

# למצוא את הפתרון הטוב ביותר

חלק א

הערות ופתרונות למורים  
כיתה ט



משרד החינוך  
המזכירות הפדגוגית  
אגף מדעים



אוניברסיטת חיפה  
הפקולטה לחינוך



מינהלת מל"מ  
המרכז הישראלי לחינוך מדעי  
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

المركز القطري لعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية



מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע עפ"י מכרז 09/07.13 עבור המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך.  
כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

## למצוא את הפתרון הטוב ביותר – חלק א – למורה

פעילות זו היא חלק ממקבץ של 3 פעילויות באותו נושא.

השם של מקבץ הפעילויות מבטא את הרעיון המרכזי שלו: הבלטת כוחה של המתמטיקה למצוא את הפתרון הטוב ביותר מבין פתרונות אפשריים לבעיה.

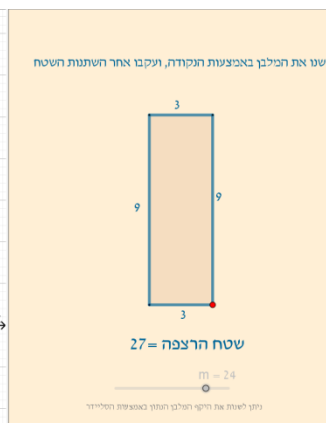
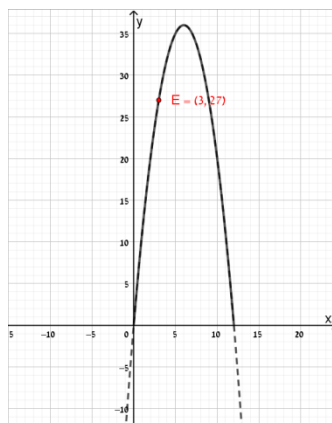
פעילות זו עוסקת בבעיות ערך קיצון, אותן ניתן לפתור, באמצעות מציאת קודקוד של פרבולה. בחטיבה העליונה התלמידים יעסקו הרבה בפתרון בעיות ערך קיצון, וירכשו כלים נוספים למצוא את הפתרון הטוב ביותר.

הפעילות בנויה באופן שמאפשר:

- עיסוק בפונקציות ממעלה שנייה בהקשר מציאותי.
- הבנה של מהות הבעיה לפני שלב הפתרון הטכני.
- הצמחת הרעיון לחפש את המינימום או את המקסימום באמצעות קודקוד של פרבולה.
- המחשת החשיבות של תחום ההגדרה (שנקרא כאן תחום הערכים האפשריים של הפונקציה).

ברוב הבעיות משולבים יישומים שממחישים את הדינמיות של הבעיות, ומאפשרים לתלמידים לחקור ולהעלות השערות לפני פתרון בכלים אלגבריים.

בבעיה הראשונה, מלבן בעל היקף נתון, מחפשים את המלבן בעל השטח הגדול ביותר, מבין כל המלבנים בעלי היקף נתון. השאלה עוסקת בשטח הרצפה של מתחם מלבני ביריד אמנויות. כדי לעודד חקירה באמצעות חומרים מוחשיים, מדברים בשאלה



על דגם שהתלמידים מכינים, ובו כל ס"מ של הדגם מייצג מטר במציאות.

הפעילות מלווה ב**ישומון** שבו אפשר להדגים את כל המלבנים המוצעים בדיון, וגם לראות את גרף הפונקציה.

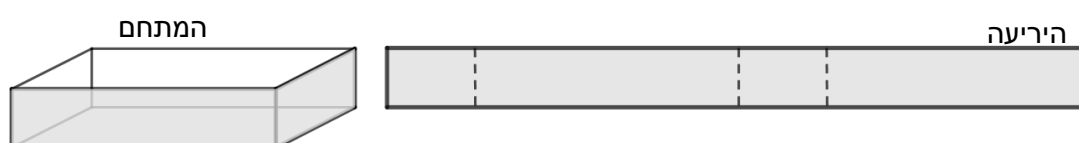
לצורך המחשה אפשר לחלק

לתלמידים רצועות נייר באורך 24 ס"מ, שייצגו את נתוני הבעיה.

אפשר להחליף את רצועות הנייר בגומיות או חומרים זמינים אחרים, ולשנות את נתוני השאלה בהתאם. בתחתית היישומון אפשר לראות פס גרירה שמאפשר לשנות את ההיקף הנתון, בהתאם לאמצעי ההמחשה בו משתמשים. בפעילות השנייה מתכננים גינה בשטח מלבני נתון, בה חלקי מדשאות וערוגות פרחים. גם פעילות זו מלווה ביישומון.

## 1. מלבן בעל היקף נתון

תלמידי כיתה ט' בבית הספר "הדרים" מתכננים ליריד אמנויות. כל קבוצת תלמידים מקימה לעצמה מתחם מלבני בחצר. התלמידים מקבלים יריעה מיוחדת להקפת המתחם ולתצוגת עבודות, ולכן היקף המלבן מוגבל להיות 24 מטרים. התלמידים קובעים בעצמם את קווי הקיפול של היריעה.



כל קבוצת תלמידים קיבלה פס נייר באורך 24 ס"מ כדי לבנות דגם של המתחם המלבני לתצוגה שלה. כל ס"מ של הדגם מייצג מטר אחד במציאות.

- הציעו דגמים אחדים של חצר מלבנית שאפשר לבנות בעזרת פס הנייר.
- הקבוצה של אריאל בנתה דגם שאורך אחת מצלעותיו 3 ס"מ. מהו אורך הצלעות האחרות של המלבן? מהו שטח המלבן?
- הקבוצה של שחר בודקת מה השטח הגדול ביותר של דגם, שאפשר להקיף בפס הנייר. לשם כך הם בנו טבלה.

| שטח רצפת הדגם (סמ"ר) | אורך צלע ב (ס"מ) | אורך צלע א (ס"מ) |
|----------------------|------------------|------------------|
| 11 סמ"ר              | 11               | 1                |
|                      |                  | 2                |
|                      |                  | 3                |
|                      |                  | 4                |
|                      |                  |                  |

(1) השלימו את הטבלה.



<https://www.geogebra.org/m/qgmdz8ma>

(2) האם אפשר לבנות מלבן מתאים למשימה, שהשטח שלו יותר גדול מכל שטחי המלבנים בטבלה? אפשר להיעזר ביישומון.

למשל: צלע א: 5 ס"מ. צלע ב: 7 ס"מ. השטח: 35 מ"ר.

או: צלע א: 6 ס"מ. צלע ב: 6 ס"מ. השטח: 36 סמ"ר.

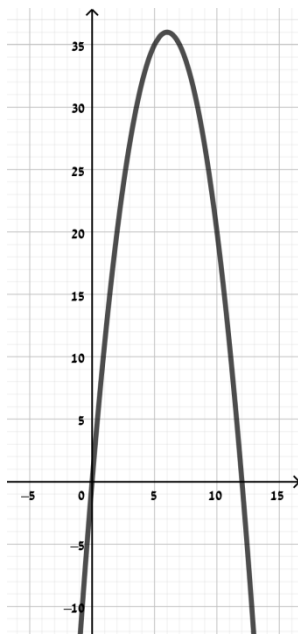
(3) האם אפשר לבנות מלבן מתאים למשימה, שהשטח שלו קטן יותר מכל שטחי המלבנים שבטבלה?

אם כן – הביאו דוגמה.

אם לא – הסבירו מדוע.

למשל: צלע א: 5 ס"מ. צלע ב: 7 ס"מ. השטח: 35 מ"ר.

או: צלע א: 6 ס"מ. צלע ב: 6 ס"מ. השטח: 36 סמ"ר.



(4) נסמן את האורך של צלע א ב-  $x$ . בטאו באמצעות  $x$  את אורך הצלע הסמוכה של הרצפה ואת שטח רצפת הדגם?

$$\frac{24-2x}{2} = 12 - x$$

(5) רשמו את הפונקציה שמתאימה ל-  $x$  את שטח המלבן. מה תחום הפונקציה?

הפונקציה:  $y = x(12 - x)$  תחום הפונקציה:  $0 < x < 12$ .

(6) סרטטו את גרף הפונקציה.

(7) מהו המלבן ששטחו הוא הגדול ביותר בתנאים הנתונים? מהו שטח זה?

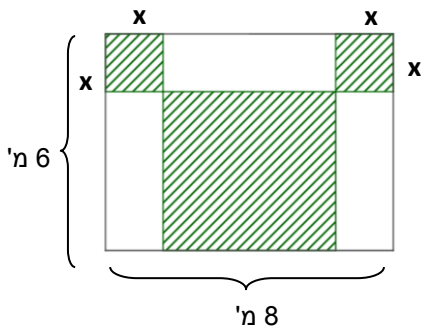
המלבן ששטחו הוא הגדול ביותר בתנאים הנתונים הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

שטח רצפת הדגם: 36 סמ"ר.

(8) אופיר אומרת שאפשר היה לדעת מראש שיתקבל גרף סימטרי. למה היא מתכוונת, לדעתכם?

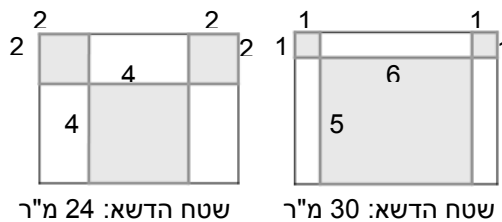
המלבן המתקבל כאשר  $x=5$  הוא בדיוק המלבן המתקבל כאשר  $x=7$ . למעשה כל מלבן (למעט הריבוע) מתקבל בשתי דרכים: כאשר  $x$  מייצג את הצלע הקצרה וכאשר  $x$  מייצג את הצלע הארוכה.

## 2. מתכננים גינה



בשטח מלבני שממדיו 8 מטרים ו- 6 מטרים מתכננים גינת נוי. מתכנני הגינה בודקים אפשרויות שונות לשתול דשא בשני שטחים בצורת ריבועים זהים, ובשטח נוסף בצורת מלבן כמתואר בציור. השטחים המיועדים לדשא מקווקים בציור. שאר השטח מיועד לפרחים.

א. הציעו תכנית אפשרית של גינה התואמת את התיאור. מהו שטח הדשא במקרה זה?



למשל

ב. הציעו תכנית נוספת שמתאימה לתיאור. מה שטח הדשא הפעם?

ראו סעיף א.

ג. פתחו את [היישומון](#), וגררו את הנקודה האדומה כך שתתקבל חצר שונה מאלה שתכננתם בסעיפים הקודמים. כדאי לביא גם דוגמאות עם מידות לא שלמות.



<https://www.geogebra.org/m/pnte4prd>

ד. נסמן ב-  $x$  את אורך צלע הריבוע במטרים. בטאו את השטח המיועד לדשא כפונקציה של  $x$ . מהו תחום הערכים של  $x$  המתאים לפונקציה?

$$\text{פונקציית השטח: } y = 2x^2 + (8 - 2x)(6 - x) = 4x^2 - 20x + 48$$

תחום הערכים של  $x$  המתאים לפונקציה:  $0 < x < 4$ . הסבר:

מגבלות על  $x$ :

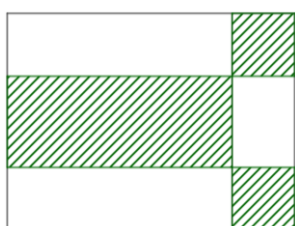
|         |                                                          |
|---------|----------------------------------------------------------|
| $x > 0$ | אורך צלע הריבוע הפינתי צריך להיות מספר חיובי             |
| $x < 6$ | אורך צלע הריבוע הפינתי צריך להיות קטן מהצלע הקצרה        |
| $x < 4$ | אורך צלע הריבוע הפינתי צריך להיות קטן ממחצית הצלע הארוכה |

ה. מה צריך להיות ערכו של  $x$  כדי ששטח הדשא יהיה מינימלי? הסבירו.  
 הפונקציה המתאימה ל-  $x$  את השטח המיועד לדשא היא פונקציה  
 ריבועית בעלת מינימום. קודקוד הפרבולה המתאימה:  $(2.5, 23)$ . מכאן  
 שהשטח הקטן ביותר של דשא, בתנאי השאלה, מתקבל כאשר  $x=2.5$

ו. מה שטח הדשא במקרה זה?

במקרה זה שטח הדשא 23 מ"ר.

מומלץ לחשב ישירות את שטחי הריבועים, לשים לב לעובדה שהשטח המינימלי  
 מיוצג על ידי שיעור ה-  $y$  של קודקוד הפרבולה. וגם לראות את החישוב המוצג  
 ביישומון.



ז. ניצן מציע לבדוק אם כשמצמידים את שני הריבועים לצלע  
 קצרה של המגרש (ראו איור) מתקבל אותו שטח מינימלי.  
 מה דעתכם?

הפעם פונקציית השטח היא:

$$y = 2x^2 + (6 - 2x)(8 - x) = 4x^2 - 22x + 48$$

קודקוד הפרבולה המתאימה הוא בנקודה  $(2.75, 17.75)$ .

השטח המינימלי המיועד לדשא המתקבל במקרה זה הוא 17.75 מ"ר.