

# למצוא את הפתרון הטוב ביותר

חלק ג

הערות ופתרונות למורים  
כיתה ט



משרד החינוך  
המזכירות הפדגוגית  
אגף מדעים



אוניברסיטת חיפה  
הפקולטה לחינוך



מינהלת מל"מ  
המרכז הישראלי לחינוך מדעי  
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية



# למצוא את הפתרון הטוב ביותר – חלק ג – למורה

פעילות זו היא חלק ממקבץ של שלוש פעילויות שעוסקות בבעיות ערך קיצון, אותן ניתן לפתור באמצעות מציאת קודקוד של פרבולה. הבעיות: 'מופע בפארק', 'זוגות מספרים' ו'בין שתי פרבולות' מגוונות את התכנים בהן מטפלות בעיות ערך קיצון – הן לא עוסקות במלבנים וריבועים כפי שהוצג בשני החלקים הקודמים.

## 1. מופע בפארק

לקראת חופשת הקיץ מתוכנן מופע מוסיקלי בפארק העירוני. מפיק המופע קבע שכל כרטיס יימכר בסכום של 80 ₪, וטען שצפויים להגיע 1000 איש למופע.

ראש מועצת התלמידים פנה אל המפיק בבקשה להזיל את מחיר הכרטיס, וטען שהוזלת מחיר הכרטיס יכולה להגדיל את הפדיון ממכירת הכרטיסים. לדבריו, סקר שנערך בעיר העלה, שכל הפחתה של שקל ממחיר הכרטיס תגדיל ב- 20 את מספר האנשים שירכשו כרטיסים למופע, וכל תוספת של שקל תגרום ל- 20 אנשים לא להגיע למופע.

א. מפיק המופע לא האמין שהורדת המחיר יכולה להביא להגדלת הפדיון. הציעו נימוקים שישכנעו את מפיק המופע להזיל את מחיר הכרטיס.

שתי סיבות עיקריות לבקשה זו. הסיבה הראשונה קשורה למסקנה שתעלה בהמשך: קביעת המחיר משפיעה על הביקוש, והורדת המחיר יכולה להגדיל את הרווח. זו הזדמנות לחוש את כוחה של המתמטיקה למצוא את הפתרון הטוב ביותר בהקשר משכנע.

הסיבה השנייה היא שחלק מהתלמידים עלולים לא להבין את הבעיה בקריאה ראשונה, והבקשה להציע נימוקים משכנעים מחייבת אותם לקרוא שוב את השאלה, ומזמינה את המורה לפרש את השאלה יחד עם התלמידים באופן שיקל עליהם בהמשך לבנות פונקציה מתאימה לשאלה. מהדיון בסעיף זה יכול להתפתח באופן טבעי הפתרון של שאר סעיפי השאלה.

ב. כמה אנשים צפויים להגיע למופע אם המחיר ירד ב- 10 שקלים? 1200.  
אם המחיר ירד ב- 10 שקלים מספר האנשים שיגיעו למופע יגדל ב- 200.

ג. מה יהיה הפדיון ממכירת הכרטיסים אם המחיר ירד ב- 10 שקלים? האם הורדת המחיר ב- 10 שקלים תגדיל את הפדיון ממכירת הכרטיסים?

במקרה זה המחיר יהיה  $84000 = 1200 \cdot 70$ . הפדיון ממכירת הכרטיסים יגדל ב-4000 ₪ לעומת הפדיון שצפה מפיק המופע.

ד. ראש מועצת התלמידים טוען שאם נסמן את הפחתת המחיר ב- $x$ , ואת הפדיון ממכירת הכרטיסים ב- $y$  נקבל:  $y = (80 - x)(1000 + 20x)$ . כיצד הגיע לביטוי זה?

$$y = (80 - x) \cdot (1000 + 20x)$$

↙
↘

מחיר כרטיס                      מספר כרטיסים  
 כשמפחיתים  $x$  שקלים      כשמפחיתים  $x$  שקלים

ה. מהו תחום הערכים של  $x$  המתאים לפונקציה?  $0 \leq x \leq 80$

ו. מה צריך להיות מחיר הכרטיס, כדי שסך ההכנסות ממכירת הכרטיסים יהיה מקסימלי?

נפשט את הפונקציה ונקבל  $y = -20x^2 + 600x + 80,000$ . קודקוד הפרבולה מתקבל כאשר  $x = 15$ . מכאן שכדי לקבל פדיון מקסימלי יש להפחית את מחיר הכרטיס ב-15 ₪, ולמכור כל כרטיס ב-65 ₪.

ז. בהנחה שהממצאים שעלו בסקר נכונים, בכמה שקלים יגדל הפדיון ממכירת הכרטיסים למופע, אם הכרטיסים יימכרו במחיר שמצאתם בסעיף הקודם?

אם המחיר יהיה 65 ₪ לכרטיס, מספר האנשים שיקנו כרטיסים יהיה:  $1000 + 20 \cdot 15 = 1300$  הפדיון צפוי להיות:  $84500 = 1300 \cdot 65$ . פדיון זה גדול ב-4,500 ₪ מהפדיון שצפה מפיק המופע.

## 2. זוגות מספרים

א. סכום שני מספרים הוא 20.

(1) סמנו ב- $x$  את אחד המספרים ורשמו ביטוי אלגברי למספר השני.  $20 - x$

(2) רשמו פונקציה המתאימה ל- $x$  את מכפלת שני המספרים.  $y = x(20 - x)$

(3) מהי מכפלת המספרים כאשר  $x = 4$ ? מהי מכפלת המספרים כאשר  $x = 16$ ? האם הקשר מקרי? הסבירו.

סעיף 3 נועד להבליט את הסימטריה של פונקציית המכפלה. בשני המקרים המכפלה היא 64. הקשר אינו מקרי, כמובן. מדובר בשני מספרים שסכומם 20, ולכן אם המספר המיוצג על-ידי  $x$  הוא 4, המספר השני הוא 16, ולהיפך.

(4) רשמו שני ערכים של  $x$  כך שמכפלת המספרים תהיה 99.  $x = 9$ ,  $x = 11$

מה צריך להיות  $x$  כדי שמכפלת המספרים תהיה מקסימלית? מהי המכפלה המקסימלית?

גם הפעם נמצא את הפתרון באמצעות קודקוד הפרבולה המתאימה.  $x = 10$ . המכפלה המקסימלית היא 100.

ב. מבין כל המספרים שסכומם 20, מצאו את זוג המספרים שסכום ריבועיהם הוא הקטן ביותר האפשרי.

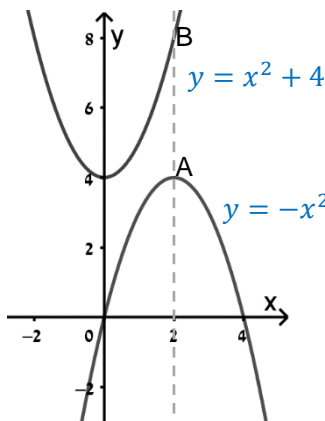
הדרכה: סמנו את המספר הראשון ב-  $x$ . בטאו גם את המספר השני באמצעות  $x$ , רשמו פונקציה שמתאימה ל-  $x$  את סכום ריבועי המספרים, ומצאו את המינימום של הפונקציה.

גם הפעם נסמן את המספרים ב-  $x$  ו-  $20 - x$

$$\text{סכום הריבועים: } x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$$

קודקוד הפרבולה המתאימה מתקבל כאשר  $x = 10$ . סכום הריבועים המינימלי הוא 200.

### 3. בין שתי פרבולות



הגרפים בשרטוט משמאל מתאימים לפונקציות  $y = x^2 + 4$  ו-  $y = -x^2 + 4x$ .

א. זהו איזה גרף שייך לכל פונקציה.

מסמנים על הפרבולה התחתונה נקודה A, ומעבירים דרכה אנך לציר ה-  $x$ . האנך חותך את הפרבולה העליונה בנקודה B. כשגוררים את הנקודה A על הפרבולה משתנים הישר המאונך לציר ה-  $x$  והנקודה B שעל הפרבולה העליונה. [היישומון](#) בקישור מראה את השתנות הישר והנקודה B כתוצאה מגרירת הנקודה A.

הסעיפים הבאים עוסקים באורך הקטע AB.

ב. אם שיעורי הנקודה A הם (2,4), מהם שיעורי הנקודה B? מהו אורך הקטע AB במקרה זה? ענו באמצעות חישוב ובדקו את תשובתכם [ביישומון](#).  $B(2,8)$ ,  $AB = 4$ .

ג. האם ניתן לגרור את הנקודה A על גבי הפרבולה, כך שאורך הקטע AB יהיה גדול יותר? קטן יותר?



<https://www.geogebra.org/m/qtrtr7cu>

אם כן – הביאו דוגמה. אם לא – מדוע לא? כדאי להיעזר ביישומון.  
קל לראות שיש אפשרויות רבות לגרור את הנקודה A כך שאורך הקטע AB יהיה גדול מ-4. ואפשר גם לגרור את הנקודה כך שאורך הקטע יהיה קטן מ-4, למשל, כאשר  $x = 1$ ,  $AB = 4$ . כדאי להקרין את היישומון ולראות דוגמאות נוספות שבהן  $AB < 4$

ד. הסבירו מדוע הפונקציה המתאימה לשיעור ה- $x$  של הנקודה A את אורך הקטע AB היא:  $y = (x^2 + 4) - (-x^2 + 4x)$ , ורשמו את הפונקציה באופן פשוט יותר.

$$y = (x^2 + 4) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 4x + 4$$

ההפרש בין הפונקציות:

ה. מה צריך להיות שיעור ה- $x$  של הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה הקצר ביותר האפשרי? מהו אורך הקטע AB במקרה זה? הסבירו.

קדקוד הפרבולה (מינימום) מתקבל כאשר  $x=2$ . במקרה זה  $AB=2$ .