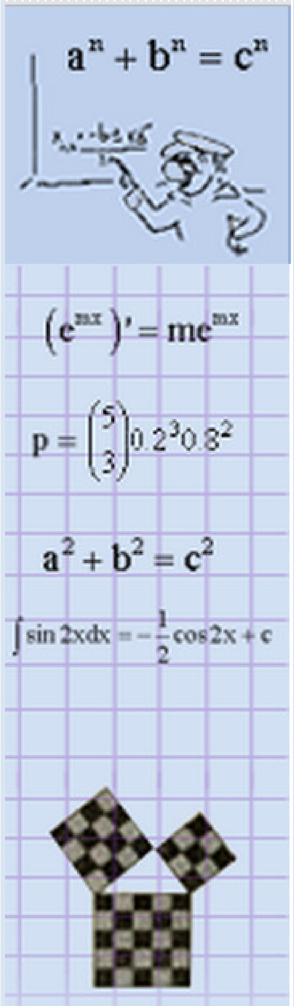
משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אשכול מדעים – הפיקוח על הוראת המתמטיקה
המינהל למדע וטכנולוגיה

חוברת העשרה במתמטיקה לתלמידי עתודה מדעית-טכנולוגית

לתלמידים בכיתות ט'

הפרקים בחוברת יילמדו כהעשרה ללימודי המתמטיקה



אב, תשע"ב
אוגוסט 2012

תודה לגופים אשר תרמו את הפרקים להעשרה במתמטיקה לחוברת זו:

העשרה בריבוע
למדא

מצוינות 2000
המרכז הישראלי למצוינות בחינוך

תכנית המצוינות במתמטיקה – הטכניון
הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

תוכן הנושאים לפי סדר ההוראה:

1. פיבונאצ'י – סדרת פיבונאצ'י בעולם החי — העשרה בריבוע
   למדא
2. מספרים ממשיים – — העשרה בריבוע
   למדא
3. עניין של אופטימיזציה – — מצוינות 2000
   המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
4. אופטימיזציה בחיי יומיום – — שבילים למצוינות
   מט"ח
5. עקרון שובך היונים – — התכנית למצוינות - טכניון
   הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
   המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

מספרים ממשיים

מבוא

מהו מספר?

האם השברים הם מספרים?

נסו לדמיין עולם ללא מספרים. מה היה קורה?

בפרק זה נעמיק את ההיכרות עם **עולם המספרים**.

בתחילת האנושות החלו לעסוק במספרים טבעיים (...,1, 2, 3) ולהשתמש בהם למניית פריטים בקבוצה.

לשם כך השתמשו באבנים קטנות וחיברו וחיסרו מספרים בעזרתן.

לאחר מכן החלו להתייחס למספרים כאל עצמים מופשטים. עולם המספרים ריתק את האנשים, ופילוסופים רבים חקרו עולם מרתק זה. פעמים רבות ייחסו למספרים גם תכונות מיסטיות וניסו להסביר באמצעותם תופעות טבע. למשל, פיתגורס - פילוסוף ומתמטיקאי יווני שנולד בשנת 570 לפני הספירה והקים בית ספר הידוע בשם "החבורה הפיתגורית" - ייחס משמעות למספרים וקשר אותם למושגים "בלתי מחולק" (המספר 1), "שמים וארץ" (המספר 2), "טבע - דומם, צומח וחי" (המספר 3) ו"יסודות - אש, מים, אוויר ואדמה" (המספר 4). סכום המספרים $1 + 2 + 3 + 4$ היה המספר המושלם 10.

לאחר שהחלו להשתמש בפעולות החשבון - חיבור, חיסור, כפל וחילוק - עלה הצורך להכיר יותר את עולם המספרים. למשל, הבינו שבחיבור או בכפל של שני מספרים טבעיים, תתקבל תמיד תוצאה שהיא מספר טבעי, אך בחיסור או בחילוק של שני מספרים טבעיים לא בהכרח תתקבל תוצאה טבעית. לדוגמה, אם נחסיר 3 מ- 1 לא נקבל מספר טבעי.

לפני שהתחילו להשתמש במספרים השליליים, אפשר היה לדמיין את התוצאה (2-), אך לא הייתה לכך משמעות. קיומם של המספרים השלילים היה תאורטי בלבד במשך יותר מאלפיים שנה.

אם נחלק 1 ב- 3, נקבל תוצאה שלא שייכת לעולם המספרים הטבעיים. מתן משמעות **לשברים** התאפשר בעיקר הודות לשימוש במדידות: השימוש ביחידות זמן, ביחידות אורך, בשטח ובנפח וכן בגלל הצורך בחלוקת היחידות השונות ליחידות קטנות יותר.

כבר במצרים העתיקה, בשנת 1600 לפני הספירה, נמצאו עדויות לשימוש בשברים.

פיתגורס וחבריו עסקו, בין היתר, בלימוד ובחקר של עולם המספרים. נכון לתקופה ההיא הִכירו את המספרים השלמים (חיוביים ושליליים) וכן את השברים אשר תיארו יחס בין המספרים השלמים.

חברי הקבוצה גילו תכונות רבות של מספרים. המשפט המקשר בין מידות הניצבים של משולש ישר-זווית לבין מידת היתר הוא המשפט המפורסם ביותר, והוא ידוע בשם "משפט פיתגורס". הפיתגורים האמינו שאפשר להסביר כל תופעה בעולם באמצעות מספרים שלמים ושברים - מספרים הידועים בשם **מספרים רציונליים**. אלה מספרים שאפשר להציגם כמנה של שני מספרים שלמים. קיימת סברה שאחד מחברי הקבוצה, היפאסוס, גילה לראשונה את קיומם של **מספרים אי-רציונליים** (מספרים שאי-אפשר להציגם על-ידי שני מספרים שלמים). מסופר שהיפאסוס הוכיח לראשונה ש- $\sqrt{2}$ איננו מספר רציונלי, וכתוצאה מהגילוי, סולק היפאסוס מהחבורה הפיתגורית, וליתר ביטחון הוא אף הוטבע על-ידי חברי הקבוצה.

מספרים ממשיים

קבוצות מספרים

הגדרות

מספרים טבעיים - אוסף המספרים ...1, 2, 3, 4, 5.
נהוג לסמן את קבוצת המספרים הטבעיים באות $\mathbb{N}$.

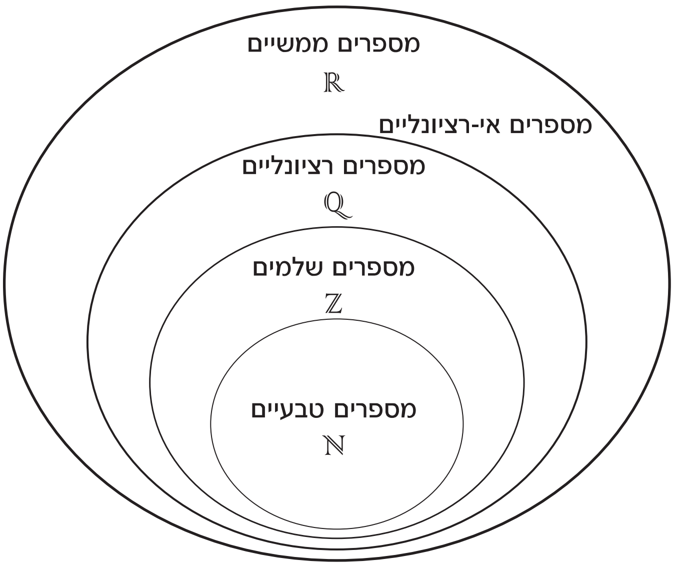
מספרים שלמים - קבוצת המספרים המכילה את המספרים הטבעיים, את המספרים השליליים ואת 0.
נהוג לסמן את קבוצת המספרים השלמים באות $\mathbb{Z}$.

מספר רציונלי - מספר שאפשר להציגו כמנה של שני מספרים שלמים. נהוג לסמן את קבוצת המספרים הרציונליים באות $\mathbb{Q}$.
דוגמה: $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{3}$ הם מספרים רציונליים.

הערה: קבוצת המספרים העשרוניים היא תת-קבוצה של $\mathbb{Q}$. לפעמים מסמנים אותה באות $\mathbb{D}$.
דוגמה: 0.5 הוא מספר רציונלי, מכיוון שאפשר לייצגו באמצעות השבר $\frac{1}{2}$.

מספר אי-רציונלי - מספר שאי-אפשר להציגו על-ידי שני מספרים שלמים.
דוגמה: נוכיח בהמשך שהמספר $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

מספר ממשי - מספר שאפשר לייצגו על-ידי נקודה על ציר המספרים,
בין שמַכירים דרך למקם אותו בדיוק על הציר ובין שלא.
בקבוצה זו נכללים כל המספרים שראינו עד כה: מספרים טבעיים, מספרים שלמים, מספרים רציונליים ומספרים אי-רציונליים. נהוג לסמן את קבוצת המספרים הממשיים באות $\mathbb{R}$.
דוגמה: $\frac{1}{2}$, -3 , 0, $\sqrt{2}$, ...-7.21221222122221 הם מספרים ממשיים.



מספרים ממשיים

קבוצות מספרים

כדי להוכיח ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי, נוכיח כאן כמה עובדות על מספרים שלמים.

1. א) נתון מספר שלם n. האם המספר $2n$ הוא זוגי או אי-זוגי? ______

ב) האם המספר $2n + 1$ הוא זוגי או אי-זוגי? ______

2. א) נתון מספר זוגי k. האם קיים מספר שלם n, כך שיתקיים $k = 2n$? נמקו את תשובתכם, ותנו דוגמה.

______

ב) נתון מספר אי-זוגי s. האם קיים מספר שלם n, כך ש- $s = 2n + 1$? נמקו את תשובתכם, ותנו דוגמה.

______

3. א) ידוע ש- k הוא מספר זוגי. מה אפשר לומר על המספר k^2? כתבו הוכחה, שיהיה בה אחד הביטויים המופיעים בשאלה 2.

______

______

ב) ידוע ש- s הוא מספר אי-זוגי. מה אפשר לומר על המספר s^2? כתבו הוכחה שיהיה בה אחד הביטויים המופיעים בשאלה 2.

______

______

4. ידוע שהמספר k^2 הוא מספר זוגי. האם ייתכן שהמספר k הוא מספר אי-זוגי? הסבירו את תשובתכם.

______

______

5. נתון ש- $m^2 = 2k^2$. האם ייתכן כי המספר m הוא מספר אי-זוגי?

אם כן, כתבו דוגמה ל- m ול- k מתאימים. אם לא, הסבירו מדוע.

______

______

6. א) מה יש יותר: מספרים טבעיים או מספרים טבעיים זוגיים? ______

ב) מה יש יותר: מספרים טבעיים אי-זוגיים או מספרים טבעיים זוגיים? ______

ג) נסו לפתור את סעיפים א׳ ו- ב׳ על-ידי התאמת כל מספר טבעי למספר זוגי בסעיף א׳, ועל-ידי התאמת כל מספר טבעי אי-זוגי למספר טבעי זוגי בסעיף ב׳. ______

______

מספרים ממשיים

$\sqrt{2}$

טוענים שהמספר $\sqrt{2}$ הוא המספר האי-רציונלי העתיק ביותר.

ישנם קירובים רבים של $\sqrt{2}$ באמצעות שברים.

למשל, ... $\frac{8119}{5741}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{2}$ הם הקירובים של $\sqrt{2}$.

המספר 1.41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37695

הוא $\sqrt{2}$ המעוגל עד חמישים הספרות הראשונות אחרי הנקודה העשרונית.

נראה שהמספר $\sqrt{2}$ הוא מספר ממשי על-ידי כך **שנסמן את המספר על ציר המספרים**.

על-גבי ציר המספרים נסמן קטע באורך של יחידה אחת (ראו סרטוט).

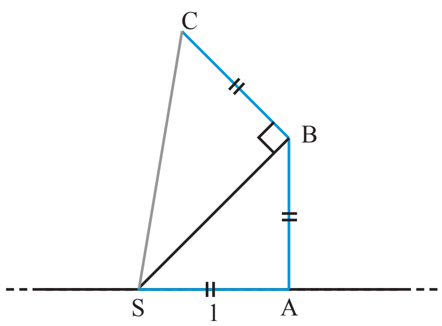
ניעזר במשפט פיתגורס כדי לבנות קטע באורך $\sqrt{2}$.

נבנה משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים, שמידת כל אחד מניצביו היא 1. לפי משפט פיתגורס, מידת היתר במשולש תהיה שווה ל- $\sqrt{2}$ = $\sqrt{1^2 + 1^2}$.

לאחר שבנינו את המשולש, ניעזר במחוגה, ונקצה על-גבי הציר קטע באורך השווה ליתר המשולש.

קצה אחד יהיה על ראשית הציר, והקצה השני יגיע למקום של $\sqrt{2}$ על גבי ציר המספרים.

הוכחנו על-ידי מיקום $\sqrt{2}$ על ציר המספרים, ש- $\sqrt{2}$ **הוא מספר ממשי**. קיימות הוכחות נוספות לכך.



1. במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים SAB, נתון ש- SA = 1.

א) מהו אורך הקטע CS? ____________________

הסבירו את תשובתכם. ____________________

____

ב) היעזרו בסרטוט בסעיף א׳, ובנו קטע באורך $\sqrt{5}$.

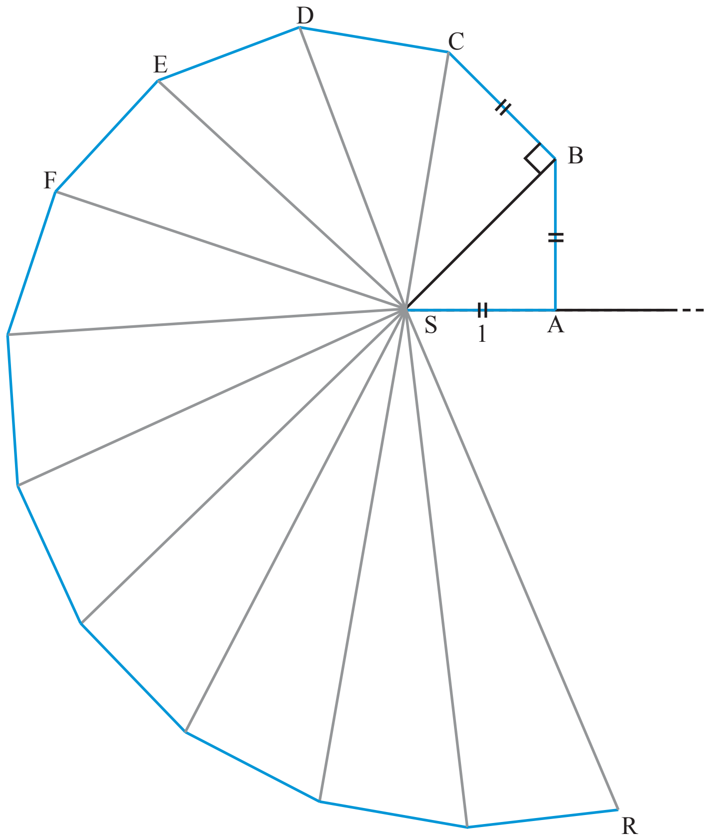
הסבירו את דרך בנייתכם.

____

____

____

2. הסרטוט שכאן בנוי בשיטה המופיעה בתרגיל הקודם: כל המשולשים ישרי–הזווית שווים, וכל הקטעים הכחולים שווים.



א) התבוננו במשולש SEF. מהם אורכי הניצבים במשולש זה? ____________ מהו אורך היתר? ____________

ב) כתבו את הסדרה של המספרים, שהם אורכי היתרים של המשולשים, מהקטן לגדול.

____

ג) הסדרה שכתבתם היא סדרה אין–סופית. מהו המספר הבא בסדרה, לדעתכם? ____________

ד) בנו בסרטוט קטע שאורכו שווה לאיבר הבא בסדרה שכתבתם.

ה) הראו כי $\sqrt{7} > \sqrt{5} > \sqrt{3}$. ____

____

מספרים ממשיים

$\sqrt{2}$

נראה שהמספר $\sqrt{2}$ איננו **מספר רציונלי**, כלומר אי-אפשר להציגו כמנה של שני מספרים שלמים.

נוכיח את הטענה הזו בדרך של שלילה: נניח כי הטענה נכונה, ותתקבל סתירה. לפיכך נסיק כי הטענה אינה נכונה.

להלן ההוכחה בדרך השלילה.

נניח כי המספר $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי, כלומר קיימים שני מספרים m ו- n, כך שמתקיים: $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$.

נניח גם שהשבר $\frac{n}{m}$ הוא שבר מצומצם, כלומר אין אף גורם משותף, חוץ מ- 1, שמחלק גם את m וגם את n ללא שארית.

כאמור, הנחנו ש- $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$. לאחר שנעלה את שני האגפים בריבוע, יתקבל $2=\frac{n^2}{m^2}$.

ולאחר שנכפיל את שני האגפים ב- m^2, יתקבל $2m^2=n^2$.

כעת שני האגפים של השוויון הם מספרים זוגיים. האגף השמאלי הוא מספר זוגי, מכיוון שהוא כפולה של 2; והאגף הימני הוא זוגי, כי הוא שווה לאגף השמאלי. אם הביטוי n^2 הוא זוגי, גם המספר n הוא זוגי. נכתוב: $n=2k$, ונציב בשוויון $2m^2=n^2$.

נקבל: $2m^2=(2k)^2$

$2m^2=4k^2$

$m^2=2k^2$

ובכן, m^2 הוא מספר זוגי, לכן גם m הוא מספר זוגי.

כלומר גם m וגם n הם מספרים זוגיים, לכן $\frac{n}{m}$ אינו שבר מצומצם.

אבל כזכור, ההנחה הייתה ש- $\frac{n}{m}$ הוא שבר מצומצם. לפיכך זו סתירה.

כלומר ההנחה ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונלי, הובילה לסתירה. לכן **המספר $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.**

1. בשיעור הוכחנו ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

א) הוכיחו שהמספר $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.

ב) הוכיחו שהמספר $\sqrt{5}$ הוא מספר אי-רציונלי.

ג) האם אפשר להוכיח בדרך דומה, שגם המספר $\sqrt{4}$ הוא מספר אי-רציונלי? נמקו את תשובתכם.

2. לפניכם הוכחה לכך שסכום של מספר רציונלי (a) ומספר אי-רציונלי (b) לא יכול להיות מספר רציונלי (c).

ההוכחה היא בדרך השלילה.

נניח ש- c רציונלי. $a + b = c$, לכן $b = c - a$, אבל הפרש בין שני מספרים רציונליים הוא מספר רציונלי, לכן ההנחה לא נכונה. לפיכך נתקבלה סתירה.

נדב ויואל מנסים להחליט אם ייתכן שהמספר $9\sqrt{2} - 4$ הוא מספר רציונלי.

נדב אומר שקל להוכיח שמכפלה של $\sqrt{2}$ במספר שלם היא מספר אי-רציונלי. לכן המספר הנתון הוא אי-רציונלי.

א) האם נדב צודק? ______

ב) הוכיחו שהמכפלה של $\sqrt{2}$ במספר שלם היא מספר אי-רציונלי, על-ידי הוכחה דומה להוכחה הנתונה.

ג) נמקו את תשובתכם לסעיף א׳. רמז: השתמשו בהוכחה דומה להוכחה הנתונה.

מספרים ממשיים

$\sqrt{2}$ ודפי A4

אפשר לומר כי המספרים π, φ ו- $\sqrt{2}$ הם המספרים האי-רציונליים המפורסמים והשימושיים ביותר.

השימוש הנפוץ ביותר של $\sqrt{2}$ נמצא כל יום לפנינו: דף הצילום וההדפסה מסוג A4.

1. במשימה שלפניכם יתגלה מהו מקור המידות של דף A4.

א) קחו שני דפי A4 . (כדאי שהדפים יהיו בשני צבעים שונים,

וְלא - אפיינו אחד מהדפים על-ידי קווים או ציור אחר.)

גזרו מדף אחד רצועה מלבנית.

ב) בצעו את הפעולות I - IV בחלק הגדול של הדף הגזור ובדף השלם.

I. גזרו כל דף לשני חלקים שווים. חלקו את הצלע הגדולה יותר לשניים.

II. הניחו בצד חצי אחד מכל דף, והמשיכו לבצע את הפעולות בחצי השני.

III. חזרו על פעולות I ו- II לפחות שמונֶה פעמים.

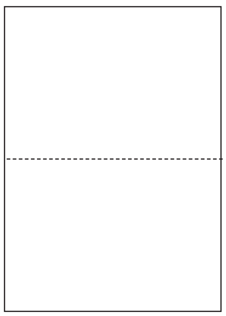
(שימו לב! בכל פעם מחלקים את הצלע הגדולה.)

IV. קיבלתם שתי מערכות של חלקים שהולכים וקטנים.

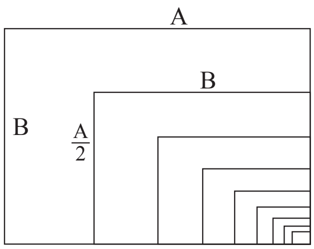
סדרו את הדפים זה על זה מהגדול לקטן לאורך הצלע הגדולה, כך שהקצה שלהם בקדקוד הימני התחתון.

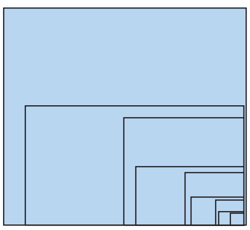
אם פעלתם נכון, התקבלו שני דגמים כאלה:

A4



לא A4





ג) מהו, לדעתכם, ההבדל בין שני הדגמים? ________

____

____

ד) מלאו את הטבלה בנתונים של דף A4 שלם כך: A - אורך הדף המקורי; B - רוחבו.

שלב	0	1	2	3	4	5	6	7	8
אורך - a	A	B	$\frac{A}{2}$						
רוחב - b	B	$\frac{A}{2}$	$\frac{B}{2}$						
היחס $\frac{a}{b}$									

ה) התבוננו בשורה האחרונה בטבלה, וקבעו באיזה תנאי היחס נשאר קבוע. ________________

לפי תנאי זה, מה צריכות להיות המידות של A ושל B, כדי ששטח הדף יהיה בדיוק 1 מ"ר?

____

____

לפי מידות אלה, מהן המידות של הדף בשלב 4? ________________

π - פאי

המספר π מייצג יחס קבוע בין היקף המעגל לבין קוטרו.

π הוא מספר אי-רציונלי מפורסם שיִיצוגו העשרוני עד חמישים ספרות ראשונות הוא

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510.

הקירוב של π כשבר הוא $\frac{22}{7}$ או $3\frac{1}{7}$.

משתמשים במספר π בנוסחאות לחישוב היקף מעגל, שטח עיגול, שטח אליפסה, נפח כדור, שטח פנים של כדור, נפח גליל, שטח פנים של גליל, נפח חרוט ובעוד נוסחאות רבות אחרות.

בפרק זה נכיר שיטות לחישוב של π. הדרך לחישוב של π העסיקה מתמטיקאים כבר מתקופות עתיקות. ישנה התייחסות לנושא גם במקורות יהודיים וגם במקורות אחרים. במקרא, בספר מלכים א׳, מתוארים היקף מעגל וקוטרו, והיחס העולה מהתיאור הוא אחת לשלוש.

גם בסין העתיקה עסקו בנושא זה. לפני כ- 2,000 שנה חישבו הסינים את היחס בין היקף מצולע חסום במעגל לבין קוטרו, וכך הִגיעו ישירות לקירובים של π. המתמטיקאי הסיני לי-הוי (Li Hui), שחי לפני כ- 1,700 שנה חסם בשלב ראשון משושה משוכלל במעגל, ובכל שלב הוא הכפיל את מספר הצלעות של המצולע כדי להתקרב להיקף המעגל. כך הוא קיבל מצולעים של 12, של 24, של 48 ושל 96 צלעות. את אורך צלעות המצולעים הוא חישב באמצעות משפט פיתגורס.

קירובים ל- π לפי לי-הוי:

מספר הצלעות	6	12	24	48	96
היחס: היקף/קוטר	3	3.105	3.133	3.139	3.141

בשיטת לי-הוי ברור כי ערך ה- π גדול מכל קירוב שמתקבל, אך לא ידוע בכמה.

המתמטיקאי היווני ארכימדס, שחי בשנות 212 - 287 לפנה״ס, פיתח את שיטת לי-הוי. ארכימדס השתמש לא רק במצולעים חסומים במעגל, אלא גם במצולעים חוסמים. הוא חסם מצולע משוכלל במעגל, וגם חסם את המעגל במצולע משוכלל בעל אותו מספר צלעות. לאחר מכן הכפיל בכל שלב את מספר צלעות המצולעים, וכך היו שני ההיקפים כמעט כמו היקף המעגל. בדרך זו כלא את π בין שני ערכים, אחד גדול ממנו ואחד קטן ממנו. ולאחר שעבד במצולע של 96 צלעות, הִגיע ארכימדס לתוצאה הזו:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

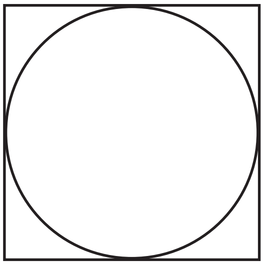
מספרים ממשיים

π - פאי

קיימות מספר שיטות נוספות לחישוב של π, ונכיר אחת מהן.

1. חישוב π באמצעות שיטה סטטיסטית - שיטת מונטה-קרלו.

בציור שלפניכם מופיע ריבוע שבתוכו חסום מעגל. (קוטר המעגל שווה לצלע הריבוע.)



א) מהו היחס בין שטח העיגול לבין שטח הריבוע? הציגו את התשובה באמצעות π.

ב) דמיינו שיורים חצים מקשת לעבר מטרה שהיא הריבוע המופיע בסרטוט. החצים אינם מכוונים למקום מסוים בתוך הריבוע, אלא כל נקודה בתוך הריבוע היא מטרה. סמנו על-גבי הציור באופן אקראי נקודות במקומות אפשריים של פגיעת החצים. (סמנו לפחות 50 נקודות שמפוזרות בצורה אחידה ככל האפשר.)

ג) מצאו יחס בין מספר הנקודות שנמצאות בתוך העיגול לבין סך-כל הנקודות.

ד) היעזרו בסעיף א׳, והציעו דרך לחישוב מקורב של π באמצעות היחס שמצאתם בסעיף ג׳. הסבירו את תשובתכם.

ה) חשבו את π באמצעות השיטה מסעיף ד׳.

ו) הציעו דרך להעלות את רמת הדיוק של החישוב בשיטת מונטה-קרלו.

ז) סכמו את השיטה במילים: כיצד אפשר לחשב את המספר π בשיטת מונטה-קרלו?

---

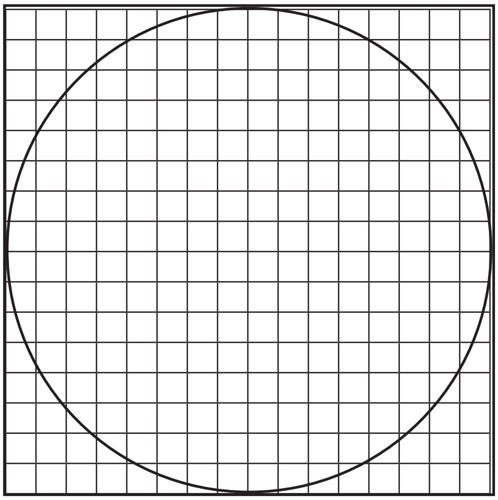
2. דנה טוענת: "היחס בין שטחו של רבע עיגול לבין שטח הריבוע הבנוי על רדיוס העיגול הוא $\frac{\pi}{4}$".

א) האם הטענה של דנה נכונה? הסבירו את תשובתכם. (היעזרו בתרגיל 1.)

ב) הציעו שיטה לחשב את π באמצעות הטענה של דנה ובדרך הדומה לשיטת מונטה-קרלו.

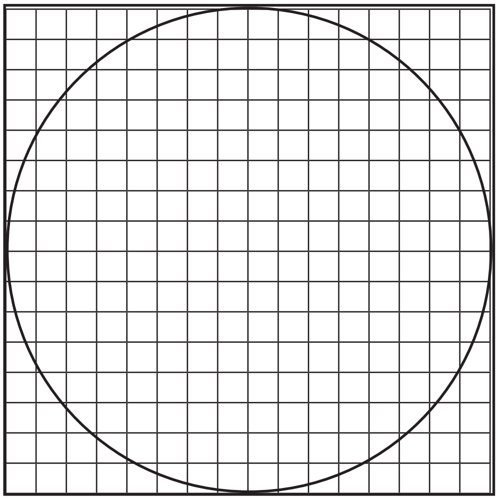
היעזרו בדף נייר משובץ, בסרגל, במחוגה ובנקודות שתציירו.

תיאור השיטה:



ג) הציעו שיטה לחישוב π באמצעות סרטוט דומה על-גבי דף משובץ, אך ללא ציור הנקודות. הסבירו את תשובתכם.

מה יכול להחליף את הנקודות?



הצגת שבר כמספר עשרוני

אפשר להציג כל שבר באמצעות מספר עשרוני. לשם כך קיימות שתי דרכים.

<u>דרך א</u>: הרחבת השבר כך שהמכנה שלו יהיה חזקה של 10.

דוגמה: $\frac{1}{80} = \frac{1 \cdot 125}{80 \cdot 125} = \frac{125}{10{,}000} = 0.0125$.

<u>דרך ב</u>: חישוב המנה על-ידי חילוק.

דוגמה: $\frac{5}{7} = ?$

נחלק 5 ב- 7 באמצעות החילוק הארוך.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{0.714285714285\ldots} \\ 50 & 7 \\ -\underline{40} & \\ 10 & \\ -\underline{\ \ 7} & \\ 30 & \\ -\underline{28} & \\ 20 & \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

כעת נבדוק באֵילו מקרים אפשר להשתמש בשיטת ההרחבה, ובאֵילו מקרים חייבים להיעזר בחילוק ארוך כדי להפוך את השבר למספר עשרוני.

נתייחס לשבר המצומצם $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

טענה 1: כאשר $b = 2^m \cdot 5^n$, אפשר להפוך את השבר $\frac{a}{b}$ למספר עשרוני באמצעות הרחבת השבר, כך שבמכנה תתקבל חזקה של 10. (כאשר לא קיים גורם הרחבה שבאמצעותו תהיה במכנה חזקה של 10, אי-אפשר להשתמש בתהליך ההרחבה).

<u>דוגמה</u>: בשבר $\frac{1}{80}$, $a = 1$, $b = 2^4 \cdot 5^1$. לפיכך אפשר להפוך את השבר למספר עשרוני באמצעות הרחבה.

1. נימוק טענה 1

א) כתבו מספר טבעי שהמחלקים היחידים שלו הם מכפלות של חזקה של 2 בחזקה של 5. ____________________

ב) באיזה מספר טבעי אפשר לכפול את 40, ותתקבל חזקה של 10? __________________________________

ג) באיזה מספר טבעי אפשר לכפול את $c = 2^3 \cdot 5^4$, ותתקבל חזקה של 10? ______________________________

ד) האם קיים מספר טבעי שבמכפלתו ב-70 תתקבל חזקה של 10? _______ נמקו את תשובתכם.

____

____

2. כתבו את המספרים שלפניכם בשיטה העשרונית.

$\frac{3}{55}$ ______ $\frac{1}{16}$ ______

$\frac{5}{11}$ ______ $\frac{11}{8}$ ______ $\frac{2}{9}$ ______

3. כתבו חמישה שברים שונים שאפשר להפוך אותם למספר עשרוני באמצעות הרחבה. כתבו את ההרחבות המתאימות.

______

______

______

______

______

כיצד אפשר למצוא את גורם ההרחבה? ______

______

טענה 2: כאשר אפשר להפוך שבר למספר עשרוני בעזרת הרחבה, מתקבל מספר עשרוני סופי (כלומר יש לו מספר סופי של ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

4. **הסבר טענה 2.**

א) תנו שתי דוגמאות המתאימות לטענה. ______

ב) נמקו את הטענה.

______

______

______

5. האם אפשר לכתוב את השברים שכאן כמספרים עשרוניים סופיים?

א) $\frac{1}{2}$ ______ ב) $\frac{2}{3}$ ______

ג) $\frac{5}{200}$ ______ ד) $\frac{3}{400,000,000}$ ______

מספר עשרוני הוא **אין-סופי**, אם כותבים את החלק השברי בעזרת מספר אין-סופי של ספרות השונות מ- 0.

מסמנים מספר אין-סופי על-ידי נקודות ... מימין למספר. דוגמה: $35.1578219...$

מספר עשרוני הוא **אין-סופי מחזורי**, אם בחלק השברי שלו מופיעה סדרה של מספרים החוזרת על עצמה מיד לאחר הנקודה העשרונית או לאחר כמה ספרות שונות מהסדרה.

מסמנים מספר עשרוני **אין-סופי מחזורי** על-ידי קו ‾ מעל סדרת המספרים החוזרת על עצמה.

<u>דוגמאות</u>: $4.2525252525.... = 4.\overline{25}$ $\qquad$ $13.2223535353535... = 13.222\overline{35}$

טענה 3: כאשר **אי-אפשר** להפוך שבר למספר עשרוני בעזרת הרחבה, מתקבל מספר עשרוני אין סופי מחזורי.

6. א) כתבו שלושה שברים שונים ש<u>אי-אפשר</u> להפוך אותם למספרים עשרוניים באמצעות הרחבה.

____

ב) הפכו את השברים מסעיף א׳ למספרים עשרוניים. כתבו חמש עשרה ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

____

____

____

ג) האם קיבלתם מספרים עשרוניים סופיים? מספרים עשרוניים אין-סופיים? מספרים עשרוניים אין-סופיים מחזוריים?

____

7. א) כאשר מחלקים מספר כלשהו ב- 7, אֵילו שאריות עשויות להתקבל? ______________________________

כמה מספרים כתבתם? ______________________________

ב) כתבו את השבר $\frac{3}{7}$ כמספר עשרוני בדיוק של עד 20 ספרות לאחר הנקודה העשרונית.

____

ג) האם כדי לענות על סעיף ב׳ היה צורך לבצע 20 שלבי חילוק ארוך? אולי אפשר היה לסיים את העבודה במספר קטן יותר של שלבי חילוק? הסבירו את תשובתכם.

____

____

____

ד) מהו אורך החלק המחזורי במספר העשרוני בסעיף ב׳?

____

ה) האם ייתכן שבר מהצורה $\frac{a}{7}$, כך שהחלק המחזורי של המספר העשרוני המתאים יהיה ארוך יותר מזה שבסעיף ד׳? הסבירו את תשובתכם.

____

____

____

8. לפניכם שבר מצומצם $\frac{5}{11}$. היעזרו במסקנות מהתרגילים הקודמים, וענו על השאלות.

א) האם המספר העשרוני המתאים לשבר הנתון הוא שבר סופי או שבר אין-סופי? ______________

ב) אם קבעתם כי המספר העשרוני הוא אין-סופי, האם הוא מחזורי? הסבירו את תשובתכם. __________

____

____

ג) אם קבעתם כי השבר האין-סופי הוא מחזורי, מהו האורך המרבי האפשרי של החלק המחזורי? הסבירו את תשובתכם.

____

____

ד) חשבו את המספר העשרוני המתאים, ובדקו אם השערותיכם מסעיפים א׳ - ג׳ נכונות.

____

____

9. היעזרו בתרגילים 7 ו- 8, והשלימו את המסקנה הכללית:

כשהופכים שבר **מצומצם** $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ למספר עשרוני, אם יתקבל מספר עשרוני אין-סופי, הוא בהכרֵחַ יהיה מחזורי, ואורך החלק המחזורי לא יהיה יותר מ- ______________________________

10. נתון תרגיל חילוק: $216 : 34$. ענו על השאלות א׳ - ג׳ ללא חישוב.

א) האם תוצאת החילוק היא מספר עשרוני סופי? מספר עשרוני אין-סופי? מספר עשרוני אין-סופי מחזורי? הסבירו את תשובתכם.______

______

______

ב) אם קבעתם כי התוצאה היא מספר עשרוני מחזורי, מהו האורך המרבי האפשרי של החלק המחזורי? הסבירו את תשובתכם.______

ג) בצעו את החילוק בפועל, ובדקו אם צדקתם בסעיפים א׳ - ב׳.

______

11. כתבו שלושה שברים בעלי מכנה אי-זוגי, שלאחר המעבר למספר עשרוני יתקבל מספר עשרוני אין-סופי מחזורי, שבחלק המחזורי שלו יהיו בהכרֵחַ פחות מ- 20 ספרות. הסבירו את תשובתכם.

______

______

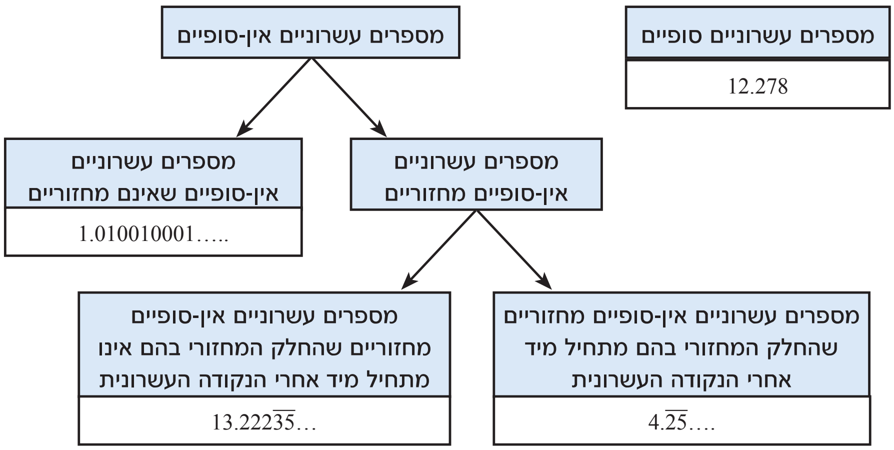
מספרים ממשיים

מספרים אי-רציונליים

סוגי מספרים עשרוניים

אפשר להציג כל מספר באמצעות מספר עשרוני.

מספרים עשרוניים נחלקים לכמה סוגים.



כל המספרים העשרוניים שאפשר לייצגם על-ידי שבר, הם **מספרים רציונליים**. (RATIO בלטינית = יחס.)

לכן מספרים עשרוניים אין-סופיים שאינם מחזוריים הם **מספרים אי-רציונליים**.

בפרק זה נלמד להפוך מספרים עשרוניים לשברים.

מקרה 1: הפיכת מספר עשרוני סופי לשבר.

נשתמש בהגדרה של מספר עשרוני כדי להפוך מספר עשרוני לשבר: $12.278 = 12\frac{278}{1,000} = 12\frac{139}{500}$

בצורה דומה אפשר להפוך כל מספר עשרוני סופי לשבר.

מקרה 2: הפיכת מספר עשרוני מחזורי לשבר.

נהפוך את המספר המחזורי $14.2\overline{35}$ לשבר. נעבוד רק בחלק השברי של המספר.

המטרה היא "להיפטר" מהחלק המחזורי. לשם כך נשתמש במכפלה בחזקות של 10, וניצור שני מספרים שהחלק המחזורי שלהם שווה ומתחיל מיד אחרי הנקודה העשרונית.

במקרה שלנו נסמן $x = 0.2\overline{35}$. ניעזר בכפולות של חזקות של 10, וניצור שני מספרים שהחלק המחזורי שלהם זהה.

$10x = 2.\overline{35}$. במספר זה הסדרה המחזורית מופיעה מיד לאחר הנקודה העשרונית.

$1,000x = 235.\overline{35}$

נחסר בין המספרים כדי "להיפטר" מהחלק המחזורי.

$$1,000x - 10x = 235.\overline{35} - 2.\overline{35}$$

$$990x = 233$$

$$x = \frac{233}{990}$$

לפיכך $14.2\overline{35} = 14\frac{233}{990}$

בצורה דומה אפשר להפוך כל מספר עשרוני מחזורי למספר מעורב.

1. הפכו את המספרים שלפניכם למספרים מעורבים.

א) 0.123 ____________

ב) 1.27 ____________

ג) 213.6667 ____________

2. הפכו את המספרים שלפניכם למספרים מעורבים.

א) $0.\overline{235}$ ____________

ב) $1.\overline{17}$ ____________

ג) $24.2\overline{4}$ ____________

ד) $123.123\overline{45678}$ ____________

3. נטע טוענת כי לא ייתכן שהייצוג העשרוני של השבר $\frac{3}{11}$ הוא $0.\overline{23456787654}$.

בלי להפוך את השבר לייצוג העשרוני, נמקו את הטענה של נטע.

____

____

4. דינה וגלי משחקות במשחק המספרים. הן מְטילות מטבע. כאשר מתקבלת "תמונה", כל אחת צריכה לכתוב בתורה מספר רציונלי; וכאשר מתקבל "מספר", כל אחת צריכה לכתוב בתורה מספר אי-רציונלי.

א) בהטלה האחרונה התקבל "מספר", ודינה כתבה: $1.000001111111...$.

האם דינה צודקת? ____________

ב) בהטלת מטבע התקבלה "תמונה", וגלי כתבה: $.19$ האם גלי צודקת? ____________

ג) בהטלת מטבע התקבלה "תמונה", ודינה כתבה: $.0$ האם דינה צודקת? ____________

ד) בהטלת מטבע התקבל "מספר", וגלי אמרה: " נכתוב את המספר $1.11111111...$, לאחר מכן נחליף חלק מהספרות ב- 0 כך: פעם אחת אחרי דילוג אחד, אחר-כך אחרי שני דילוגים, אחר-כך אחרי שלושה דילוגים וכן הלאה. בסוף נקבל: $1.10110111011110111110...$." האם גלי צודקת? ____________

ה) הציעו דוגמאות נוספות לשברים אין-סופיים לא-מחזוריים, המייצגים מספרים אי-רציונליים. הסבירו מדוע בדרך שאתם מַציעים מובטח שהשברים אכן לא-מחזוריים.

____

____

____

המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

המכון למצוינות בהוראה

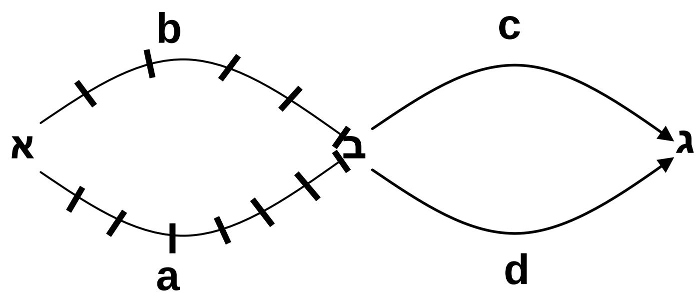
עניין של אופטימיזציה

מאת: אמנון זקוב

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג

תיאור המשימה

בפני עמיר מוצג האתגר הבא: עליו להגיע מנקודה א' לנקודה ג' לפי הכללים הבאים:



1. לרשותו יעמדו 70 ₪ במטבעות של 10 ₪ בלבד. בדיוק בשעה 8^{00} בבוקר הוא יתניע את מכוניתו בנקודה א' וייסע אל נקודה ב' דרך כביש a או דרך כביש b.

2. בכביש a קיימים 7 קטעי נסיעה ו-7 מחסומים. מחיר המעבר בכל מחסום הוא 3 ₪. לפקיד במחסום מותר לתת עודף של מטבע אחת בלבד: 5 ₪ או שקל אחד, ולכן ייתכן שהתשלום ייצא גבוה מ-3 ₪. כל קטע נסיעה, כולל זמן המחסום שבסופו, נמשך 11 דקות.

3. בכביש b קיימים 5 קטעי נסיעה ו-5 מחסומים. זמן הנסיעה בכל קטע, כולל זמן המחסום שבסופו, הוא 15 דקות. בכל מחסום יש לשלם 6 ₪, ולפקיד מותר להחזיר עד 3 מטבעות של 5 ₪ או של שקל אחד (הוא יכול להחזיר עודף שבו מטבעות משני הסוגים). גם כאן ייתכן שייצא תשלום גבוה מ-6 ₪.

4. כאשר מגיעים לנקודה ב', שהיא תחנת רכבת, ישנן 2 אפשרויות:

- לבחור ברכבת c היוצאת פעם בשעה, בשעות 06:30 , 07:30 , 08:30 ... זמן הנסיעה ברכבת זו 25 דקות ומחיר הנסיעה 30 ₪.
- לבחור ברכבת d שזמני היציאות שלה אינם נתונים אך ידוע שההפרש ביניהם הוא בדיוק 20 דקות. אם למשל יוצאת רכבת בשעה 06:22 אז הרכבת הבאה יוצאת בשעה 06:42 וזו שאחריה יוצאת בשעה 07:02 וכך הלאה. אך כאמור, לא נתונים זמני היציאות של הרכבת (ייתכן אפילו שזמני היציאות הם לא בדקות עגולות). לעומת זאת, נתון שזמן הנסיעה ברכבת זו הוא 27 דקות ומחיר הנסיעה הוא 27 ₪.

בסוף המשימה, כאשר יגיע עמיר לנקודה ג', יתבצע התגמול הבא:

- עמיר יחזיר תחילה את השקלים שנותרו לו מ-70 השקלים שניתנו לו בתחילה. על כל שקל שיחזיר יקבל 20 ₪.
- עבור כל דקה בה יקדים להגיע לפני השעה 10^{00} יקבל 100 ₪.
- עבור כל איחור של דקה אחרי 10^{00} ישלם 200 ₪.

שימו לב לתנאי נוסף:

לפני שעמיר יוצא למשימה עליו להחליט מראש באיזו מארבע הדרכים הבאות הוא בוחר: a-c או b-c או a-d או b-d.

שאלות

1. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול a-c?
2. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול b-c?

מסלולים a-d ו- b-d עושים שימוש ברכבת d שזמני הנסיעה המדויקים שלה אינם ידועים. מי שבוחר במסלולים אלה תלוי גם במזל. במקרה הטוב ביותר מבחינתו, הוא יגיע לנקודה ב' בדיוק ברגע שרכבת d תגיע לשם, ויעלה עליה מיד. במקרה הגרוע ביותר, הוא יגיע לנקודה ב' בדיוק ברגע שרכבת d עזבה אותה ואז ייאלץ להמתין לרכבת הבאה 20 דקות.

3. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול a-d ויתמזל מזלו, כלומר, רכבת d תגיע לנקודה ב' בדיוק באותו הזמן בו הוא יגיע לשם?
4. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול a-d ולרוע מזלו יגיע לנקודה ב' בדיוק כשרכבת d עזבה את התחנה, ולכן ייאלץ להמתין 20 דקות?
5. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול b-d ויתמזל מזלו, כלומר, רכבת d תגיע לנקודה ב' בדיוק באותו הזמן בו הוא יגיע לשם?
6. מה יהיה התגמול של עמיר אם יבחר את המסלול b-d ולרוע מזלו יגיע לנקודה ב' בדיוק כשרכבת d עזבה את התחנה, ולכן ייאלץ להמתין 20 דקות?
7. **באיזו מארבע הדרכים הייתם ממליצים לעמיר לבחור?**

מטח
המרכז לטכנולוגיה חינוכית

שבילים למצוינות

מתמטיקה לכיתה ח

מטח

■ אופטימיזציה בחיי יומיום

אופטימיזציה בחיי יומיום

1 **אמיר קונה בגדים**

אמיר קיבל 310 ש"ח כדמי חנוכה. הוא החליט לקנות מספר מרבי של פריטי ביגוד – חולצות וסוודרים.
מחיר כל חולצה הוא 15.90 ש"ח ומחיר כל סוודר 29.95 ש"ח.

א. אם אמיר מעוניין לנצל את הסכום שברשותו כך שיישאר לו סכום כסף קטן ככל האפשר – כמה חולצות וכמה סוודרים כדאי לו לקנות?

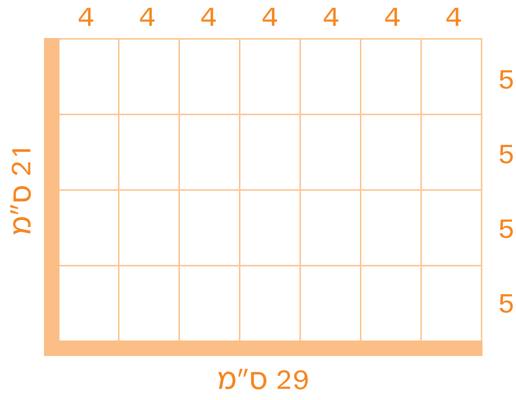
ב. אם אמיר מעוניין לנצל את הסכום שברשותו לקניית פריטים רבים ככל האפשר – כמה חולצות וכמה סוודרים כדאי לו לקנות?

לביצוע החישובים אפשר להיעזר בתוכנת excel .

במצבים שונים בחיי היומיום עלינו לבחור מתוך מגוון רחב של אפשרויות את האפשרות האחת המתאימה ביותר לצרכינו השונים.
לבעיות מסוג זה ולתהליך מציאת האפשרות היעילה ביותר מתוך מגוון רחב של אפשרויות נהוג לקרוא **אופטימיזציה**.

2 כמה כרטיסים אפשר לגזור מהדף?

גודלו של דף נייר A4 (הדף המצוי בדרך כלל במדפסות ובמכונות צילום) הוא 21 ס"מ x 29 ס"מ.
בבית דפוס מעוניינים לגזור מדף כזה מספר רב ככל האפשר של כרטיסים בגודל 4 ס"מ x 5 ס"מ.
תחילה מסרטטים וגוזרים כרטיסים רבים ככל האפשר באותו הכיוון,
אחר כך מנסים לגזור מהשאריות כרטיסים נוספים.



א. בסרטוט מוצגת דרך אפשרית לגזירת הכרטיסים.
1. כמה כרטיסים אפשר לגזור מדף A4 בדרך זו?
2. מהו שטח הנייר שנשאר בדרך זו?
3. כמה כרטיסים ניתן לגזור מהשטח שנשאר?

ב. הציעו תכנית אחרת לגזירת הכרטיסים בגודל הדרוש
לפי הכללים שנקבעו בבית הדפוס.
1. כמה כרטיסים אפשר לגזור לפי התכנון החדש?
2. מהו שטח הנייר הבלתי מנוצל שנשאר בדרך זו?
3. האם הדרך שמצאתם יעילה יותר מזו שהוצגה בסעיף א?
4. אם נוותר על כללי הגזירה הנהוגים בבית הדפוס –
האם נוכל לגזור מדף A4 מספר גדול יותר של כרטיסים בגודל הדרוש? הסבירו.
5. האם אתם בטוחים שמספר הכרטיסים שהגעתם אליו בסעיף הקודם
הוא המספר הגדול ביותר האפשרי? הסבירו.

ג. טליה מציעה דרך למציאת מספר הכרטיסים המרבי שניתן לגזור מדף כלשהו,
כאשר נתונות המידות של הכרטיסים ומידות הדף:

- מחשבים את שטח הדף.
- מחשבים את שטח הכרטיס.
- מחלקים את שטח הדף בשטח הכרטיס כדי לדעת כמה כרטיסים ניתן לגזור.

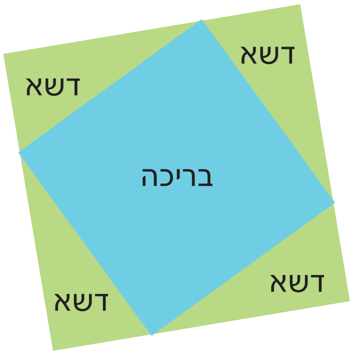
במקרה שלנו:
שטח הדף: 609 סמ"ר = 21 ס"מ x 29 ס"מ
שטח הכרטיס: 20 סמ"ר = 5 ס"מ x 4 ס"מ
מספר הכרטיסים: $609 : 20 = 30\frac{9}{20}$

המסקנה: מספר הכרטיסים המרבי בגודל 4 ס"מ x 5 ס"מ שאפשר לגזור מדף A4 הוא 30.

1. בדקו את הדרך של טליה כאשר הדף הוא A4 וגודל הכרטיסים הוא 3 ס"מ x 2 ס"מ. מה מצאתם?
2. האם הדרך של טליה נכונה לכל המקרים? אם כן – נמקו; אם לא – הציעו דוגמה נגדית:
הציעו מידות של דף ושל כרטיסים שעבורם החישוב של טליה אינו מראה
את מספר הכרטיסים המרבי שניתן לגזור.

3 **תכנון בריכה**

במועדון הספורט מתכננים לבנות בריכה על מגרש בצורת ריבוע שצלעו 100 מ'. הבריכה צריכה להיות ממוקמת על המגרש כמו שמתואר בתרשים שמשמאל. כל משולשי הדשא צריכים להיות חופפים זה לזה.



א. מהי צורתה של הבריכה? הסבירו.

ב. הציעו כמה אפשרויות שונות לתכנון הבריכה בהתאם לדרישות.
לכל אפשרות שהצעתם חשבו את שטח הבריכה ואת שטח הדשא.

ג. שערו כיצד צריך לתכנן את הבריכה במסגרת הדרישות אם רוצים:
1 ששטח הבריכה יהיה הגדול ביותר האפשרי.
2 ששטח הדשא יהיה הגדול ביותר האפשרי.
3 ששטח הדשא יהיה גדול משטח הבריכה.

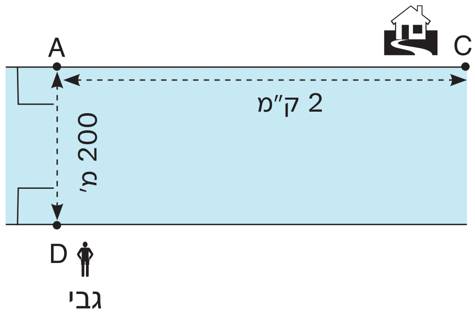
בסעיף **ג** בדקתם כמה אפשרויות לבחירת אורכי הצלעות של משולשי הדשא: חישבתם והשוויתם את שטחי הבריכה שיתקבלו במקרים השונים וכן את שטחי הדשא שיתקבלו. כדי לחקור באופן כללי יותר כיצד לתכנן את הבריכה לפי הדרישות והצרכים השונים, ניעזר בפונקציות.

ד. סמנו ב־x (מטרים) את אורך הניצב הקצר במשולשי הדשא.
כתבו ביטויים לשתי פונקציות:
- פונקציה f(x) המתארת את שטח הדשא בהתאם ל־x.
- פונקציה g(x) המתארת את שטח הבריכה בהתאם ל־x.

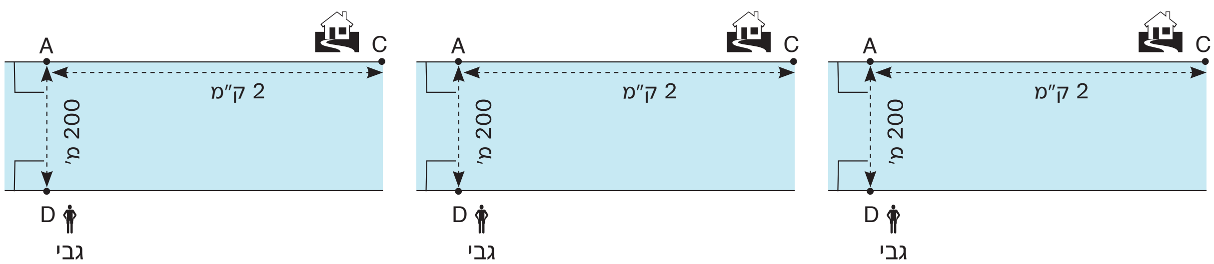
השתמשו ביישומון **הצגת פונקציות** מהילקוט הדיגיטלי חט"ב (http://juniorofek.cet.ac.il/units/he/math/unit202/act1.aspx) וענו שנית על השאלות שבסעיף **ג**.

4 בחירת מסלול

גבי נמצא על גדת אגם שרוחבו 200 מ' (בנקודה D בתרשים).
גבי מעוניין להגיע לביתו, שנמצא על הגדה האחרת של האגם (נקודה C בתרשים), במרחק של 2 ק"מ מהנקודה A. (הנקודה A נמצאת בדיוק מול גבי מעבר לאגם – ראו תרשים).
הסירה של גבי שטה במהירות של 45 מטר לדקה.
מהירות ההליכה של גבי על היבשה היא 75 מטר לדקה.



א. סרטטו 3 דרכים שונות שבהן יכול גבי להגיע הביתה.
סמנו נקודה B בין A ל־C, במקום שבו גבי יורד מהסירה בכל אחת מהדרכים.



ב. באיזו דרך גבי ילך ברגל מרחק קטן ככל האפשר? היכן תהיה הנקודה B בדרך הזו?
באיזו דרך גבי ישוט מרחק קטן ככל האפשר? היכן תהיה הנקודה B בדרך הזו?
איזו דרך היא הקצרה ביותר? היכן תהיה הנקודה B בדרך הזו?

ג. גבי מעוניין להגיע הביתה מהר ככל האפשר. שערו איזו דרך תהיה המהירה ביותר.

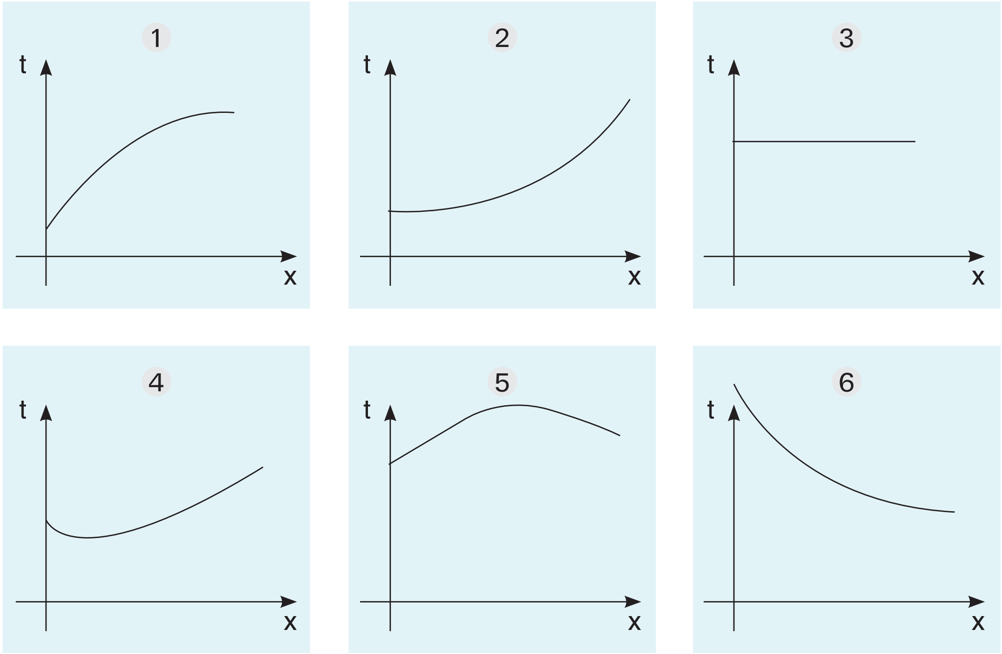
ד. בדקו כמה זמן תארך כל אחת מהדרכים האלה:
1 גבי ישוט עד לנקודה A ואחר כך ילך לאורך הגדה.
2 גבי ישוט ישר הביתה.
3 גבי ישוט עד אמצע הדרך בין A ל־C ואחר כך ילך לאורך הגדה עד הבית.
איזו משלוש הדרכים תהיה המהירה ביותר? נסו למצוא דרך מהירה עוד יותר.

ה. נסמן ב־x (מטרים) את המרחק מהנקודה A עד לנקודה B (המקום שבו גבי יֵרד מהסירה).
נסמן ב־$t(x)$ (דקות) את הזמן שיידרש לגבי כדי להגיע לביתו.
- לאיזו דרך של גבי מתאים הערך $x = 0$? והערך $x = 2000$?
- האם קיים ערך כזה של הפונקציה? הסבירו.

1 $t(288.4)$ 2 $t(-2)$ 3 $t(5000)$

המשך

ו. איזה מהגרפים יכול להיות גרף הפונקציה t(x)?



ז. כתבו באמצעות x ביטויים מתאימים:

1 לאורך הדרך שגבי שט.

2 לאורך הדרך שגבי הלך ברגל.

3 לפרק הזמן שגבי שט.

4 לפרק הזמן שגבי הלך ברגל.

5 לפונקציה t(x).

ח. השתמשו ביישומון **הצגת פונקציות** מהילקוט הדיגיטלי חט"ב
(http://juniorofek.cet.ac.il/units/he/math/unit202/act1.aspx).

1 סרטטו את גרף הפונקציה ובדקו אם הוא דומה לגרף שבחרתם בסעיף ו.
(כדי לציין $\sqrt{x}$ במחשב יש לרשום sqrt(x), ואם מחפשים שורש ריבועי
של ביטוי אלגברי יש לרשום את הביטוי בתוך סוגריים במקום x.)

2 העריכו כמה זמן תארך הדרך המהירה ביותר.

3 תארו את הדרך המהירה ביותר.

1. המשימה נמצאת בילקוט הדיגיטלי חט"ב
(http://www.cet.ac.il/math/function/square/multi/multi6.htm).

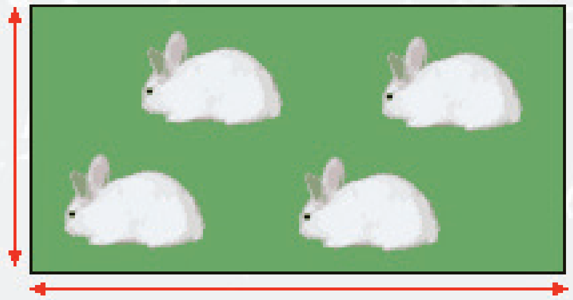
שטח לארנבים: בעיית אופטימיזציה

בתחומים רבים בחיים נתקלים בבעיות שבהן צריכים לבחור את האפשרות הטובה ביותר (האפשרות האופטימלית) מבין מגוון אפשרויות העומדות בפנינו. בעיות כאלה נקראות בעיות אופטימיזציה. במשימה זו תעסקו בבעיית אופטימיזציה הקשורה לגידור שטח.

1. גידור לארנבים

ליום הולדתה קיבלה רונית, שמשפחתה גרה במושב, ארנבים שתוכל לגדל. הוריה קנו סליל גדר באורך 30 מטר, כדי לגדר שטח בגינה שיהיה ביתם של הארנבים.

אביה של רונית הציע את התכנית הבאה לבניית בית הארנבים:



5 מ'

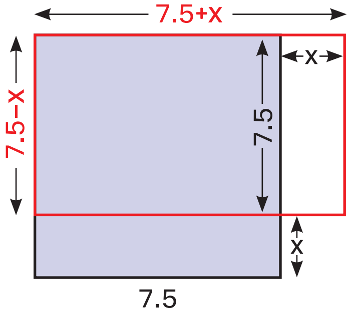
10 מ'

על–פי תכנית זו, יהיה לארנבים שטח של 50 מ' מרובע.

בעזרת השרטוט הדינמי שתמצאו בקישור שלמעלה אפשר לתאר תכניות רבות לגידור שטח מלבני בעזרת גדר באורך נתון. על ידי הזזת הנקודה C אפשר לשנות את **אורך** הגדר, ועל ידי הזזת הנקודה B אפשר לשנות את **תכנית–הגידור** מבלי לשנות את אורך הגדר.

המשך

2. רון טוען שהשטח המלבני הגדול ביותר מתקבל כאשר המלבן הוא ריבוע, כי אם מנסים להפוך את הריבוע למלבן בעל אותו היקף – השטח קטֵן.



בסרטוט שלפניכם כל האורכים נתונים במטרים.

א. הראו שהיקף המלבן האדום שווה להיקף הריבוע הסגול.

ב. הראו ששטח המלבן האדום קטן משטח הריבוע הסגול.

ג. האם אפשר להסיק מהסעיפים הקודמים, שמבין כל המלבנים שהיקפם 30 מ' – הריבוע (שצלעו 7.5 מ') הוא בעל השטח הגדול ביותר?

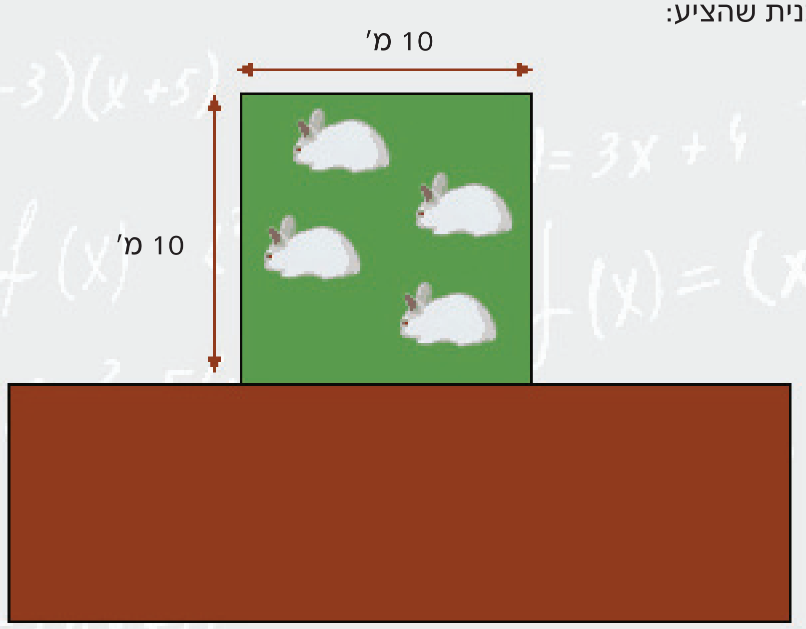
3. המשימה נמצאת בילקוט הדיגיטלי חט"ב (http://www.cet.ac.il/math/function/square/multi/multi6.htm).

שטח לארנבים: בעיית אופטימיזציה

2. ההצעה של עמרי

עמרי, אחיה של רונית, העלה את ההצעה הבאה: אפשר להשתמש באחד הקירות של המחסן הגדול העומד בחצר בתור צלע לבית הארנבים, וכך לא יהיה צורך לגדר את אחת הצלעות.

הנה התכנית שהציע:



הסרטוט הדינמי שתמצאו בקישור שלמעלה מאפשר לתאר תכניות שונות לגידור, המשתמשות ברעיון של עמרי.

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

עקרון שובך היונים

תכנית המצוינות במתמטיקה

הטכניון

חיפה
יולי, 2012

עקרון שובך היונים

תכנית המצוינות במתמטיקה

הטכניון

ראש התכנית וייעוץ מדעי ופדגוגי

פרופ' אורית זסלבסקי

מנהלת התכנית

ד"ר איריס זודיק

צוות הפיתוח

אירינה גורביץ', ד"ר איריס זודיק, ד"ר עליזה מלק

ייעוץ מתמטי

ד"ר עליזה מלק

חלק מהבעיות בפרק הזה חוברו בהשראת בעיות המופיעות בחוברות "משימות לפיתוח חשיבה מתמטית", שפותחו במסגרת פרוייקט "טל"מ – הטכניון לעידוד המתמטיקה"

עקרון שובך היונים

מבוא

פרק זה עוסק בפתרון בעיות מתמטיות. הבעיות שונות מבחינת הנושאים המתמטיים והשאלות שהן כוללות. חלק מהבעיות ניתן לפתור בדרכים שונות, אולם בכל זאת יש משהו משותף לכולן. מטרת הפרק היא ללמוד על המשותף ביניהן, ובאמצעותן ללמוד על עקרון מתמטי פשוט, שבאופן מפתיע מסייע לפתרון בעיות לגמרי לא פשוטות.

<u>בעיה 1</u>

בשקית אטומה שמים גרביים כחולות ואדומות. בכל פעם מוציאים מן השקית גרב אחת ואי אפשר לראות את צבע הגרב שמוציאים.

א. כמה גרביים חייבים להוציא כדי להבטיח שנקבל זוג תואם?
ב. האם יש חשיבות למספר הגרביים שיש מכל צבע?

נסו להסביר את תשובותיכם בדרכים שונות.

<u>בעיה 2</u>

נרחיב במקצת את בעיה 1:

בשקית אטומה שמים גרביים כחולות, אדומות, ירוקות ולבנות. בכל פעם מוציאים מן השקית גרב אחת ואי אפשר לראות את צבע הגרב שמוציאים.

א. כמה גרביים חייבים להוציא כדי להבטיח שנקבל זוג תואם? הסבירו.
ב. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף א' אם בשקית יהיו בנוסף, גם גרביים שחורות? הסבירו.
ג. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ב' אם יש בשקית בדיוק 4 גרביים מכל צבע? הסבירו.
ד. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ג' אם יש בשקית בדיוק 5 גרביים מכל צבע? הסבירו.
ה. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ד' אם יש בשקית: 3 גרביים כחולות, 4 אדומות, 7 ירוקות, 2 לבנות ו- 10 שחורות? הסבירו.
ו. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ה' אם יש בשקית: 3 גרביים כחולות, 4 אדומות, 7 ירוקות, 2 לבנות ורק אחת שחורה? הסבירו.
ז. נסו להכליל את הבעיה ולמצוא לה פתרון כללי. הסבירו.

<u>בעיה 3</u>

לסבתא יש שמונה נכדים. כל נכד מבקר אותה פעם אחת בשבוע בשעה 16:00.

א. האם ייתכן שבמשך שבוע אף שני נכדים לא ייפגשו אצל סבתא? הסבירו.
ב. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף א' אם לסבתא היו 10 נכדים? 7 נכדים? 5 נכדים? הסבירו.
ג. מהו המספר המינימלי של נכדים שצריכים להיות לסבתא, כדי להבטיח שבכל שבוע לפחות שניים מהם ייפגשו אצלה? הסבירו.

בעיה 4

נרחיב במקצת את בעיה 3:

לסבתא יש שמונה נכדים. נניח כי כל נכד מבקר אותה פעם אחת בשבוע; חלק מהנכדים באים בבוקר בשעה 10:00 וחלקם באים בערב בשעה 18:00.

א. האם בכל שבוע בהכרח יהיו שני נכדים שייפגשו אצל סבתא? הסבירו.
ב. כיצד תשתנה התשובה לסעיף א' אם לסבתא היו 10 נכדים? 20 נכדים? הסבירו.
ג. מהו המספר המינימלי של נכדים שצריכים להיות לסבתא, כדי להבטיח שבכל שבוע לפחות שניים מהם ייפגשו אצלה? הסבירו.
ד. נסו להכליל את הבעיה ולמצוא לה פתרון כללי. הסבירו.

במבט לאחור

חזרו לבעיות 1-4 שפתרתם.

א. נסו למצוא דמיון ושוני בין משפחת הבעיות 1 ו- 2 לבין משפחת הבעיות 3 ו- 4. הסבירו.
ב. נסו לחבר בעיות משלכם, שניתן לפתור בדרכים דומות.

מה אומר עקרון שובך היונים?

כדי לפתור בעיות כמו בעיות 1-4 ניתן להיעזר בעקרון מתמטי פשוט הנקרא: **עקרון שובך היונים**.

עקרון שובך היונים קובע כי אם יש m תאים בשובך שלתוכם מכניסים $m+1$ יונים, אז בהכרח קיים תא שבו תימצאנה לפחות שתי יונים.

עקרון זה, שנראה פשוט למדי, נקרא גם עקרון המגירות או עקרון דיריכלה.

עקרון שובך היונים, ככל הנראה, נוסח לראשונה באופן פורמלי על ידי מתמטיקאי בשם יוהאן גוסטב לז'ן דיריכלה (le jeune de Richelet) בשנת 1834, ומכאן שמו הנוסף - **עקרון דיריכלה**.

דיריכלה נולד בשנת 1805 בעיר הבלגית ריכלה ומכאן שמו. כבר בגיל 12 התעניין דירכילה הצעיר במתמטיקה וקנה בדמי הכיס שלו ספרי מתמטיקה. הוא הצטיין בבית הספר במתמטיקה ובהסטוריה. לאחר שסיים את בית הספר התיכון בגיל 16, למד באוניברסיטה בפריז עם מיטב המתמטיקאים בדורו, תוך שהוא גובר בהצלחה על מחלת האבעבועות השחורות. מאוחר יותר עבר לאוניברסיטאות שונות בגרמניה, שם גילה חידושים בתחומים רבים במתמטיקה ובפיזיקה. אף שתרם רבות לפתרון החידה המתמטית הידועה בשם משפט פֶּרמָה, הוא ידוע הרבה יותר בזכות עקרון דיריכלה.

אפשר לנסח את עקרון שובך היונים בעוד דרכים, למשל:

אם יש m תאים שלתוכם מכניסים יותר מ- m יונים, חייב להיות תא שמספר היונים בו גדול מאחד.

<u>שאלות למחשבה</u>:

- אם מכניסים $m+1$ יונים לתוך m תאים בשובך, האם ייתכן שיהיו שני תאים שיש בכל אחד מהם יותר מיונה אחת?
- אם מכניסים $m+1$ יונים לתוך m תאים בשובך, האם ייתכן שיהיו שלושה תאים שיש בכל אחד מהם יותר מיונה אחת?

נתבונן בדוגמה הבאה:

נניח כי בשובך שלנו יש 10 תאים, ויש לנו 11 יונים. יש לנו הרבה אפשרויות להכניס את היונים לתאים שבשובך. להלן כמה מקרים אפשריים לסידור היונים בשובך. לגבי כל אחד מהמקרים, בדקו אם אמנם יש לפחות תא אחד שבו לפחות שתי יונים.

מקרה 1 – תא אחד ריק שאין בו אף יונה, שישה תאים עם יונה אחת, ושני תאים שבכל אחד שתי יונים:

מקרה 2 – שלושה תאים ריקים, שלושה תאים עם יונה אחת וארבעה תאים שבכל אחד שתי יונים:

מקרה 3 - חמישה תאים ריקים, שני תאים עם יונה אחת ושלושה תאים שבכל אחד שלוש יונים:

מקרה 4 - תשעה תאים עם יונה אחת, ותא אחד עם שתי יונים:

כמובן שיש עוד אפשרויות רבות נוספות (מצאו עוד).

נשאלת השאלה: מה משותף לכל הסידורים הנ"ל ולכל אלה שעוד ניתן לעשות ולא הובאו כאן? התשובה לכך היא, שבכל סידור אפשרי, תמיד קיים תא שבו יותר מיונה אחת, או במלים אחרות – תמיד יימצא לפחות תא אחד שיש בו לפחות שתי יונים. גם אם ננסה "לפזר" את היונים בכמה שיותר תאים (כמו במקרה 4), עדין יימצא תא אחד שבו יש שתי יונים, שכן מספר התאים קטן ממספר היונים.

<u>בחזרה לבעיות שפתרנו:</u>

חזרו שוב לבעיות 1-4 ונסו לפתור אותן באמצעות עקרון שובך היונים. כדי לפתור את הבעיות באמצעות עקרון זה, יש צורך לזהות איזה נתון מנתוני השאלה כדאי להציג ע"י התאים בשובך ואיזה ע"י היונים.

נדגים זאת באמצעות בעיה 1:

בבעיה מופיעים שני צבעים, לכן בשובך (הדמיוני) שלנו יש שני תאים: האחד ייקרא "אדום" והשני ייקרא "כחול". עתה נוציא גרביים, וכל גרב נכניס לתא המתאים לפי הצבע שלה, לכן היונים במקרה זה הן הגרביים. נוציא את הגרב הראשונה. נניח שהיא אדומה, ולכן נכניס אותה לתא ה"אדום". עתה יש תא אחד ריק ותא אחד עם גרב אחת. נוציא גרב נוספת. אם גם היא אדומה הרי שבתא האדום יהיו עתה שתי גרביים, כלומר קיבלנו זוג תואם (במקרה זה – אדום) ובכך סיימנו.

אך ייתכן והגרב השנייה שנוציא תהייה כחולה. במקרה זה אחרי ההוצאה השנייה תהיה גרב אחת בתא האדום וגרב אחת בתא הכחול וטרם קיבלנו זוג תואם. כלומר, לא מספיק להוציא שתי גרביים כדי להבטיח שנקבל זוג תואם. אבל כעת, כשנוציא את הגרב השלישית, היא בהכרח תיכנס או לתא הכחול או לתא האדום. כלומר, באחד מהם נקבל שתי גרביים (באותו הצבע).

כלומר, כדי להבטיח שנקבל זוג גרביים מאותו הצבע עלינו להוציא 3 גרביים (ב- 1 יותר ממספר התאים שיש לנו).

נסכם את הקשר בין פתרון זה לעקרון שובך היונים:

אם ברצוננו להבטיח שיהיה תא אחד עם שתי גרביים (לקבלת זוג תואם), על פי עקרן שובך היונים, עלינו לדאוג שמספר הגרביים שנוציא (היונים) יהיה גדול ממספר הצבעים השונים של הגרביים (מספר התאים בשובך). המספר המינימלי של גרביים שיש להוציא (מספר היונים) כדי להבטיח זאת גדול בדיוק ב- 1 ממספר הצבעים השונים של הגרביים (התאים בשובך).

יישומים לעקרון שובך היונים

בעיה 5

כאשר הביאו לגן חיות 21 יונים התברר שבשובך שבגן החיות יש רק 20 תאים ריקים. הכניסו את כל 21 היונים לתאים. האם אפשר להסיק בוודאות כי:

א. קיים תא שבו יש בדיוק שתי יונים? הסבירו.
ב. קיים תא שבו יש לפחות שתי יונים? הסבירו.
ג. קיים בדיוק תא אחד שבו יש לפחות שתי יונים? הסבירו.
ד. לא נשארו תאים ריקים? הסבירו.

בעיה 6

גילה קנתה קופסת עוגיות כדי לכבד את חבריה במסיבה שערכה. כשפתחה את הקופסה, התברר שיש בה 49 עוגיות. במסיבה השתתפו 8 חברים, ובמהלכה אכלו את כל העוגיות.

א. האם יתכן שכל אחד מהחברים אכל פחות מ- 6 עוגיות? הסבירו.
ב. האם יתכן שכל אחד מהחברים אכל פחות מ- 7 עוגיות? הסבירו.
ג. האם יתכן שכל אחד מהחברים אכל פחות מ- 8 עוגיות? הסבירו.

בעיה 7

בטבלה ריבועית של 4x4 משבצות, בכל משבצת רשום מספר אחד מהמספרים: 1 ,0 ,1-. מחשבים לכל שורה את סכום המספרים בשורה, לכל עמודה את סכום המספרים בעמודה, ולכל אלכסון את סכום המספרים באלכסון.

א. מהן כל התוצאות שיכולות להתקבל כשמחשבים את הסכומים הללו? כמה תוצאות אפשריות יש? הסבירו.
ב. האם יתכן שמבין התוצאות שמתקבלות בפועל, אף שתיים אינן זהות? הסבירו.
ג. ענו על סעיפים א' ו- ב' עבור טבלה ריבועית של 5x5 משבצות וכן עבור טבלה ריבועית של 8x8 משבצות.
ד. חברו בעיות דומות עבור טבלאות ריבועיות בגדלים שונים, פתרו אותן ונסו להכליל.

עקרון שובך היונים ותכונות של מספרים טבעיים

בעיה 8

רשמו 12 מספרים דו-ספרתיים שונים. חשבו לכל מספר את השארית שלו בחילוק ב- 11. קבצו את המספרים לפי שאריות החילוק ב- 11 (למשל, המספרים 59 ו- 37 שייכים לאותה הקבוצה, כי יש להם אותה השארית בחילוק ב- 11).

א. האם בין המספרים שרשמתם יש שניים שההפרש ביניהם הוא מספר דו-ספרתי ששתי הספרות שלו זהות? (למשל, אם רשמתם את 37 ו- 59, אזי ההפרש ביניהם הוא 22, וההפרש אכן מקיים את הדרישה).
ב. רשמו 12 מספרים דו-ספרתיים אחרים, ששונים זה מזה ואינם זהים למספרים הקודמים שבחרתם. האם בין המספרים החדשים שרשמתם קיים זוג מספרים שההפרש ביניהם הוא מספר דו-ספרתי שספרותיו זהות?

ג. האם הממצאים שקיבלתם בסעיפים א' ו- ב' הם מקריים? נסו להכליל את ממצאיכם ולהוכיח (או להפריך) את נכונות ההכללות שלכם.

בעיה 9

נתונים 10 מספרים טבעיים כלשהם.

א. מה יכולה להיות השארית שכל אחד מהם נותן כאשר מחלקים אותו ב- 9?
ב. נניח כי שני מספרים נותנים את אותה שארית כאשר מחלקים אותם ב- 9. מה ניתן לומר על ההפרש של שני המספרים האלה? הסבירו.
ג. הראו כי בין כל 10 מספרים שנבחר, קיימים לפחות שניים שהפרשם מתחלק ב- 9.
ד. מה הקשר בין הבעיה הזאת והבעיה הקודמת (בעיה 8)? הסבירו.
ה. הראו שבין כל 125 מספרים טבעיים, קיימים לפחות שניים שהפרשם מתחלק ב- 124.
ו. הציעו בעיות נוספות הדומות לבעיות 8 ו- 9, פתרו אותן, ונסו להכליל.
ז. הוכיחו את הטענה הבאה:

טענה 1 (על ההתחלקות של הפרש מספרים שלמים):

בין כל k מספרים שלמים, תמיד אפשר למצוא שני מספרים שהפרשם מתחלק ב- (k-1).

בעיה 10

נתונה קבוצה של 7 מספרים שונים המורכבים רק מהספרה 1:

$$\{1\,,11\,,111\,,1111\,,11111\,,111111\,,1111111\}.$$

א. חסרו שני מספרים כלשהם מהקבוצה (חסרו את המספר הקטן מהמספר הגדול). חזרו ובצעו פעולה זו על מספר זוגות של מספרים מהקבוצה ובדקו מה מאפיין את ההפרשים האלה.
ב. הראו שניתן למצוא מספר המורכב מהספרות 0 ו- 1 בלבד שמתחלק ב- 6.
ג. הראו כי לכל מספר טבעי n, אפשר למצוא מספר טבעי המורכב רק מהספרות 0 ו- 1, שמתחלק ב- n.

עקרון שובך היונים ומרחק בין נקודות

בעיה 11

מה המרחק הגדול ביותר האפשרי בין שתי נקודות הנמצאות בתוך ריבוע נתון או על היקפו? שאלה זו תסייע בפתרון הבעיה הבאה (12). ננסה להשיב עליה באמצעות הסעיפים הבאים.

נתון ריבוע שאורך צלעו 1מ'.

א. מה המרחק הגדול ביותר האפשרי בין שני קדקודים של הריבוע? הסבירו.
ב. הראו שהמרחק בין אחד הקדקודים של הריבוע לנקודה כלשהי על היקפו קטן מאורך האלכסון של הריבוע.
ג. הראו שהמרחק בין שתי נקודות כלשהן על היקף הריבוע קטן מאורך האלכסון של הריבוע.

ד. הראו שהמרחק בין נקודה בתוך הריבוע לבין כל נקודה על היקף הריבוע קטן מאורך האלכסון של הריבוע.

ה. הראו שהמרחק בין שתי נקודות בתוך הריבוע קטן מאורך האלכסון של הריבוע.

ו. מהו המרחק המקסימלי בין שתי נקודות הנמצאות בתוך ריבוע או על היקפו, אם אורך הצלע של הריבוע הוא 2 מטר? היכן נמצאות הנקודות שהמרחק ביניהן הוא מקסימלי? הסבירו.

ז. מהו המרחק המקסימלי בין שתי נקודות הנמצאות בתוך ריבוע או על היקפו, אם אורך הצלע של הריבוע הוא 3 ס"מ? $\frac{1}{2}$ מ'? a ס"מ ($a>0$)?

<u>בעיה 12</u>

א. על חלון ריבועי שאורך צלעו 1מ' נעים 5 חרקים. הראו שבכל רגע נתון יש לפחות זוג אחד של חרקים שהמרחק ביניהם קטן מ- 75 ס"מ. (באיור מודגמים שני מצבים אפשריים על החלון).

<u>הדרכה</u>: נתייחס לחרקים כאל נקודות. אפשר לחלק את הריבוע הנתון למספר ריבועים חופפים וליישם את עקרון שובך היונים יחד עם המסקנות מהבעיה הקודמת. לכמה ריבועים חופפים כדאי, לדעתכם, לחלק את הריבוע הנתון? למה דוקא לריבועים חופפים ולא למלבנים חופפים (או צורות אחרות שחופפות)? למעשה, אפשר לטעון טענה חזקה יותר – שהמרחק אינו גדול מ- $\frac{\sqrt{2}}{2}$ מ'.

ב. על חלון ריבועי שאורך צלעו 1מ' נעים 10 חרקים. הראו שבכל רגע נתון יש לפחות זוג אחד של חרקים שהמרחק ביניהם קטן מ- 50 ס"מ.

ג. הציעו בעיה דומה עבור 17 חרקים ופתרו אותה.

ד. הציעו בעיה דומה עבור 26 חרקים ופתרו אותה.

ה. כמה נקודות יש למקם בתוך ריבוע שאורך צלעו 1 מטר, כדי להבטיח שיהיה זוג נקודות כך שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $\frac{\sqrt{2}}{4}$ מ'? $\frac{\sqrt{2}}{5}$ מ'? $\frac{\sqrt{2}}{n}$ מ' (כאשר n מספר טבעי כלשהו)? הסבירו.

<u>בעיה 13</u>

מה המרחק הגדול ביותר האפשרי בין שתי נקודות הנמצאות בתוך משולש שווה צלעות או על היקפו, אם אורך הצלע של המשולש הוא 1מ'? 4 ס"מ? $\frac{1}{2}$מ'? a ס"מ (כאשר $a>0$)? הסבירו.

בעיה 14

א. בתוך משולש שווה צלעות שארוך צלעו 1מ' ממוקמות 5 נקודות. הראו שיש לפחות זוג אחד של נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $\frac{1}{2}$ מ'.

הדרכה: התבוננו בהדרכה לבעיה 12 והתאימו אותה לתנאי הבעיה הזאת.

ב. בתוך משולש שווה צלעות בעל צלע באורך 1מ' ממוקמות 10 נקודות. הראו שיש לפחות זוג אחד של נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $\frac{1}{3}$ מ'.

ג. כמה נקודות יש למקם בתוך אותו משולש כדי להבטיח שיהיה זוג נקודות כך שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר $\frac{1}{4}$ מ'? $\frac{1}{5}$ מ'? $\frac{1}{n}$ מ' (כאשר n מספר טבעי כלשהו)? הסבירו.

הרחבה של עקרון שובך היונים

בעיה 15

א. מכניסים 20 יונים לשובך שבו 6 תאים. האם אפשר להסיק בוודאות שיש תא שבו יותר מיונה אחת? האם אפשר להסיק שיש תא שבו יותר משתי יונים? האם אפשר להסיק בוודאות שיש תא שבו יותר משלוש יונים? האם אפשר להסיק בוודאות שיש תא שבו יותר מארבע יונים? הסבירו תשובותיכם.

ב. מה מספר היונים המינימלי שיש להכניס לשובך שבו 6 תאים, כדי להבטיח שיהיה תא שבו יותר מיונה אחת? יותר משתי יונים? יותר משלש יונים? יותר מארבע יונים? יותר מחמש יונים?

ג. בדקו בעיות דומות עבור 21 יונים ו- 5 תאים, או 24 יונים ו- 7 תאים.

ד. נסו להכליל.

בבעיה 15 ראינו שאם יש 6 תאים בשובך, וצריך להכניס לתוכם 20 יונים, אפשר להשיב על השאלות שנשאלו בעזרת הקשר הבא בין מספר התאים למספר היונים: **20**=**6**x3+2.

מההצגה הזאת של מספר היונים, אפשר להסביר איך ניתן להכניס אותן לתאים.

דרך אחת היא קודם להכניס 18 (כלומר, 6x3) יונים לתאים. אם נכניס מספר שווה לכל תא, נקבל 3 יונים בכל תא, ואז כשנכניס את 2 היונים שנותרו, בהכרח נגדיל את מספר היונים באיזשהו תא, כלומר, יתקבל לפחות תא אחד עם יותר מ- 3 יונים. לכן אפשר לומר בבטחון שיהיה תא עם 4 יונים או יותר.

לעומת זאת, אם נכניס את 18 היונים הראשונות לתאים באופן שיהיה תא שבו פחות מ- 3 יונים, הרי שחייב להיות תא שבו יותר מ-3 יונים, עוד לפני שהכנסנו את 2 היונים הנותרות.

לכן בכל מקרה, אפשר להסיק בוודאות שיהיה תא שבו 4 יונים לפחות.
לעומת זאת, לא מובטח שיהיה תא שבו 5 יונים. מדוע?

עקרון שובך היונים המוכלל

אם יש m תאים בשובך, ואם יש יותר מאשר $m \cdot k$ יונים שצריך להכניס לתאים (כאשר k מספר טבעי), אז יהיה לפחות תא אחד שיהיו בו יותר מאשר k יונים.

בדקו מה קורה כאשר $k=1$. מה הקשר לעקרון שובך היונים שהכרתם בתחילת הפרק?

חזרו לבעיה 15 והשיבו עליה בהתאמה לעקרון שובך היונים המוכלל.

יישומים לעקרון שובך היונים המוכלל

<u>בעיה 16</u>

קבוצה של 12 תלמידים יצאה לנטוע עצים. סה"כ נטעו 75 עצים.

הראו באמצעות עקרון שובך היונים המוכלל כי יש תלמיד שנטע לפחות 7 עצים.

<u>הדרכה</u>: נתייחס לתלמידים כאל תאים בשובך, ולעצים כאל יונים שמכניסים לתאים. לפי נתוני הבעיה, יש **75**=**12**x6+3 עצים ו- **12** תלמידים.

<u>בעיה 17</u>

בשקית אטומה יש 18 סוכריות בטעם מנטה, 15 סוכריות בטעם לימון, ו- 10 סוכריות בטעם תות. דני, יוסי ויעל רוצים לאכול סוכריה באותו הטעם.

א. כמה סוכריות מספיק להוציא כדי להבטיח שכולם יקבלו סוכריה באותו הטעם? הסבירו.
ב. אם עתה נטע הצטרפה אליהם, כמה סוכריות מספיק להוציא כדי להבטיח שכולם יקבלו סוכריה מאותו הטעם? הסבירו.
ג. הציעו בעיות דומות שבהן מספר הטעמים משתנה ומספר הילדים משתנה ופתרו אותן.
ד. נסו להכליל. הסבירו.

<u>בעיה 18</u>

בכיתה יש 40 תלמידים.

א. היתכן כי אף שניים לא נולדו באותו חודש? הסבירו.
ב. היתכן כי אף שלושה לא נולדו באותו חודש? הסבירו.
ג. היתכן כי אף ארבעה לא נולדו באותו חודש? הסבירו.
ד. היתכן כי יש חודש אחד שבו לא נולד אף תלמיד מהכיתה? הסבירו.
ה. מהו המספר המינימלי של תלמידים שצריכים להיות בכיתה, כדי להבטיח שקיים לפחות חודש אחד שבו נולדו יותר מ-4 תלמידים? הסבירו.
ו. הראו כיצד מיושם עקרון שובך היונים המוכלל בפתרון הבעיה הזאת.

בעיה 19

ידוע כי מספר השערות על ראשו של כל אדם הוא לכל היותר 300,000. במחוז תל-אביב גרים יותר ממיליון בני אדם.

א. האם אפשר להסיק בוודאות שבמחוז תל-אביב יש 4 אנשים שיש להם מספר שווה של שערות על ראשם? הסבירו.
ב. מהו המספר המינימלי של תושבים שצריכים להתגורר במחוז מסוים כדי להבטיח שיהיו 4 תושבים עם אותו מספר שערות על הראש? הסבירו.
ג. מהו המספר המינימלי של תושבים שצריכים להתגורר במחוז מסוים כדי להבטיח שיהיו 5 תושבים עם אותו מספר שערות על הראש? הסבירו.
ד. העלו שאלות דומות, פתרו, והכלילו.

בעיה 20

א. רשמו 10 מספרים, שלא כולם שווים, וחשבו את הממוצע החשבוני שלהם.
ב. מצאו בין המספרים שרשמתם מספר שגדול מהממוצע ומספר שקטן מהממוצע.
ג. חזרו על סעיפים א' ו- ב' עבור 10 מספרים אחרים שלא כולם שווים, וכן עבור 15 מספרים שלא כולם שווים.
ד. נסו להכליל את ממצאיכם ולהסביר.
ה. במה דומה ההסבר בסעיף ד' לעקרון המוכלל של שובך היונים?
ו. הצדיקו את הטענה הבאה:

טענה 2 (עקרון הממוצע):

בכל קבוצת מספרים שלא כולם שווים, קיים מספר שגדול מהממוצע החשבוני של כל המספרים בקבוצה וקיים מספר שקטן מהממוצע החשבוני של כל המספרים בקבוצה.

נקודות למחשבה:

- אמנם טענה 2 נכונה לכל קבוצה של מספרים, אבל בהקשר של עקרון שובך היונים, מספיק להתייחס לקבוצות של מספרים טבעיים, מאחר ועקרון שובך היונים עוסק במקרים שבהם יש מספר (טבעי) של תאים ומספר (טבעי) של יונים.
- הקשר בין עקרון שובך היונים המוכלל לעקרון הממוצע הוא עקיף – נסו למצוא קשר בין דרכי ההצדקה של שני העקרונות הללו.

בעיה 21

בכיתה 41 תלמידים. יוסי עשה 13 טעויות במבחן ושאר התלמידים שגו פחות ממנו. הראו כי לפחות ארבעה תלמידים עשו אותו מספר של טעויות. הסבירו בעזרת עקרון שובך היונים המוכלל ובעזרת עקרון הממוצע.

בעיה 22

לרוני יש 70 קוביות כך שכל אחת מהן צבועה בצבע מסוים. מספר הצבעים שבהם השתמשו לצביעת הקוביות קטן מ- 10. הראו שבין הקוביות של רוני אפשר למצוא 8 קוביות הצבועות באותו הצבע.

בעיות נוספות

פתרו כל אחת מהבעיות כפי שעולה בדעתכם, ובמידת האפשר בדרכים שונות. לכל אחת, מצאו דרך לפתור אותה גם לפי עקרון שובך היונים (הרגיל או המוכלל). הסבירו וציינו מה משמש כ"תא" ומה כ"יונה".

<u>בעיה 23</u>

במשחק שח-מט (לוח משבצות שחור ולבן בגודל 8×8), צריח יכול לנוע על הלוח בקו ישר ימינה או שמאלה או למעלה או למטה. אין הגבלה על אורך הקפיצה של הצריח (כלומר, על מספר המשבצות שיעבור במהלך אחד). צריח א' "מאיים" על צריח ב' אם צריח ב' עומד בנתיב שלו. כמה צריחים לכל היותר ניתן להניח בו זמנית על לוח השח-מט, כך שאף אחד לא יאיים על השני?

<u>בעיה 24</u>

בארון הנעליים יש נעליים אדומות, נעליים לבנות ונעליים שחורות. מכל נעל יש שני דגמים: עם שרוכים ובלי שרוכים. מבלי להסתכל לתוך הארון, ומבלי לראות את הנעליים שמוציאים – כמה נעליים יש להוציא מהארון כדי להבטיח שנוציא לפחות זוג תואם אחד?

<u>בעיה 25</u>

א. בבית ספר נווה-שלום יש 500 תלמידים. האם אפשר להסיק בוודאות כי יש לפחות שני תלמידים שיום הולדתם חל באותו היום? הסבירו.
ב. בבית ספר מעוז-צדק יש 350 תלמידים. האם אפשר להסיק בוודאות כי יש לפחות שני תלמידים שיום הולדתם חל באותו היום? הסבירו.
ג. מהו המספר המינימלי של תלמידים שצריכים להיות בבית ספר, כדי שנוכל להסיק בוודאות כי יש לפחות שני תלמידים שיום הולדתם חל באותו היום? הסבירו.

<u>בעיה 26</u>

קבוצה של 11 תלמידים יצאה לנטוע עצים. סך הכל נטעו 67 עצים.

א. הראו באמצעות עקרון הממוצע כי יש תלמיד שנטע לפחות 7 עצים.
ב. השוו לפתרון של בעיה 16.
ג. חברו בעיות אחרות שניתן לפתור בדרך דומה.

<u>בעיה 27</u>

נתונה קוביה שפאותיה ממוספרות עם המספרים 1 עד 6 (לא בהכרח המספור החוקי של קוביה). הראו שבכל מספור אפשרי של הקוביה עם מספרים אלה, תמיד יימצאו שני מספרים עוקבים בעלי צלע משותפת.

<u>בעיה 28</u>

נתבונן במספרים $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. בוחרים שישה מספרים כלשהם מהקבוצה. הראו שבכל בחירה כזו, תמיד קיים זוג מספרים שסכומם 9.

בעיה 29

הראו שבכל 100 שנים רצופות קיימות לפחות 15 שנים שבהן ה- 1 בינואר חל באותו היום בשבוע.

בעיה 30

הראו שבכל קבוצה בת 50 אנשים יש לפחות 8 אנשים שהפרש הגילים שלהם מתחלק ב- 7.

בעיה 31

הראו כי בין כל 2000 מספרים טבעיים שונים, קיימים שניים שהפרשם מתחלק ב- 1999.

בעיה 32

הוכיחו שקיימים שני מספרים טבעיים שונים a,b כך ש- 2^a-2^b מתחלק ב- 57. כיצד אפשר להכליל בעיה זו?

הדרכה: כמה מספרים שונים מהצורה 2^k קיימים עבור ערכים טבעיים שונים של k? לפתרון הבעיה אפשר להיעזר בטענה 1, על התחלקות של הפרש מספרים טבעיים.

בעיה 33

נתונים 12 מספרים שונים מהקבוצה $\{10,11,12,...,99\}$. הראו כי קיימים ביניהם שני מספרים שהפרשם הוא מספר דו ספרתי המורכב משתי ספרות שונות. הסבירו.

בעיה 34

במסיבה השתתפו 20 אנשים.

א. האם במסיבה יש לפחות שני אנשים שיש להם אותו מספר ידידים (שימו לב כי "ידידות" היא תכונה הדדית כלמר אם אדם א' הוא ידיד של אדם ב' אז אדם ב' הוא ידיד של אדם א')? הסבירו.
ב. האם, ואם כן כיצד תשתנה התשובה לסעיף א', אם במסיבה השתתפו 35 אנשים? הסבירו.
ג. האם, ואם כן כיצד תשתנה התשובה לסעיף א', אם במסיבה השתתפו n אנשים (n הוא מספר טבעי כלשהו)? הסבירו.

הדרכה לסעיף א: אם נמנה לכל אדם במסיבה את מספר הידידים שלו, מהם כל המספרים האפשריים שניתן לקבל? תנו דעתכם: האם ייתכן שלאדם אחד יהיו 19 ידידים ולאדם אחר לא יהיה אף ידיד?

בעיה 35

האם בין 65 מספרים שלמים שונים תמיד יימצאו 9 מספרים שסכומם מתחלק ב-9? הסבירו. הציעו בעיות דומות, פתרו, והכלילו.

הדרכה: סכום של 9 מספרים שלמים יכול להתחלק ב- 9, אם לכל אחד יש שארית שונה בחילוק ב- 9 (מדוע?) או אם לכולם אותה השארית בחילוק ב- 9 (מדוע?). כדאי לקבץ את המספרים הנתונים לקבוצות (תאים) לפי השאריות שלהם בחילוק ב- 9, ולנתח איזה מקרים יכולים או חייבים להתקיים.

בעיה 36

במרתון משתתפים 100 ספורטאים. ידוע כי בין כל 12 ספורטאים יש שניים שמכירים אחד את השני. לספורטאים חולקו מספרים (לא בהכרח לפי הסדר). הראו כי ישנם שני ספורטאים המכירים זה את זה, שמספריהם מתחילים באותה ספרה.

<u>הדרכה</u>: כדאי לחלק את 100 המספרים שניתנו לספוטאים לקבוצות בהתאם לספרה הראשונה במספר. מה המספר המכסימלי של קבוצות שניתן לקבל בדרך זו?

בעיה 37

לישיבה של מועצת התלמידים הגיעו 11 נציגים מ- 4 כיתות. האם ניתן להושיב אותם סביב שולחן עגול, כך שבין כל חמישה היושבים זה לצד זה, יהיה נציג מכל כיתה? הסבירו.

<u>הדרכה</u>: כמה נציגים מכל כיתה יכולים היו להגיע לישיבה? האם ייתכן שהגיעו 3 (או יותר) נציגים מכל כיתה? האם ייתכן שיש כיתה שממנה הגיעו בדיוק 2 נציגים? האם ייתכן שיש כיתה שממנה הגיע נציג אחד בלבד? בדקו את האפשרויות השונות וכיצד הן משפיעות על סידורי הישיבה סביב השולחן.

בעיה 38

בחדר ישנם 20 אנשים. האנשים לוחצים ידיים זה לזה כרצונם, אך אין זוג שלוחץ ידיים יותר מפעם אחת. הראו שבהכרח יהיו שני אנשים שלוחצים ידיים אותו מספר של פעמים.

בעיה 39

חנה, ליהי ודנה יושבות יחד וצובעות תמונות בחוברת צביעה. כל העפרונות הצבעוניים נמצאים בתוך שקית והן אינן יכולות לראות את צבעם. בשקית יש 5 עפרונות ירוקים, 7 עפרונות ורודים, 8 עפרונות צהובים ו - 8 עפרונות אדומים.

א. מה מספר העפרונות הקטן ביותר שעליהן להוציא מהשקית בבת אחת, כדי להבטיח שלכולן יהיה עפרון באותו הצבע? הסבירו.
ב. הבנות החליטו להתחיל בצביעת העץ בציור והן כולן רוצות צבע ירוק. מה מספר העפרונות הקטן ביותר שעליהן להוציא עתה, כדי להבטיח שכולן תקבלנה עפרון בצבע ירוק?
ג. האם, ואם כן כיצד תשתנה תשובתך לסעיף ב' אם הבנות היו רוצות כולן צבע ורוד? צהוב?
ד. האם ניתן היה לענות על סעיפים ב' ו- ג' אם לא היינו יודעים כמה עפרונות מכל צבע יש בשקית? ומה אם רק היינו יודעים שיש מכל צבע לפחות 4 עפרונות?

בעיה 40

לעשרה ילדים היו ביחד 40 אגוזים. [שימו לב: ייתכן שיש בין הילדים כאלה שאין להם אגוזים, כלומר, שמספר האגוזים שיש להם הוא 0.]

א. הראו שניתן למצוא לפחות שני ילדים עם אותו מספר אגוזים.
ב. מה אם במקום 10 ילדים יש 8 ילדים שביחד יש להם 40 אגוזים? האם עדין מובטח שיש שני ילדים עם אותו מספר אגוזים? הסבירו.
ג. מה אם ל- 10 ילדים יש ביחד 45 אגוזים? האם עדין מובטח שיש שני ילדים עם אותו מספר אגוזים? הסבירו.

<u>הדרכה לסעיף א</u>: האם ייתכן שלכל ילד יש מספר שונה של אגוזים? אם כן, מה המספר המינימלי של אגוזים שיכולים להיות להם ביחד? האם הגעתם לאיזושהי סתירה?