן ההתקדמות לשעה היא:

$$\frac{c\,(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c\,(c+3p)}{3c+p}$$

ב. $$\frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c-p}{3c+p}$$

ג. במקרה הקיצוני שבו $p=0$ נקבל בחלק א׳ את התוצאה $\frac{c}{3}$ ובחלק ב׳ נקבל את התוצאה $\frac{1}{3}$.

אם $p=c$ נקבל בחלק א׳ c ובחלק ב׳ נקבל 0. ערכים אלה מתקבלים על הדעת באופן אינטואיטיבי.

4. בסיס הפירמידה הוא מצולע בעל n צורות. מקרה א׳ n המקצועות הצדדיים של הפירמידה שווים לזה לזה. במקרה ב׳ הגבהים (היורדים מראש הפירמידה) של n הפאות הצדדיות שווים זה לזה. נשרטט את גובהה של הפירמידה ונחבר את עקב הגובה אל n הקדקודים של הבסיס במקרה א׳ ואילו במקרה ב׳ נחבר את עקב הגובה לעקבי גבהים של הפאות. בשני המקרים יתקבלו n משולשים ישרי זווית חופפים. יש להם צלע משותפת – גובה הפירמידה – והיתר, שהוא מקצוע צדדי במקרה א׳ וגובה הפאה במקרה ב׳ – שווה אורך בכולם.

אי לכך הצלע השלישית במשולשים החופפים מוכרחה גם כן להיות שווה בכולם. מאחר שהצלע השלישית של כל אחד מהמשולשים הללו יוצאת מאותה נקודה (עקב גובה הפירמידה), וכל הצלעות האלה נמצאות באותו מישור (מישור הבסיס), הן יוצרות n רדיוסים של מעגל חוסם, או חסום בבסיס הפירמידה במקרים א׳ ו-ב׳ בהתאמה. במקרה ב׳ נותר להראות ש-n הרדיוסים הנ״ל ניצבים לצלעות המתאימות של הבסיס, אבל זה נובע ישירות ממשפט ידוע בהנדסת המרחב.

קובץ 11 – בעיות

1. נתון משושה משוכלל ונקודה במישור של המשושה. יש להעביר ישר דרך הנקודה הנתונה כך שהישר יחלק את המשושה לשני חלקים שווי-שטח.

2. האם הטענה הבאה נכונה: אם לרשותי מטבעות של אגורה, 5 אגורות, 10 אגורות, 25 אגורות ושל 50 אגורות, יש לי בדיוק 50 דרכים שונות בהן אוכל לשלם 50 אגורות. (דרך התשלום נקבעת לפי מספר המטבעות מכל סוג, בהן משתמשים להרכבת הסכום.) בכמה דרכים שונות אפשר לשלם 25 אגורות? מהי ההצדקה הבהירה ביותר לתשובתך?

3. יש לבנות משושה על-ידי כך שמוסיפים למשולש נתון כלשהו שלושה משולשים חיצוניים שווי-שוקיים הבנויים על צלעותיו כבסיסים, וזווית הראש שלהם היא בת 120°. האם נכונה הטענה ששלושת קדקודי המשושה שאינם קדקודיו של המשולש הנתון, הם קדקודים של משולש שווה-צלעות? (מספיק לבטא צלע אחת s של המשולש, שאמור להיות שווה-צלעות, באמצעות צלעותיו a,b,c של המשולש הנתון, באופן שהביטוי יהיה סימטרי ביחס ל- a,b,c).

4. עשרה אנשים יושבים סביב שולחן עגול. סך 10 שקלים צריך להתחלק ביניהם על-פי הכלל שכל אחד מקבל מחצית הסכום שמקבלים שני שכניו. האם יש יותר מדרך אחת לעשות זאת? עליך להוכיח את תשובתך.

קובץ 11 – רמזים

1. *האם עולה בדעתך בעיה קרובה לבעיה הנתונה שהיא יותר קלה לפתרון? בעיה כללית יותר מהבעיה הנתונה? אולי היא תימצא קלה יותר לפתרון ?*

2. *האם עולה בדעתך בעיה קרובה לבעיה הנתונה, שניתנת לפתרון יותר בקלות? בעיה כללית יותר? בעיה דומה?*
הנה למשל בעיה דומה פשוטה לחלוטין: בכמה דרכים ניתן לשלם סך של n אגורות כשמשתמשים במטבעות בנות אגורה, 5 אגורות, 10 אגורות, 25 אגורות ו-50 אגורות? בעיה זו אפשר לפתור על-ידי חקירת מקרים פרטיים כמו בטבלה שלהלן (E_n מסמן את מספר הדרכים לשלם n אגורות באמצעות חמישה סוגי מטבעות).

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9

אנו מעוניינים ב- E_{25} וב- E_{50} אבל השאלה היא כללית (לחשב את E_n על פי n) אבל עדיין 'מבודדת'.
הנה בעיה דומה ומאד מאד פשוטה: יש למצוא את A_n - מספר הדרכים לתשלום n אגורות כשמשתמשים אך ורק במטבעות בנות אגורה אחת. $(A_n = 1)$.

3. מועיל לעיתים *לשרטט שרטוט ולהכניס בו סימון מתאים*.
איך אפשר לקבל ביטוי עבור s? בשיטות אוקלידיות? בעזרת גיאומטריה אנאליטית? באמצעות טריגונומטריה? איזו שיטה נראית כשיטה המבטיחה ביותר?

4. רצוי *להכניס סימונים מתאימים. מהו התנאי?*
מהו הקשר בין חלקו של כל אחד לחלקיהם של שכניו? לחלקו של שכנו משמאל? מי מקבל הכי הרבה כסף?

קובץ 11 – פתרונות (חלקיים)

1. כל צורה מישורית בעלת מרכז סימטריה מתחלקת, על-ידי קו ישר העובר דרך מרכז הסימטריה, לשני חלקים שווי-שטח (כי הם חופפים). הקו הנדרש עובר, אפוא, דרך הנקודה הנתונה ומרכז הסימטריה של המשושה.

2. נסמן את מספר הדרכים לתשלום של n אגורות כך:

A_n אם משתמשים אך ורק במטבעות של אגורה.

B_n אם משתמשים אך ורק במטבעות של אגורה ו-5 אג'.

C_n אם משתמשים אך ורק במטבעות של אגורה, 5 ו- 10 אגורות.

D_n אם משתמשים אך ורק במטבעות של אגורה, 5, 10, ו-25 אגורות.

E_n אם משתמשים אך ורק במטבעות של אגורה, 5, 10, 25 ו-50 אגורות. (האם ברור לך כעת ההיגיון בסימון E_n בשאלה?)

נתבונן במקרה C_n. אם לא משתמשים באף מטבע של 10 אגורות, מספר הדרכים הוא B_n. אם משתמשים במטבע אחת לפחות של 10 אגורות, נשאר סכום של $n-10$ אגורות לתשלום על-ידי אגורות, 5 ו-10 אגורות.

לכן:
$$C_n = B_n + C_{n-10}$$

באופן דומה:

$$B_n = A_n + B_{n-5}$$
$$D_n = C_n + D_{n-25}$$
$$E_n = D_n + E_{n-50}$$

נוסחאות אלה נשארות נכונות עבור כל הערכים השלמים של n אם מגדירים

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

באשר, $A_n = B_n = C_n = D_n = E_n = 0, \quad n < 0$.

הנוסחאות מאפשרות חישוב הערכים של

A_n, B_n, C_n, D_n, E_n באופן רקורסיבי כלומר על-ידי הליכה אחורנית לערכים נמוכים יותר של n או לאותיות קודמות של האלף-בית האנגלי. דרך זאת מביאה אל הטבלה הבאה, אשר מכילה בין היתר גם ערכים עבור $E_{25} (= D_{25})$ ו- E_{50}.

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
E_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50

3. תהי α הזווית שמול הצלע a של המשולש הנתון. הצלעות השוות של המשולשים שווי השוקיים שבסיסיהם c, b הן בעלות אורך $\frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}$ בהתאמה. שתיים מהצלעות הללו יוצרות עם s משולש בו הזווית מול s היא $\alpha + \frac{\pi}{3}$. לפי משפט הקוסינוסים:

$$3s^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$$

נשתמש במשפט הקוסינוסים עבור המשולש הנתון כדי לבטא את $bc\cos\alpha$. נסמן $bc\sin\alpha = 2T$ באשר T הוא שטח המשולש הנתון. על סמך שני הביטויים האלה ניתן לקבל ביטוי עבור $bc\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$. אם נציב אותו לשוויון דלעיל, נקבל: $6s^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}T$

הואיל וביטוי זה של T הוא סימטרי ב- a, b, c הביטוי עבור s גם הוא סימטרי ב-a, b, c ועל-כן שלוש צלעות המשולש, הנוצר על-ידי קדקודי המשולשים שווי השוקיים, שוות זו לזו.

4. יהיו $A, B, C, D, \ldots, J$ האנשים סביב השולחן ו- $a, b, c, d, \ldots, j$ הסכומים שקיבלו בהתאמה. B יושב לימינו של A, C לימינו של B וכן הלאה..., A לימינו של J. חוק החלוקה ניתן לרשום כך:

$$b = \frac{a+c}{2}\ ,\ c = \frac{b+d}{2}\ ,\ d = \frac{c+e}{2}\ ,\ \ldots\ ,\ a = \frac{j+b}{2}$$

<u>פתרון ראשון</u>

מהמשוואות שלעיל נובע כי:

$$b - a = c - b = d - c = \ldots = a - j$$

כלומר שהסכום שכל אחד מקבל גבוה מזה של שכנו משמאל באותה מידה. מידה זאת מוכרחה להיות אפס מפני ש- $(b-a)+(c-b)+(d-c)+\ldots+(a-j)=0$, יש רק דרך אחת לחלוקת הכסף והיא לחלק שווה - שווה.

<u>פתרון שני</u>

מישהו (או מישהם) מוכרח לקבל את הסכום הכי גדול. נניח שזהו B. לכן כל המספרים $a, .., j$ קטנים או שווים ל-b. בפרט,

$$b - c \geq 0\ ,\ b - a \geq 0$$

אבל לפי תנאי הבעיה $b - a = -(b - c)$. לכן

$$b - a = b - c = 0.$$

כלומר A מקבל גם הוא את הסכום המכסימלי, וגם C וגם D וכך הלאה. לפיכך, $a = b = c = \ldots = j$.

קובץ 12 – בעיות

1. אוסף הבולים של ראובן מורכב משלושה ספרים. שתי עשיריות מהבולים נמצאות בספר ראשון, שביעיות אחדות של בולים – בספר השני ויש 303 בולים (שלוש מאות ושלושה) בספר השלישי. כמה בולים יש לראובן? (האם התנאים מספיקים לקציבת ערכו של הנעלם?)

2. קדקוד של טטראדר נקרא תלת-ריבועי אם שלושת המקצועות הנפגשים בקדקוד זה מאונכים אחד לשני. נתונים שטחים C,B,A של שלוש הפאות הקובעות קדקוד תלת-ריבועי בטטראדר. עליך למצוא את השטח D של הפאה הרביעית, זאת שנמצאת מול הקדקוד התלת-ריבועי. (איזו בעיה בהנדסת המישור מקבילה לדעתך, לבעיה זאת?)

3. יש לחלק משולש נתון, על-ידי שלושה חיתוכים ישרים, לשבעה חלקים שארבעה מהם משולשים (ושלושת הנותרים הם מחומשים). אחד מהחלקים המשולשים נוצר על-ידי שלושה החיתוכים. כל אחד משלושת המשולשים הנותרים נוצר על-ידי אחת מצלעות המשולש הנתון ושני חיתוכים.

א. האם אפשר לבחור את שלושת החיתוכים כך שארבעת המשולשים הנוצרים יהיו חופפים. עליך לתאר בצורה ברורה את אופן הביצוע של החיתוכים ולשרטט שרטוט מתאים.

ב. איזה חלק משטחו של המשולש הנתון מהוה השטח של כל אחד מארבעת המשולשים בחיתוך שבצעת בחלק א'? (עשוי להיות מועיל לבחון קודם צורה מיוחדת של המשולש הנתון, עבורה הפתרון יהיה קל במיוחד).

קובץ 12 – רמזים

1. *מהו הנעלם? מה הם הנתונים? מהו התנאי?*

2. *מהו הנעלם?*

השטח D של משולש הוא הנעלם. איך ניתן לקבל סוג זה של מידע? שטחו של משולש ניתן לחישוב באמצעות נוסחת הרון אם ידועות הצלעות. יהיו a, b, c אורכי הצלעות ונסמן ב-s את מחצית ההיקף $s = \frac{a+b+c}{2}$.

אזי $D^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$

הצלעות a, b, c הן במשולשים ישרי הזווית ששטחיהם A, B, C בהתאמה. יהיו הניצבים של משולשים אלה בעלי אורכים p, q, r כך ש-

$$a^2 = q^2 + r^2 \quad b^2 = r^2 + p^2 \quad c^2 = p^2 + q^2$$

כמו כן השטחים A, B, C נתונים על-ידי הנוסחאות:

$$A = \frac{1}{2}qr,\ B = \frac{1}{2}rp,\ C = \frac{1}{2}pq$$

לפנינו שבעה נעלמים D, a, b, c, p, q, r ומערכת של שבע משוואות לקצוב אותם. אבל יש עדיין בעיה – פתרון המערכת נראה סבוך ביותר ונוסחת הרון לא כל כך מעודדת לשימוש. ננסה, אפוא, גישה אחרת.

מהו נעלם? - השטח של משולש

איך ניתן לקבל סוג זה של מידע? – הדרך המוכרת ביותר לחישוב שטח היא לפי הנוסחה: $D = \frac{ah}{2}$, באשר a צלע המשולש, h הגובה לצלע זו, D שטח המשולש. מה קורה אם מכניסים h לשרטוט ומנסים להשתמש בו?

3. *האם עולה בדעתך בעיה קשורה לנתונה שקל יותר לגשת לפתרונה? בעיה יותר מיוחדת?*

קובץ 12 – פתרונות (חלקיים)

1. לראובן יש x בולים שמהם y שביעיות בספר השני. המספרים x ו-y הם מספרים חיוביים שלמים המקיימים את התנאי:

$$\frac{2x}{10}+\frac{yx}{7}+303=x$$

על-כן

$$x=\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 101}{28-5y}$$

המכנה באגף ימין מוכרח להיות חיובי אי-זוגי כי הוא מחלק את המונה שהוא אי-זוגי. דבר זה מותיר שלוש אפשרויות: $y=1,3,5$. רק האחרון (5) נותן מכנה שהוא מחלק את המונה. לכן הנעלמים נקצבים באופן יחיד $y=5$ ו- $x=3535$.

2. מישור העובר דרך h ודרך הקדקוד התלת-ריבועי חותך את הטטראדר במשולש ישר-זווית שיש לו יתר h, ניצב אחד p והניצב השני, נגיד k, שהוא הגובה הניצב לצלע a במשולש ששטחו A. על-כן

$$A=\frac{1}{2}ak \quad \text{ו-} \quad h^2=k^2+p^2$$

הואיל ו- $2D=ah$ יוצא משני השוויונים האחרונים ש-

$$4D^2=a^2h^2=a^2(k^2+p^2)=4A^2+(rp)^2+(pq)^2$$

שימוש בשתי משוואות נוספות מהרמזים וחילוק ב-4 נותן לבסוף שוויון

$$D^2=A^2+B^2+C^2$$

שהוא מקביל למשפט פיתגורס בגיאומטריית המישור.

3. נתייחס תחילה למקרה הפרטי הפשוט ביותר, זה של משולש שווה-צלעות. סימטריה מוליכה להשערה שבמקרה זה ארבעת החלקים המשולשים יהיו גם הם שווי-צלעות. אם כך הדבר, אז צלעותיהם של החלקים

המשולשים מוכרחות להיות מקבילות לצלעות המשולש הנתון. דבר זה מוביל לתצורה הפותרת את המקרה הכללי כמו גם את המקרה הפרטי של המשולש שווה הצלעות: על-ידי ארבעת מקבילים לצלע של המשולש הנתון, נחתוך כל אחת משתי הצלעות האחרות ל-5 קטעים שווים. נבצע בניה זאת שלוש פעמים (לגבי כל צלע של המשולש הנתון). בכך נקבל חלוקה של המשולש ל-25 משולשים חופפים הדומים למשולש הנתון. מ-25 משולשים אלה נוציא בנקל את ארבעת המשולשים הנדרשים בבעיה, השטח של כל אחד מהם הוא 1/25 של השטח של המשולש הנתון. (יחידות הפתרון לא הוכחה!)

קובץ 13 – בעיות

1. מכפלת גילו של רב החובל במספר ילדיו ובאורך ספינתו היא 32118. אורך הספינה נתון במטרים, לרב החובל יש גם בנים וגם בנות, גילו עולה על מספר ילדיו אך טרם מלאו לו 100 שנה. מהו גילו, כמה ילדים יש לו ומהו אורך ספינתו של רב החובל ? עליך לנמק תשובתך. (שלושת המספרים הדרושים הם שלמים.)

2. יש לפתור את המערכת הבאה :

$$\begin{cases} x+y+u=4 \\ y+u+v=-5 \\ u+v+x=0 \\ v+x+y=-8 \end{cases}$$

מן הראוי לחפש קיצור דרך !

3. נתבונן בטענה: "בכל משולש סכום שלושת ה... גדול ממחצית ההיקף". אם מציבים במקום שלוש הנקודות בזה אחר זה:
א) גבהים
ב) תיכונים
ג) חוצי זוויות
מתקבלות על-ידי כך שלוש טענות שונות. האם כל אחת מהן היא טענת אמת או טענת שקר? עליך להוכיח את תשובתך.

4. נשים לב לכך שהסכום: $1!1+2!2+3!3+\cdots+n!n$

הוא $1,\ 5,\ 23,\ 119$ עבור $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ בהתאמה. מהו הכלל ?

מומלץ לבחון מקרים פרטיים נוספים לפני ניסוח השערתך. עליך להוכיח את טענתך.

קובץ 13 – רמזים

1. *מהו הנעלם?* יהיו x, y, z מספרי הילדים, גיל רב החובל ואורך הספינה בהתאמה. אפשר לחשוב על הבעיה כך: הנעלם הוא שלישיית מספרים (x, y, z).

איך אפשר להפריד את תנאי הבעיה לחלקים שונים? לרשום אותם?

א. x, y, z הם שלמים חיוביים שונים מ-1 המקיימים $xyz = 32118$.

ב. $4 \le x < y < 100$.

איזה משני התנאים א', ב' ניתן לטיפול יותר בקלות?

2. כדי לפתור מערכת כזאת יש למצוא דרך לצרף את המשוואות. נשים לב לכך שכל תמורה של x, y, u, v משאירה את אגפי שמאל של המערכת זהים לאגפי שמאל של המערכת המקורית. סימטריה זאת מציעה לטפל בארבע המשוואות באופן סימטרי.

3. *האם אפשר לחשוב על בעיה קרובה שקל יותר לגשת אליה? על בעיה כללית יותר?* מה משותף לכל שלוש הטענות? הניתן להכליל? כל טענה מתייחסת לאי-שוויון. האם מוכר לך משפט שיוכל להיות שימושי?

4. גילוי אינדוקטיבי מצריך התבוננות. היש תבנית אחידה למקרים הפרטיים בהם התבוננת?

קובץ 13 – פתרונות (חלקיים)

1. נפרק את 32118 לגורמים ראשוניים ונקבל $2\times3\times53\times101$. יש רק שש דרכים לפרק מספר זה למכפלה של שלושה גורמים שכולם שונים מ-1.

$$6\times53\times101 \qquad 2\times101\times159$$

$$3\times101\times106 \qquad 2\times53\times303$$

$$3\times53\times202 \qquad 2\times3\times5353$$

רק הפירוק הראשון $6\times53\times101$ מכיל שני גורמים בין 4 ל-100. על-כן לרב החובל יש 6 ילדים, הוא בן 53 ואורך ספינתו 101 מטר.

2. הביטוי $s=x+y+u+v$, שנשמר עם כל תמורה של x,y,u,v, מקבל ערך $s=3$ על-ידי חיבור ארבע המשוואות. על-ידי כך מצטמצמת המערכת לארבע המשוואות הבאות:

$$s-x=-5$$

$$s-y=0$$

$$s-u=-8$$

$$s-v=4$$

ועל-כן

$$x=2, y=-3, u=5, v=-7$$

3. טענה א' שקרית, טענות ב' ג' אמיתיות. כאשר שלושת הגבהים, שלושת התיכונים ושלושת חוצי הזוויות מונחים בתוך המשולש (כפי שקורה בכל המקרים פרט לגבהים במשולש קהה זווית או ישר-זווית) לפנינו המצב הבא: A, B, C הם קדקודי המשולש, A', B', C' הן נקודות פנימיות על הצלעות הנגדיות בהתאמה, ועלינו לבחון את הסכומים המתאימים: $AA'+BB'+CC'$. מאחר שהסכום של כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית קיים:

$$AA' + A'B > AB$$

$$AA' + A'C > AC$$

על-ידי חיבור נקבל:

$$2AA' + BC > AB + CA$$

ובאופן דומה:

$$2BB' + CA > BC + AB$$

$$2CC' + AB+ > CA + BC$$

על-ידי חיבור שלושת האי-שוויונים נקבל:

$$2(AA' + BB' + CC') > AB + BC + CA$$

על-כן טענות ב׳, ג׳ נכונות וטענה א׳ נכונה למשולשים חדי זוויות. כדוגמא נגדית לטענה א׳ נתייחס למשולש שווה שוקיים שבסיסו b וזוויות הבסיס שלו A. כש-A שואף ל-0 כל גובה שואף ל-0 ואילו ההיקף שואף ל-$2b$, זווית A די קרובה ל-0 מפריכה את טענה א׳.

4. המקרים הפרטיים מעלים את ההשערה:

$$1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n = (n+1)! - 1$$

ניתן להוכיח זאת באינדוקציה מתמטית או באופן הבא:

$$(n+1)! - n! = n!(n+1) - n! = n!n$$

על-כן, עבור $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ מתקיים:

$$1!1 = 2! - 1!$$

$$2!2 = 3! - 2!$$

$$3!3 = 4! - 3!$$

....

$$n!n = (n+1)! - n!$$

חיבור משוואות אלה נותן את התוצאה הנדרשת.

קובץ 14 – בעיות

1. אליעזר וארנון גרים בקצוות שונים של אותו רחוב. אליעזר צריך להעביר חבילה אל ביתו של ארנון, וארנון צריך להעביר חבילה אל ביתו של אליעזר.
הם מתחילים באותו זמן והולכים בקצב קבוע, כל אחד מהם חוזר לביתו בלי להשתהות כלומר מיד עם הנחת החבילה במקום שאליו היא מיועדת.
בפעם הראשונה נפגשו אליעזר וארנון במרחק a מטר מביתו של אליעזר ובפעם השנייה במרחק b מטר מביתו של ארנון.
א. מהו אורך הרחוב ?
ב. אם $a=300$ ו - $b=400$, מי הולך יותר מהר ?

2. מטבעות של 10 אגורות (עיגולים שווים) מונחות בצורה מאורגנת על פני שולחן מאד-מאד גדול (המישור האינסופי). נבדוק שתי צורות ארגון:
בראשונה, כל מטבע נוגעת בארבע מטבעות אחרות, והקווים הישרים המחברים את מרכזי המטבעות שנוגעות זו בזו מחלקים את המישור לריבועים שווים.
בשנייה, כל מטבע נוגעת בשש מטבעות אחרות, והקווים הישרים המחברים את מרכזי המטבעות שנוגעות זו בזו מחלקים את המישור למשולשים שווי-צלעות שווים.
עליך לחשב את שטח המישור המכוסה על-ידי מטבעות בכל אחד משני המקרים.

3. יש להוכיח: אם n הוא מספר שלם גדול מ-1 אז $n^{n-1}-1$ מתחלק ב- $(n-1)^2$.

4. נבנה ריבוע (חיצוני) על כל צלע של משולש (הנתון באופן שרירותי). אותם ששה קדקודים של שלושת הריבועים שבנינו, אשר אינם מתלכדים עם קדקודי המשולש, יוצרים משושה. שלוש צלעות של משושה זה, כמובן, שוות לצלעות המתאימות של המשולש. יש להראות כי כל אחת משלוש הצלעות האחרות שווה לכפלים אחד התיכונים.

קובץ 14 – רמזים

1. *מהו הנעלם? מה הם הנתונים? מהו התנאי?*
הניתן לרשום משוואה שמבטאת חלק מהתנאי?
יש לזכור כי משוואה מבטאת את אותה כמות בשני אופנים שונים.

2. *כדאי לשרטט שרטוט.* מה הקשר בין אחוז המישור המכוסה על-ידי המטבעות לבין האחוז של כל אחד מהריבועים השווים או המשולשים השווים המכוסה על-ידי המטבעות?

3. מהי ההנחה? מהי המסקנה? – ההנחה היא כי n הוא מספר שלם גדול מ-1. המסקנה היא:
$$n^{n-1}-1=(n-1)^2\,P(n)$$
באשר $P(n)$ הוא מספר שלם התלוי ב-n.

4. *כדאי לשרטט שרטוט, ולהכניס בו סימון מתאים*
איך ניתן להראות שהיחס בין קטעים הוא $1:2$?

קובץ 14 – פתרונות (חלקיים)

1. נשתמש בסימון הבא:

<u>מהירות</u>: u עבור אליעזר, v עבור ארנון.

<u>זמן</u>: t_1 עבור הזמן שבין התחלת ההתקדמות לבין הפגישה הראשונה,

t_2 עבור הזמן שבין התחלת ההתקדמות לבין הפגישה השנייה.

<u>מרחק</u>: d עבור אורך הרחוב.

מתקיים:

$$ut_1 = a\ , \qquad ut_2 = d + b$$
$$vt_1 = d - a\ , \quad vt_2 = 2d - b$$

א. על-ידי ביטוי $\frac{u}{v}$ בשתי דרכים שונות, נקבל:

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d+b}{2d-b}$$

על-כן: $d = 3a - b$

ב. אליעזר צועד יותר מהר: $\frac{u}{v} = \frac{3}{2}$.

2. במקרה הראשון $\frac{100\pi}{4}$, במקרה השני $\frac{100\pi}{2\sqrt{3}}$ או במקורב 78.54% ו-90.69% בהתאמה. מעבר משולחן גדול (ריבועי) למישור אינסופי מערב את מושג הגבול אך אנו לא עומדים על כך כי התוצאה היא אינטואיטיבית.

3. קודם כל, אם n גדול מ-1 המנה של $n^{n-1} - 1$ ו- $n-1$ היא: $n^{n-2} + n^{n-3} + \cdots + n + 1$

נתייחס לסכום זה כאילו התקבל על-ידי הצבת $n-1$ עבור x בפולינום:

$$R(x) = (1+x)^{n-2} + (1+x)^{n-3} + \ldots + (1+x) + 1$$

בפיתוח של $R(x)$ לחזקות של x (למשל באמצעות נוסחת הבינום), האיבר החופשי מ- x הוא $R(0) = n-1$ ועל-כן

$$R(x)=Q_{n-3}(x)\cdot x+n-1$$

באשר $Q_{n-3}(x)$ הוא פולינום מדרגה $n-3$ שמקדמיו שלמים. עכשיו נציב $n-1$ עבור x ונסכם:

$$\begin{aligned} n^{n-1}-1&=(n-1)\,R(n-1)\\ &=(n-1)[Q_{n-3}(n-1)\cdot(n-1)+n-1]\\ &=(n-1)^2\,[Q_{n-3}(n-1)+1)] \end{aligned}$$

4. יהיו A, B, C הקדקודים של המשולש הנתון, ויהיו a, b, c אורכי הצלעות הנגדיות בהתאמה. נסמן ב- a' את אורך הצלע של המשושה הנמצאת מול a. אם משרטטים שרטוטים שונים ומתבוננים במקרים קיצוניים, רואים כי יש להוכיח $a'=2am$ באשר a_m הוא אורך התיכון של ΔABC המגיע לצלע שאורכה a. נאריך את AC עד D כך ש- $AD=b$ ונחבר D עם B. עכשיו $\Delta CDB\sim\Delta CAA'$ באשר A' היא נקודת האמצע של BC כך $AA'=a_m$. על-כן התיכון של ΔABC שאורכו a_m מקביל ל- BD ו-

$$a_m=\frac{BD}{2}.$$

אבל המשולש שצלעותיו הן באורך a',b,c חופף למשולש ΔABC (צ.ז.צ.). על-כן:

$$a_m=\frac{a'}{2}.$$

קובץ 15 – בעיות

1. בחנות למכשירי כתיבה הנמצאת מול בית-הספר התיכון הוצעו למכירה עטים מיוחדים במינם ב-50 ש״ח העט. הואיל וקצב המכירה לא השביע את רצון בעל החנות, הוא הוריד את מחיר העט ואז מכר את כל העטים שהיו לו עבור סכום כולל של 3,193 ש״ח. מה היה המחיר המוזל? (האם התנאי מספיק לקציבת ערכו של הנעלם?)

2. הנקודה P נמצאת בתוך מלבן כך שמרחקה מאחד מקדקודיו של המלבן 5 ס״מ, מרחקה מהקדקוד הנגדי 14 ס״מ ומהשלישי 10 ס״מ. מה מרחק הנקודה מהקדקוד הרביעי?

3. עליך להוכיח את הזהות:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{8}=\frac{\sin\alpha}{8\sin\frac{\alpha}{8}}$$

4. מתוך 12 משולשים שווי- צלעות חופפים, 8 הם פנים של אוקטאדר משוכלל (תמנון) וארבעה הם פנים של טטראדר משוכלל (ארבעון). יש למצוא את היחס בין נפח האוקטאדר לנפח הטטראדר.

קובץ 15 – רמזים

1. *מהו הנעלם? מה הם הנתונים? מהו התנאי?*

2. *האם עולה בדעתך בעיה קשורה לזאת שהיא קלה יותר לפתרון? בעיה כללית יותר?*

   הנה בעיה כללית יותר: הנקודה P מונחת בתוך מלבן ומרחקיה מארבעה קדקודים (בכוון סיבוב השעון) הם a, b, c, d. יש לחשב את d באמצעות a, b, c.

3. *האם מוכר לך משפט הקשור לעניין?* האם יש זהות פשוטה יותר אך מקבילה לזאת?

4. *מהו הנעלם?* - הנעלם הוא היחס בין הנפח של אוקטאדר משוכלל לבין הנפח של טטראדר משוכלל. מה יש לאוקטאדר ולטטראדר במשותף? – פניהם עשויים ממשולשים שווי-צלעות חופפים; מקצועותיהם שווים.

   האם יש דרך לנסח מחדש את הבעיה? האם ידועה לך דרך לחשב את הנפח של אוקטאדר משוכלל ושל טטראדר משוכלל כשנתון אורך המקצוע?

   רצוי לשרטט שרטוט ולהכניס סימון מתאים. פתרון הבעיה בהנדסת המרחב פעמים רבות תלוי ב"צורת המפתח" (צורת היסוד) המישורית הפותחת פתח ליחסים חשובים.

קובץ 15 – פתרונות (חלקיים)

1. הסימון של המחיר המוזל הוא x ש"ח ויש לסוחר *מלאי* של y עטים. ידוע כי:

$$x \cdot y = 3{,}193 \quad \text{ו-} \quad x < 50$$

אבל $3193 = 31 \cdot 103$ כלומר 3193 הוא מכפלה של שני מספרים ראשוניים ועל-כן יש לו בדיוק ארבעה מחלקים שלמים.

אם מניחים ש-x הוא מספר שלם אז $x=1$ או $x=31$.
אם מניחים גם ש- $x>1$ אז $x=31$.

2. יהיו מרחקיה של P מארבע צלעות המלבן x, y, x', y' בסדר מעגלי. אם בוחרים בהתאם את הסימון מקבלים:

$$a^2 = y'^2 + x^2 , \quad b^2 = x^2 + y^2$$

$$c^2 = y^2 + x'^2 , \quad d^2 = x'^2 + y'^2$$

ועל-כן $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

במקרה שלנו $a = 5 , b = 10, c = 14$

לפיכך,

$$d^2 = 25 - 100 + 196 = 121$$

$$d = 11$$

חשוב לשים לב כי הנתונים a,b,c הקוצבים את d אינם מספיקים לקציבת הצלעות $x+x'$, $y+y'$ של המלבן.

3. נציב בזהות הידועה $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ את $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{8}$ עבור α. נקבל:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}};\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{4}};\cos\frac{\alpha}{8} = \frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{2\sin\frac{\alpha}{8}}$$

אם נכפול את שלוש המשוואות, נקבל, אחרי ביטולים של האיברים המתאימים, את הזהות הדרושה. אילו היינו ממשיכים ל-n משוואות עוקבות במקום השלוש שלעיל, המכפלה הייתה נותנת:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos 8\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

אפשר לגשת לפתרון גם אחרת: לשער את הנוסחה הכללית הזאת ואחר כך להוכיח אותה באינדוקציה.

4. יהי O נפח האוקטאדר, T נפח הטטראדר, a אורך המקצוע.
<u>*פתרון ראשון*</u>: את האוקטאדר אפשר לחלק על-ידי מישור מתאים לשתי פירמידות משוכללות שהבסיס המשותף שלהן הוא ריבוע בעל שטח a^2. הגובה של כל פירמידה כזאת הוא $a \cdot \sqrt{2}$ (צורת היסוד המישורית הנזכרת ברמזים עוברת דרך האלכסון של הבסיס) ועל-כן:

$$O = 2 \cdot \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

נעביר מישור דרך הגובה (שאורכו h) של הטטראדר ודרך מקצוע שיש לו נקודת קצה משותפת עם הגובה. החתך (שהוא צורת היסוד המישורית כאן) מחולק על-ידי הגובה לשני משולשים ישרי-זווית שמהם אנחנו מקבלים:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

ועל-כן

$$T = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

לבסוף:

$$O = 4T$$

<u>*פתרון שני*</u>: הטטראדר המשוכלל שמקצועו $2a$ הוא בעל נפח 2^3T. ארבעה מישורים שכל אחד מהם עובר דרך נקודות האמצע של שלושה מקצועות בעלי קדקוד משותף, מחלקים את הטטראדר הזה לארבעה טטראדרים משוכללים שכל אחד נפחו T, וטטראדר חמישי שנפחו O. על-כן:

$$4T + O = 8T \Rightarrow O = 4T$$

קובץ 16 – בעיות

1. לפניך מערכת 3 משוואות בנעלמים x, y, z. מהו הפתרון?

$$5732x + 2134y + 2134z = 7866$$
$$2134x + 5732y + 2134z = 670$$
$$2134x + 2134y + 5732z = 11464$$

2. ביום חם שתו ארבעה זוגות 44 בקבוקי מים. שרון שתתה 2, בתיה שתתה 3, נורית שתתה 4 ודפנה 5 בקבוקים. מר מושב שתה אותו מספר בקבוקים כמו אשתו, אך כל אחד מיתר הגברים שתה יותר מאשר אשתו: מר לונדון שתה כפליים, מר בונה פי שלושה ומר הדר פי ארבעה בקבוקים. מי היא אשתו של מי (רשום את שמות המשפחה של הגברות).

3. לפניך מערכת של שלוש משוואות בנעלמים x, y, z (a, b, c נתונים), מהו הפתרון שלה?

$$x^2y^2 + x^2z^2 = axyz$$
$$y^2z^2 + y^2x^2 = bxyz$$
$$z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz$$

4. פירמידה נקראת משוכללת אם הבסיס שלה הוא מצולע משוכלל ועקב הגובה שלה הוא במרכז הבסיס. לפירמידה משוכללת יש בסיס משושה שמידת שטחו היא רבע ממידת שטח הפנים S של הפירמידה. גובה הפירמידה הוא h. יש לבטא את S על-ידי h.

קובץ 16 – רמזים

1. על מנת לפתור מערכת כזאת יש לצרף את המשוואות בדרך כלשהי. המערכת של שלושת האגפים השמאליים היא סימטרית ביחס ל- x, y, z כלומר היא אינה משתנה תחת תמורה של x, y, z. מכאן עולה הצעה לטפל בכל שלוש המשוואות באופן סימטרי.

2. ברור שמספר האפשרויות מלכתחילה מוגבל $(4!=24)$ אך אם נוהגים בתבונה לא הכרחי לבחון את כולן. *כדאי להפריד את התנאי לחלקיו השונים, ולרשום אותם.* הסימון הבא יכול לסייע: יהיו m,l,b,h מספרי הבקבוקים ששתו גברת משב, לונדון, בונה והדר בהתאמה.

3. ר׳ רמז לשאלה 1. צעד טבעי ראשון יהיה לבודד ולחלץ את המכפלה xyz באגף ימין על-ידי חילוק, אך דבר זה מחייב לבדוק תחילה את המקרים שבהם מכפלה זאת מתאפסת.

4. לעיתים מועיל *לשרטט שרטוט, ולהכניס סימון מתאים.* הפתרון לבעיה בהנדסת המרחב פעמים רבות, תלוי בצורת מפתח מישורית.

קובץ 16 – פתרונות (חלקיים)

1. הביטוי הסימטרי הפשוט ביותר ב- x, y, z הוא סכומם. על-ידי חיבור שלוש המשוואות נקבל:

$$10000x + 10000y + 10000z = 20000$$

$$x + y + z = 2$$

על-ידי חיסור $2134x + 2134y + 2134z = 4268$ מכל אחת מהמשוואות אנו מקבלים מערכת חדשה של שלוש משוואות וכשפותרים אותה מתקבל:

$$.\ x = 1,\ y = -1,\ z = 2$$

2. אפשר בנקל להפריד את התנאי לשני חלקים הניתנים לביטוי על-ידי שתי משוואות כך:

$$m + l + b + h = 14$$

$$m + 2l + 3b + 4h = 30$$

על-ידי חיסור הראשונה מהשנייה מקבלים $l + 2b + 3h = 16$, דבר המראה כי l ו-h שניהם אי-זוגיים או שניהם זוגיים. על-כן יש רק ארבעה מקרים אפשריים הטעונים בחינה:

l	h	$b = 8 - (l + 3h)/2$
3	5	-1
5	3	1
2	4	1
4	2	3

רק המקרה האחרון הוא קביל. על-כן

$$h = 2,\ b = 3,\quad l = 4,\quad m = 5$$

והגברות הן: שרון הדר, בתיה בונה, נורית לונדון ודפנה משב.

3. אם $x=0$ המשוואה השנייה (או השלישית) נותנת $y^2z^2=0$ ואז לפחות עוד אחד מהנעלמים מתאפס. לפיכך או ששלושת הנעלמים x,y,z לא מתאפסים או שלפחות שניים מהם מתאפסים. אם שני משתנים כלשהם מתאפסים, השוויונים מתקיימים.

נתבונן במקרה בו אף אחד מהמשתנים אינו אפס. על-ידי חילוק מקבלים את המערכת:

$$\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=a$$

$$\frac{yz}{x}\qquad+\frac{xy}{z}=b$$

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\qquad=c$$

על-ידי חיבור שלוש המשוואות האלו וחילוק ב-2 מקבלים:

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}=\frac{a+b+c}{2}$$

ממשוואה זאת נחסר כל אחת משלוש המשוואות של המערכת הקודמת ונקבל:

$$\frac{yz}{x}=\frac{-a+b+c}{2}$$

$$\frac{zx}{y}=\frac{a-b+c}{2}$$

$$\frac{xy}{z}=\frac{a+b-c}{2}$$

המכפלה של שלוש משוואות אלו היא:

$$xyz = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8} \qquad (*)$$

נחלק אותה בכל אחת מהמשוואות של המערכת הקודמת ונקבל, לאחר הוצאת שורש ריבועי,

$$x = \frac{[(a-b+c)(a+b-c)]^{1/2}}{2}$$
$$y = \frac{[(-a+b+c)(a+b-c)]^{1/2}}{2}$$
$$z = \frac{[(-a+b+c)(a-b+c)]^{1/2}}{2}$$

עלינו לקחת בחשבון את שני הערכים בהוצאת שורש ריבועי. נתרכז במקרה פרטי המבטיח לקחים. נניח כי a,b,c הם אורכי שלוש הצלעות במשולש כלשהו. על פי המשוואה המסומנת (*) לעיל המכפלה xyz היא חיובית ועל-כן מתקבלות רק ארבע אפשרויות עבור הסימנים והן:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & + & - & - \\ y & + & - & + & - \\ z & + & - & - & + \end{array}$$

4. נעביר מישור דרך גובה הפירמידה ודרך נקודת האמצע של אחת הצלעות (באורך a) של הבסיס שלה. החיתוך של מישור זה עם הפירמידה הוא משולש שווה-שוקיים שיוכל לשרת כצורת המפתח המישורית: גובהו h, אורך השוק הוא l (באשר l הוא הגובה של אחת מדפנות הפירמידה) ובסיסו $2b$ (באשר b הוא הגובה של אחד משׁשה המשולשים שווי הצלעות החופפים המרכיבים את הבסיס של הפירמידה).

שטח בסיס הפירמידה הוא:

$$\frac{S}{4} = \frac{6ab}{2}$$

שטח הפנים של הפירמידה הוא:

$$\frac{3S}{4} = \frac{6al}{2}$$

ועל-כן

$$l = 3b$$

על-ידי שימוש בצורת המפתח המישורית נקבל

$$h^2 + b^2 = l^2 = 9b^2$$

ועל-כן

$$b^2 = \frac{h^2}{8}$$

אנו יודעים גם כי

$$b^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

ועל-כן

$$a^2 = \frac{4b^2}{3} = \frac{h^2}{6}$$

לפיכך

$$S = 12ab = h^2\sqrt{3}$$

קובץ 17 – בעיות

1. יש לפתור את המערכת

$$2x^2 - 4xy + 3y^2 = 36$$
$$3x^2 - 4xy + 2y^2 = 36$$

2. כל אחד מארבעת המספרים a,b,c,d הוא חיובי וקטן מ-1. יש להראות שלא כל ארבע המכפלות הבאות גדולה מ-1:

$$4a(1-b),\ 4b(1-c),\ 4c(1-d),\ 4d(1-a)$$

3. נבנה על כל צלע של משולש ישר-זווית ריבוע חיצוני (כפי שבדרך כלל עושים להמחשת משפט פיתגורס). נחבר את קדקודי הזווית הישרה של המשולש אל מרכז הריבוע הבנוי על היתר ונחבר את מרכזי הריבועים של שתי הצלעות האחרות. יש להראות כי שני הקטעים המתקבלים בדרך זאת הם:
   א. מאונכים זה לזה
   ב. בעלי אותו אורך

4. חמישה מקצועות של הטטראדר הם בעלי אורך a והמקצוע השישי אורכו b.
   א. עליך לבטא את רדיוס הכדור החוסם את הטטראדר באמצעות a ו- b.
   ב. כיצד אפשר להשתמש בתוצאה של סעיף א׳ כדי לקצוב באופן מעשי את הרדיוס של משטח כדורי (של עדשה למשל)?

קובץ 17 – רמזים

1. פתרון אחד קל לנחש אבל עליך למצוא את כל הפתרונות. ידיעה בהנדסה אנאליטית אינה נחוצה לשם פתרון הבעיה, אך יכולה לעזור בהבנת התוצאות – כיצד?
נשים לב כי המערכת היא סימטרית ביחס לשני הנעלמים x, y.

2 נשים לב כי הקבוצה של ארבע המכפלות סימטרית ביחס ל- a, b, c, d. סימטריה זאת צריכה באיזשהו אופן להשתקף בפתרון.

3. *רצוי לשרטט שרטוט ולהכניס סימון מתאים*. נסמן את קדקודי המשולש A, B, C באשר C הוא קדקוד הזווית הישרה. יהיו A', B', C' מרכזי הריבועים הבנויים על הצלעות BC, CA, AB בהתאמה. בשרטוט שהכנת C נראה כמונח על הקו $A'B'$. האם נראה לך איזשהו יתרון בהוכחת השערה זאת?

4. *רצוי לשרטט שרטוט ולהכניס סימון מתאים*. הפתרון לבעיה בהנדסת המרחב תלוי פעמים רבות ב"צורת מפתח מישורית".

קובץ 17 – פתרונות (חלקיים)

1. עלינו למצוא את נקודות החיתוך של שתי אליפסות חופפות, סימטריות זו לזו ביחס לקו $x=y$. חיסור המשוואות נותן $x^2=y^2$. יש ארבע נקודות חיתוך $(-6,-6)$ $(6,6)$ $(2,-2)$ $(-2,2)$.

2. מכפלת ארבע המכפלות היא ביטוי סימטרי ב- a,b,c,d.
אם נוכל להראות כי:
$$4a(1-b)\,4b(1-c)\,4c(1-d)\,4d(1-a)\le 1$$
ינבע מכך שלא כל ארבע המכפלות גדולות מ-1.

ידוע כי $0<a<1,\,0<b<1,\,0<c<1,\,0<d<1$. נתבונן במכפלה $4a(1-a)$ שהיא חיובית מפני שגורמיה חיוביים. מהו המכסימום שלה? ניחוש מובן מאליו הוא שהמכסימום שווה ל-1 והוא מתקבל עבור $a=\frac{1}{2}$. על מנת לאמת זאת נשים לב ש-
$$1-4a(1-a)=(1-2a)^2\ge 0$$
ושוויון מתקבל רק עבור $a=\frac{1}{2}$. במקביל, המכפלות $4b(1-b),4c(1-c),4d(1-d)$ גם כן חיוביות ולא עולות על 1.
לפיכך,
$$4a(1-a)\;\;4b(1-b)\;\;4c(1-c)\;\;4d(1-d)\le 1$$
ועל-ידי שינוי בסדר הגורמים:
$$4a(1-b)\;\;4b(1-c)\;\;4c(1-d)\;\;4d(1-a)\le 1$$

3. א. מאחר ש- $\angle B'CA=\angle A'CB=45^\circ$ ו- $\angle C=90^\circ$, C מונחת על הקטע $A'B'$.

ΔABC ו- $\Delta ABC'$ שניהם ישרי זווית. ניתן לחסום אותם במעגל בעל קוטר AB. זוויות $\angle ACC'$ ו- $\angle BCC'$ כולאות קשתות שוות של המעגל על-כן הן שוות.
לפיכך,

$$\angle B'CC' = \angle A'CC' = 90°$$

ב. אם צלעות המשולש הן בעלות אורך a,b,c הרי שהקטע $B'C$ אורכו $\frac{b}{\sqrt{2}}$, הקטע $A'C$ אורכו $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ולכן אורך הקטע $A'B'$ הוא $\frac{(a+b)}{\sqrt{2}}$.

יהי D הקדקוד שמול A בריבוע על הצלע b. אז $\Delta ACC' \sim \Delta ADB$ (הזוגות של זוויות מתאימות חופפות). לכן

$$CC' : AC = DB : AD$$

ו- CC' גם הוא בעל אורך $\frac{(a+b)}{\sqrt{2}}$.

(הוכחה, באמצעות טרנספורמציות, של המקרה הכללי בו המשולש איננו בהכרח ישר-זווית נמצאת ב [22] עמ' 96-97).

4. א. נעביר מישור דרך המקצוע שאורכו b ונקודת האמצע M של המקצוע הנגדי. החיתוך של מישור זה עם הטטראדר הוא משולש שווה שוקיים שיכול לשמש כ"צורת המפתח": בסיסו הוא בעל אורך b, ושוקיו הן באורך $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (הן משמשות כגבהים של הפאות שוות השוקיים של הטטראדר), לכן גובהו: $\frac{\sqrt{3a^2-b^2}}{2}$. לפי שיקולי סימטריה, המרכז O של הכדור החוסם נמצא על הישר המחבר את M עם נקודת האמצע B של בסיס המשולש הזה. כמו כן הישר המחבר את O עם המרכז C של אחת הפאות שוות השוקיים של הטטראדר, ניצב לפאה הזאת. הנקודה C מחלקת כל גובה (או תיכון) של הפאה שוות השוקיים ביחס $2:1$. לפיכך CM אורכו

$a\frac{\sqrt{3}}{6}$. משולש OCM דומה לכל משולש בחלוקה של "צורת המפתח" על-ידי MB. לכן היחסים של צלעות מתאימות שווים. אם x הוא האורך של OB אזי:

$$\frac{\frac{\sqrt{3a^2-b^2}}{2}-x}{a\frac{\sqrt{3}}{6}}=\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3a^2-b^2}}{2}}$$

אם פותרים משוואה זו בנעלם x מקבלים

$$x=\frac{2a^2-b^2}{2\sqrt{3a^2-b^2}}$$

אם r הוא הרדיוס של הכדור החוסם, אז:

$$r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{3a^2-b^2}}$$

יש לציין שהמכנה מתאפס עבור $b=a\sqrt{3}$. זהו "מקרה גבולי" כי עבור הטטראדר הנדון בבעיה מתקיים: $b<a\sqrt{3}$.

ב. את הרדיוס של משטח כדורי ניתן לקצוב על-ידי מכשיר שבו ארבע נקודות מאורגנות כך שהן יוצרות את הקדקודים של שני משולשים חופפים שווי-צלעות בעלי צלע משותפת ש"תלויים" לאורך הצלע הזאת. יהי אורך הצלע של המשולשים האלה a. אם שמים את ארבע הנקודות במגע עם המשטח הכדורי ומודדים את המרחק b בין שתי נקודות שאינן נקודות קצה של הצלע המשותפת, אפשר להשתמש בתוצאה שהתקבלה בסעיף הקודם, כדי לחשב את רדיוס הכדור הנקבע על-ידי ארבע הנקודות.

קובץ 18 – בעיות

1. במשולש ישר-זווית , c הוא אורך היתר , a ו- b הם האורכים של שתי הצלעות האחרות ו- d הוא אורך הקוטר של המעגל החסום . הוכח כי

$$a + b = c + d$$

2. יש להוכיח כי הביטוי $n^2(n^2-1)(n^2-4)$ מתחלק ב-360 עבור $n = 1,2,3,...$.

3. מהם כל הפתרונות של מערכת שלוש המשוואות בשלושת הנעלמים x , y , z :

$$x^2+5y^2+6z^2+8(yz+zx+xy)=36$$
$$6x^2+y^2+5z^2+8(yz+zx+xy)=36$$
$$5x^2+6y^2+z^2+8(yz+zx+xy)=36$$

(פתרון אחד קל למצוא).

4. הבסיס של מנסרה ישרה הוא משושה משוכלל, וגובה המנסרה שווה לקוטר המעגל החסום בבסיס. נפח המנסרה שווה לנפח של אוקטאדר משוכלל. מהו היחס בין שטחי הפנים של שני הגופים?

קובץ 18 – רמזים

1. *נחזור אל ההגדרות.* מהו המעגל החסום של משולש.

האם מוכר לך משפט שיכול להביא תועלת?

2. *מהי המסקנה?*

הביטוי מוכרח להתחלק ב-360. אבל לביטוי יש תכונה לא כל-כך רגילה: שלושת גורמיו ניתנים לפירוק כך שמתקבלת מכפלה של שישה גורמים.

3. ראוי לשים לב לכך שהמערכת היא סימטרית ביחס לשלושת הנעלמים x, y, z. סימטריה זאת צריכה להשתקף בפתרון בדרך כלשהי.

4. מאחר שלשני הגופים יש מספר שווה של פאות, וגם אותו נפח, אפשר אולי לשער לאיזה מהם יש שטח פנים יותר קטן. נכונותה של השערתך, פחות חשובה מהדרך בה היא תיבחן.

קובץ 18 – פתרונות (חלקיים)

1. כל קדקוד של המשולש מרוחק מרחקים שווים משתים מבין שלוש נקודות השקה של צלעות המשולש עם המעגל החסום בו. נסמן ב- A,B,C את הקדקודים שמול הצלעות a,b,c בהתאמה. אזי המרחק מ-C (קדקוד הזווית הישרה) אל כל אחת משתי נקודות ההשקה הקרובות ביותר אליו הוא $\frac{d}{2}$, המרחק מ-B אל כל אחת משתי נקודות ההשקה הקרובות אליה הוא $a-\left(\frac{d}{2}\right)$, והמרחק מ-$A$ לשתי נקודות ההשקה הקרובות ביותר הוא:

$$.\, b-\left(\frac{d}{2}\right)$$

מתוך כך ש- $c = a-\left(\frac{d}{2}\right)+b-\left(\frac{d}{2}\right)$

נובע כי: $a+b=c+d$

2. *__פתרון ראשון__*: נרשום את הביטוי מחדש כך:

$$n[(n-2)(n-1)\ n(n+1)(n+2)]$$

הביטוי בסוגרים המרובעים הוא מכפלה של חמישה מספרים עוקבים. נזכור כי $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. בין חמישה מספרים עוקבים אחד חייב להתחלק ב-5 ולכן 5 מחלק את הביטוי הנידון. כמו כן, אחד מחמשת המספרים העוקבים הוא כפולה של 4 ולפחות עוד אחד נוסף מהחמישה חייב להיות גם הוא זוגי. מכאן שהמכפלה מתחלקת ב- $2^3 = 8$. בנוסף לכך, אם n הוא כפולה של 3 אז n^2 הוא כפולה של 9 ואז הביטוי כולו מתחלק גם ב-9. אם n איננו כפולה של 3 אז או ש- $n-2$ ו- $n+1$ הם

כפולות של 3 או ש- $n-1$ ו- $n+2$ הם כפולות של 3 ושוב הביטוי מתחלק ב-9. מאחר שהביטוי מתחלק ב-5, 8, 9 ולמספרים אלה אין גורם משותף, הביטוי חייב להתחלק גם במכפלתם שהיא 360.

<u>פתרון שני</u> : הואיל ו- $6!=2\cdot 360$ מתקיים :

$$\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{360}$$
$$=\frac{[(n+3)+(n-3)](n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{6!}$$
$$=\binom{n+3}{6}+\binom{n+2}{6}$$

המקדמים הבינומיים הם מספרים שלמים ועל-כן המנה $\frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{360}$ היא מספר שלם. מש"ל.

3. נחסר לפי הסדר את המשוואה השנייה מהראשונה, השלישית מהשנייה והראשונה מהשלישית ונקבל מערכת חדשה :

$$-5x^2+4y^2+z^2=0$$
$$x^2-5y^2+4z^2=0$$
$$4x^2+y^2-5z^2=0$$

אפשר לחלץ את z^2 על-ידי הכפלת המשוואה הראשונה ב- 4 והוספתה אל השנייה . אפשר לחלץ את x^2 על-ידי הכפלת המשוואה השנייה ב-(-4) והוספתה אל השלישית.

מכאן נקבל $x^2=y^2=z^2$. הצבה במערכת המקורית נותנת 8 פתרונות :

$$(1,1,1),(-1,-1,-1)$$
$$(3,-3,-3),(-3,3,3),(-3,3,-3)$$
$$(3,-3,3),(-3,-3,3),(3,3,-3)$$

4. יהי r מחוג המעגל החסום בבסיס המנסרה. הבסיס מורכב משישה משולשים שווי-צלעות שצלעותיהם בעלות אורך $\frac{2r}{\sqrt{3}}$. נפח המנסרה הוא: $6\cdot\frac{r^2}{\sqrt{3}}\cdot 2r = 4\sqrt{3}\cdot r^3$

שטח הפנים של המנסרה הוא:

$$2\cdot 6\frac{r^2}{\sqrt{3}}+6\cdot\frac{2r}{\sqrt{3}}\cdot 2r = 4\sqrt{3}\cdot r^2 + 8\sqrt{3}\cdot r^2 = 12\sqrt{3}\cdot r^2$$

יהי a האורך של מקצועו של אוקטאדר משוכלל שנפחו $4\sqrt{3}\ \ r^3$. את האוקטאדר אפשר לחלק לשתי פירמידות חופפות שבסיסן המשותף הוא ריבוע שצלעו a וגובהן הוא מחצית האלכסון של ריבוע שצלעו a. על-כן נפח האוקטאדר הוא

$$2\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{3}\cdot r^3$$

ו- $a=\sqrt{6}\ \ r$.

שטח הפנים של האוקטאדר הוא

$$\frac{8\sqrt{3}a}{2}\cdot\frac{a}{2} = 2\sqrt{3}\cdot a^2 = 2\sqrt{3}\cdot 6r^2 = 12\sqrt{3}\cdot r^2$$

ועל-כן שטחי הפנים של שני הגופים שווים.
כשנתונים שני גופים בעלי אותו מספר פאות ואותו נפח, ניתן באופן טבעי לצפות לכך שאם אחד מהם משוכלל יהיה לו שטח הפנים הקטן מבין השניים.

קובץ 19 – בעיות

1. לעוגה יש צורת מנסרה ישרה בעלת בסיס ריבועי. יש לה ציפוי קרם (למעלה וגם על גבי הדפנות הצדדיים). גובה המנסרה הוא $\frac{5}{16}$ של צלע הבסיס. איך אפשר לחתוך את העוגה ל-9 חלקים כך שבכל חלק יש אותה כמות עוגה ואותה כמות של ציפוי? אחד מ-9 החלקים צריך להיות מנסרה ישרה בעלת בסיס ריבועי עם ציפוי על צדה העליון בלבד. מהו היחס בין הגובה של חלק זה לבין צלע של בסיסו? עליך לתת תיאור מדויק, עם שרטוט מתקבל על הדעת, של כל 9 החלקים.

2. יש להוכיח כי כל מספר בסדרה הבאה הוא ריבוע שלם:

$$49\ ,\ 4489\ ,\ 444889\ ,\ 44448889\ ,\ \ldots$$

3. אם שטח המשולש מבוטא במספר רציונאלי, יש ארבעה מקרים שאפשר לחשוב עליהם: כל שלוש הצלעות הן בעלות אורך שמבוטא על-ידי מספר רציונאלי או שתיים או אחת או אף אחת מהצלעות אורכה הוא רציונאלי. עליך לאתר דוגמאות (פשוטות – עדיפות) לכך שכל ארבעת המקרים אכן אפשריים.

4. 41 תלמידים נבחנו בשלושה נושאים: אלגברה (A), ביולוגיה (B), כימיה (C). הטבלה הבאה מראה כמה צירוף שלהם:

המקצוע	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
מספר הנכשלים	12	5	8	2	6	3	1

(למשל, 5 סטודנטים נכשלו בביולוגיה, מהם שלושה נכשלו גם בכימיה, אחד משלושתם נכשל בשלושת המקצועות). כמה תלמידים הצליחו בכל שלושת המקצועות?

5. יהיו a, b, c אורכי הצלעות של משולש, ויהי d אורך חוצה הזווית שמול הצלע שאורכה c.

א. יש לבטא את d באמצעות a, b, c .

ב. עליך לבדוק את הביטוי שקיבלת בדרכים רבות ככל האפשר (על-ידי מקרי גבול, מקרים פרטיים וכד׳).

קובץ 19 – רמזים

1. *מהו הנעלם?*

היחס בין הגובה של מנסרה ישרה לבין צלע של בסיסה הרביעי. איך אפשר לקבל דבר כזה? אם מחשבים ביטויים עבור שני הגדלים אפשר למצוא את היחס ביניהם. מהם שני הגדלים? איך אפשר לקבל ביטויים עבורם?

2. מהו המקרה הכללי? מהו האיבר ה-n בסדרה? איזו השערה עולה בדעתך לגבי השורש הריבועי החיובי שלו? איך אפשר לבחון השערה זאת?

3. הואיל וניתן לך חופש לבחור את הדוגמא שלך לכל מקרה, כדאי לבחור במשולש ששטחו קל לחישוב.

4. איזו דיאגראמה תבהיר את הרעיון המונח מאחורי העניין? מה הן האפשרויות השונות להצליח או להיכשל בכל שלושת המקצועות? האם יש דרך סימטרית למנות את מספר האנשים שנכשלו בכל קטגוריה?

5. רצוי *לשרטט שרטוט ולהכניס בו סימון מתאים*. חוצה הזווית d מחלק את הצלע c לשני קטעים שאת אורכיהם נסמן ב-p ו-q בהתאמה. לחלק הראשון יש נקודת קצה משותפת עם a ולשני עם b. יש לנו שלושה נתונים a, b, c, שלושה נעלמים p, q, d ושלושה משולשים: המקורי ושניים קטנים יותר שנוצרים על-ידי d.

קובץ 19 – פתרונות (חלקיים)

1. יהי s אורך הצלע של בסיס המנסרה (העוגה). גובה המנסרה הנתונה הוא $\frac{5s}{16}$, הנפח הוא $\frac{5s^3}{16}$ ושטח הפנים (5 פאות) המצופה בקרם הוא $\frac{9s^2}{4}$. עבור המנסרה הדרושה (פיסת העוגה) שטח הבסיס הוא $\frac{s^2}{4}$ והנפח הוא $\frac{5s^3}{(16\cdot 9)}$. לכן הגובה שהוא המנה של הנפח ושטח הבסיס, הוא $\frac{5s}{36}$. צלע הבסיס של המנסרה המבוקשת הוא $\frac{s}{2}$. על-כן היחס המבוקש הוא: $\frac{5s}{36}\cdot\frac{2}{s}=\frac{5}{18}$.
על החלק העליון של העוגה (הריבוע) נסמן ריבוע נוסף שמרכזו מתלכד עם מרכז החלק העליון של העוגה. צלעות הריבוע הקטן יותר מקבילות לצלעות הריבוע הגדול ואורכן מחצית האורך של צלעות הריבוע הגדול. קטעים מחברים את הקדקודים המתאימים ואת נקודות האמצע של הצלעות המתאימות.

כל אחד מ-8 החלקים עם ציפוי מהצד הוא מנסרה ישרה שממנה חותכים מנסרה קטנה יותר. שתי המנסרות, הגדולה והקטנה, הן בעלות בסיס שהוא משולש ישר-זווית שווה שוקיים.

פתרון אחר אפשר לקבל על-ידי סיבוב החלק הריבועי סביב מרכזו ב- 45°.

2. *<u>פתרון ראשון</u>*: על פי נוסחת הסכום של טור גיאומטרי, המספר בעל $2n$ ספרות בסדרה הוא

$$9+8(10+10^2+...+10^{n-1})+$$
$$4(10^n+10^{n+1}+...+10^{2n-1})$$
$$=1+(8+4\cdot 10^n)(1+10+...+10^{n-1})$$
$$=1+4(10^n+2)\frac{(10^n-1)}{(10-1)}=\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2$$

זהו ריבוע שלם מפני שהמספר

$$\frac{(2\cdot 10^n+1)}{3}=1+\frac{6(10^n-1)}{9}=666...67$$

הוא מספר שלם בעל n ספרות.

<u>פתרון שני</u>: ניסוי עם דוגמאות אחדות

$$49=7^2,\quad 4489=67^2,\quad 444889=667^2$$

מוביל להשערה שהמספר ה-n-י הוא בעל הצורה $(666...67)^2$ באשר למספר שבבסיס החזקה יש בדיוק n ספרות. על מנת לאשר את ההשערה על-ידי הוכחה, אפשר להתחיל מציון העובדה

$$666...667\cdot 6=4000...002$$
$$666...667\cdot 7=4666...669$$

לאחר מכן צריך לעקוב אחרי תבנית הכפל של מספרים שלמים בכתיב עשרוני.

3. **שטח** **צלעות**

6	5	4	3
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	1	1
1	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
12	$5\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$

יש דוגמאות רבות נוספות אך משולשים שאינם ישרי זווית הם פחות נוחים.

4. *פתרון ראשון:* בעיקרו של דבר בודקים כאן שלוש קבוצות A, B, C וחיתוכיהן. אם כל קבוצה מיוצגת על-ידי נקודות בתוך עיגול (דיאגראמת וון, או ליתר דיוק מעגל אוילר), שלושת העיגולים, שכל אחד מהם חופף בחלקו את האחרים, מחלקים את המישור ל-8 אזורים. איזור אחד מהשמונה, זה שמחוץ לשלושת המעגלים, הוא חלק בלתי מוגבל של המישור. הבעיה היא למצוא את מספר התלמידים השייכים לאזור זה. אם נתחיל מהאזור המשותף לשלושת העיגולים (כלומר מהקצה הימני של שורת המספרים הנתונה), ונעבוד כלפי חוץ (כלומר לכיוון שמאל של השורה הנתונה), נוכל לחשב כמה תלמידים נמצאים בכל איזור.

נסמן ב-$\overline{X}$ את קבוצת התלמידים שאינם שייכים לקבוצה X, נסמן ב-XY את החיתוך של הקבוצות X ו-Y ונסמן ב-$[X]$ את מספר התלמידים בקבוצה X. מספר התלמידים באיחוד של שלוש הקבוצות A, B, C נתון על-ידי

$$[ABC]+[\bar{A}BC]+[A\bar{B}C]+[AB\bar{C}]+$$
$$[\overline{AB}C]+[\bar{A}B\bar{C}]+\left[A\overline{BC}\right]$$
$$=1+2+5+1+0+1+5=15$$

וזה מספר התלמידים שנכשלו בנושא אחד או יותר. לכן מספר התלמידים שהצליחו בכל הנושאים הוא $41-15=26$.

פתרון שני:

נשתמש בסימון שבו השתמשנו בפתרון הראשון. מספר התלמידים באיחוד של A, B, C נתון גם על-ידי:

$$\begin{gathered}[A]+[B]+[C]\\ -[AB]-[AC]-[BC]\\ +[ABC]\end{gathered}$$

תלמיד המשתייך לאחת משלוש הקבוצות בלבד, סופרים אותו פעם אחת בשורה העליונה ולא בשום מקום אחר. תלמיד ששיך לשתי קבוצות בלבד, מונים אותו פעמיים בשורה הראשונה ומחסרים פעם אחת בשורה השנייה. ותלמיד המשתייך לשלוש הקבוצות סופרים שלוש פעמים בשורה הראשונה מחסרים שלוש פעמים בשנייה ומוסיפים בשלישית על-כן הביטוי שלעיל מכיל את כל התלמידים שצריך לספור אותם, כל אחד בדיוק פעם אחת (והוא ניתן להכללה למספר גדול יותר של קבוצות).

אם ניישם את הביטוי הכללי למקרה שלנו נמצא כי:

$$\begin{aligned}&12+5+8\\ &-2-6-3\\ &+1\\ &=15\end{aligned}$$

חמישה-עשר תלמידים נכשלו במקצוע אחד או יותר ועל-כן $41-15=26$ תלמידים עברו את שלושתם בהצלחה.

5. א. השאלה קלה יותר אם זוכרים את אחד המשפטים מהגיאומטריה האוקלידית האומר: חלקי הבסיס, p ו-q הנוצרים על-ידי חוצה-הזווית, מתייחסים זה לזה כמו הצלעות הסמוכות להם a ו-b כלומר:

$$\frac{p}{q}=\frac{a}{b}$$

הואיל ו- $p+q=c$ נקבל:

$$p=\frac{ac}{a+b},\qquad q=\frac{bc}{a+b}$$

ניישם את משפט הקוסינוסים פעמיים לשני משולשים שונים ששניהם מכילים את הזווית α שמול הצלע a במשולש המקורי, ונקבל:

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$d^2 = b^2 + q^2 - 2bq\cos\alpha$$

מכאן על-ידי אלימינציה של $\cos\alpha$ וחילוץ d^2 מקבלים:

$$d^2 = ab\left(1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right)$$

(המשפט הנזכר מהגיאומטריה האוקלידית ניתן לגילוי על-ידי שימוש ביחסים הטריגונומטריים בשלושת המשולשים. למעשה, הוא נובע ממשפט הסינוסים המיושם פעמיים לשני המשולשים הקטנים).

ב. *מקרה פרטי*: אם $a=b$, אז המשולש הנתון הוא שווה שוקיים עם בסיס c והנוסחה נותנת:

$$d^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}$$

מקרה גבול: אם המשולש מתנוון והופך לקטע c אזי $a+b=c$ והנוסחה נותנת $d=0$. אפשר גם לבחון את הנוסחה מבחינת המימדים. (ר' [17], עמודים 202-205.)

קובץ 20 – בעיות

1. ״כמה ילדים יש לך ובני כמה הם?״ – שאל האורח את המורה למתמטיקה.
״יש לי שלושה בנים״ – ענה המורה – ״מכפלת הגילים שלהם היא 72 וסכום הגילים הוא כמספר הבית בו אנו גרים״.
האורח הלך להביט בשלט המואר שבכניסה לבית, חזר ואמר: ״אי אפשר לפתור את הבעיה״. ״נכון״ – אמר לו המורה- ״אבל אני מקווה שכשבני הבכור ישרת בצבא – יהיה שלום״.
בני כמה הבנים? – יש לנמק את התשובה.

2. ידוע כי שטחו של משולש ישר-זווית הוא S ואורך היתר הוא c. על כל אחת מצלעות המשולש בונים ריבוע חיצוני. נתבונן בצורה ההנדסית הקמורה הקטנה ביותר המכילה את שלושת הריבועים (הצורה הנוצרת על-ידי גומייה הדוקה סביבם) – זהו משושה (לא משוכלל שיש לו צלע משותפת עם כל ריבוע, ואחת הצלעות הנותרות היא כמובן באורך c). מהו שטח המשושה?

3. יהיו $x, y, 1$ אורכי שלוש הצלעות של משולש ונניח כי: $x \le y \le 1$. תהי הנקודה (x, y) בעלת קואורדינאטות x, y במישור קרטזי, הנקודה המייצגת את המשולש.
עליך לתאר בדיוק ולשרטט בבהירות את קבוצת הנקודות במישור, שבמובן הנ״ל מייצגת את:
א. כל המשולשים הנתונים;
ב. משולשים שווי שוקיים;
ג. משולשים ישרי זווית;
ד. משולשים חדי זוויות;
ה. משולשים קהי זוויות.
אתר נקודות נוספות במישור המייצגות משולשים בעלי תכונות אופייניות נוספות.

4. מהי שארית החילוק של הפולינום
$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ בפולינום $x^3 - x$?

קובץ 20 – רמזים

1. *איך אפשר לחלק את התנאי לחלקים שונים ולרשום אותם בהתאם?*
אפשר להבחין בארבעה חלקים:
   א. מכפלת הגילים של הבנים
   ב. סכום הגילים
   ג. הערפול המאפיין את הבעיה, היותה בלתי פתירה
   ד. העובדה (שהקשר שלה עלול להיעלם מעין הפותר) שאחד הבנים הוא הבכור.

2. *מהו הנעלם?*
שטח המשושה. איך ניתן לקבוע דבר מסוג זה? *האם יש מספיק נתונים כדי לקצוב את ערכו של הנעלם?*

3. *מהו הנעלם?*
יש חמישה נעלמים: קבוצת נקודות (A) וארבע תת-קבוצות שלה. איך אפשר לאפיין קבוצה כזאת? – על-ידי שיעוריהן של הנקודות השייכות לקבוצה, על-ידי היחסים בין השיעורים הללו.

4. *מהו הנעלם?*
השארית הנותרת אחרי חילוק פולינום אחד בשני.
האם אפשר לנסח את הבעיה בדרך אחרת?
נסמן את המנה ב$q(x)$ ואת השארית ב-$r(x)$. עלינו למצוא פולינום $r(x)$ שדרגתו לא עולה על 2, כך ש-

$$x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}$$
$$=q(x)(x^3-x)+r(x)$$

קובץ 20 – פתרונות (חלקיים)

1. רושמים את כל שנים-עשר הפירוקים של 72 לשלושה גורמים ובודקים את סכום הגורמים. מוצאים שהסכום היחיד החוזר על עצמו פעמיים הוא 14 $(2\cdot 6\cdot 6\ ,\ 3\cdot 3\cdot 8)$. הואיל ותשובת האורח הייתה שהבעיה אינה בת-פתרון, מספר הבית הוא 14. הואיל ולמורה יש בן בכור האפשרות היחידה היא 3, 3, 8 .

2. יהיו a,b אורכי הניצבים. המשושה מורכב משלושה ריבועים בעלי שטח c^2,b^2,a^2 ומארבעה משולשים שכולם שווי שטח A. אפשר להוסיף קווי-עזר שבאמצעותם יוכח כי לאחד משני המשולשים קהי הזווית יש גובה a ובסיס b ולשני יש גובה b ובסיס a, או שמשתמשים בטריגונומטריה:

$$A=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}ac\sin(180-\beta)$$

על-כן שטח המשושה הוא:

$$a^2+b^2+c^2+4A=2c^2+4A$$

3. א. משולש בעל קדקודים $(0,1)$, $(1,1)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ וצלעות של הישרים $y=1$, $x=y$ באשר $x+y>1$.
   ב. שתי צלעות של משולש א׳ על הקווים $x=y, y=1$.
   ג. קשת של מעגל $x^2+y^2=1$ בתוך משולש א׳.
   ד. חלק של משולש א׳ שמעל לקשת ג׳.
   ה. חלק של משולש א׳ שמתחת לקשת ג׳.

הנקודה $(1,1)$ מייצגת משולש שווה צלעות. הנקודה $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ מייצגת משולש שווה שוקיים ישר-זווית. הנקודה $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ מייצגת את המשולש בעל זוויות $30°,60°,90°$, והצלע של משולש א׳ שעל הקו $x+y=1$ מייצגת את המשולשים המנוונים.

4. השארית $r(x)$ בחילוק הפולינומים היא פולינום מדרגה שאינה עולה על 2, לפיכך:

$$r(x)=a+bx+cx^2$$

ואז:

$$x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}=q(x)(x^3-x)+a+bx+cx^2$$

זה נותן עבור $x=-1,0,1$ בהתאמה:

$$-5=a-b+c$$

$$0=a$$

$$5=a+b+c$$

ועל-כן $a=0$, $b=5$, $c=0$ והשארית היא $5x$.

רשימת מקורות

1. R. Creighton Buck, A look at mathematical competitions, *American Mathematical Monthly,* 66 (1959) 201-212.
2. Department of Mathematics, Stanford University, The Stanford University Mathematics Examination, *American Mathematical Monthly*, 53 (1946) 406-409.
3. ___, Stanford University Mathematics Examination, *American Mathematical Monthly*, 54 (1947) 430.
4. ___, Stanford University Competitive Examination, *American Mathematical Monthly*, 55 (1948) 448.
5. ___, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 56 (1949) 496-497.
6. ___, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 57 (1950) 651-652.
7. ___, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 59 (1952) 127.
8. ___, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 60 (1953) 571-572.
9. G. Pólya, The 1953 Stanford Competitive Examination: Problems, solutions and comments, *California Mathematics Council Bulletin*, (1) 11 (1953) 15-17.
10. ___, The 1954 Stanford Competitive Examination: Problems, solutions and comments, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 12 (1954) 7-8.

11. ___, The 1955 Stanford Competitive Examination: problems, Solutions. And comments, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 12 (1954) 7-8.

12. ___, The 1956 Stanford Competitive Examination: problems, Solutions. And comments, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 14 (1956) 19-22.

13. ___, The 1957 Stanford Competitive Examination: problems, Solutions. And comments, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 15 (1957) 18-21.

14. ___, The 1958 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, (1) 16 (1958) 18-20.

15. ___, The 1960 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 18 (1960) 16-17.

16. ___, The 1961 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, (2) 19 (1961) 10-11.

17. ___, *How to Solve It,* 2nd edition, Doubleday Anchor A 93, 1957, Princeton Paperback, 1971.

18. ___, *Mathematics and Plausible Reasoning,* Vol. 1, Princeton Univ. Press, 1954.

19. ___, *Mathematics and Plausible Reasoning*, Vol. 2, 2nd edition, Princeton Univ. Press, 1968.

20. ___, *Mathematical Discovery,* Vol. 1, Wiley, 1962.

21. ___, *Mathematical Discovery,* Vol. 2, corrected printing, Wiley, 1968.

22. H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited,* Random House, 1967.

23. *Hungarian Problem Book I, II,* Random House, 1963.

24. G. Pólya and J. Kilpatrick: The Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly,* 80 (1973) 627-640.

25. A. H. Schoenfeld: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). NY: MacMillan, 1992.

26. B. Koichu, A., Berman, and M. Moore, Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science* (Published online), 2006. http://www.springerlink.com/content/c248g05416l87556/fulltext.pdf.