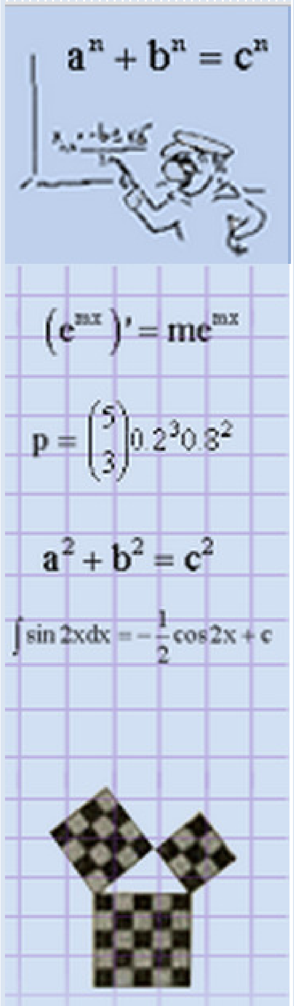
משרד החינוך

המזכירות הפדגוגית – אשכול מדעים – הפיקוח על הוראת המתמטיקה
המינהל למדע וטכנולוגיה

חוברת העשרה במתמטיקה לתלמידי עתודה מדעית-טכנולוגית

לתלמידים בכיתות ז'

הפרקים בחוברת יילמדו כהעשרה ללימודי המתמטיקה



אב, תשע"ב
אוגוסט 2012

תודה לגופים אשר תרמו את הפרקים להעשרה במתמטיקה לחוברת זו:

מצוינות 2000
המרכז הישראלי למצוינות בחינוך

מצוינות רחובות – מכון וייצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

מתמטיקה בהתכתבות –
מכון דוידסון לחינוך מדעי,
מכון וייצמן למדע

שבילים למצוינות – מט"ח

תוכן הנושאים לפי סדר ההוראה:

1. עיגולים עיגולים – מצוינות רחובות
מכון וייצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים
2. חיוך מנצח – מצוינות 2000
המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
3. מספרי ערפד – מתמטיקה בהתכתבות
מכון דוידסון לחינוך מדעי, מכון וייצמן
4. משחקים במספרים – שבילים למצוינות
מט"ח
5. שאלות על מספרים ראשוניים – שבילים למצוינות
מט"ח
6. חבורות – מצוינות רחובות
מכון וייצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים
7. שעון על לוח השנה – שבילים למצוינות
מט"ח
8. אחרון לבחירתכם – מצוינות רחובות
מכון וייצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים
9. שטחים וגפרורים, טנגרם – שבילים למצוינות
מט"ח
10. משחקים בלוחות מספרים – שבילים למצוינות
מט"ח

עיגולים עיגולים

לפניך משולש מעיגולים. בכל אחד מקדקודיו עיגל מלא והשאר ריקים. כל עיגול (חוץ מאלה שבקדקודים) נמצא, למעשה, בשלוש שורות: אחת אופקית, ושתיים אלכסוניות.

שחק עם חברך במשחק הבא:

כל משתתף בתורו ממלא את אחד העיגולים הריקים.

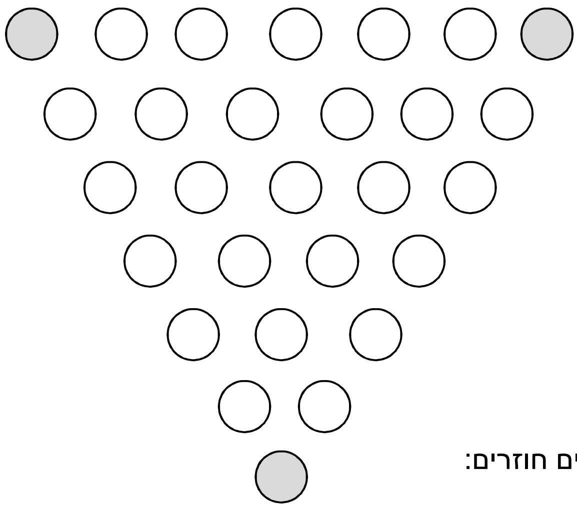
שחקן הממלא את העיגול הריק האחרון בשורה, מוחק את השורה, ורושם לזכותו מספר נקודות השווה למספר **כל** העיגולים בשורה שמחק.

אם עיגול מסוים הוא העיגול הריק האחרון בשתי שורות, אז השחקן הממלא אותו רשאי למחוק שורה אחת בלבד, לפי בחירתו.

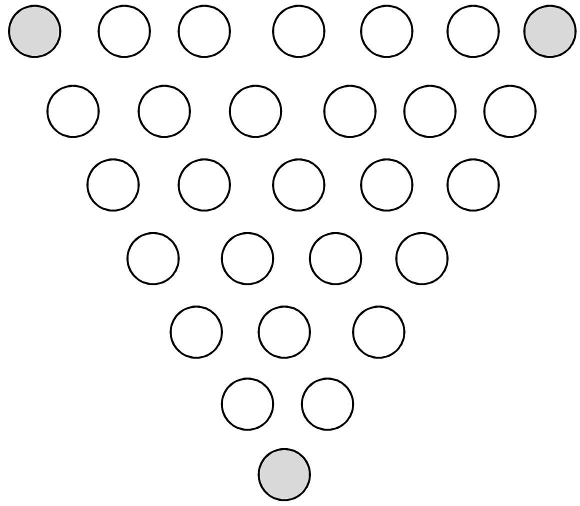
השחקן הבא בתור **יכול** למחוק את השורה האחרת, ולרשום לזכותו את מספר **כל** העיגולים שבה מבלי שמילא עיגול בתורו.

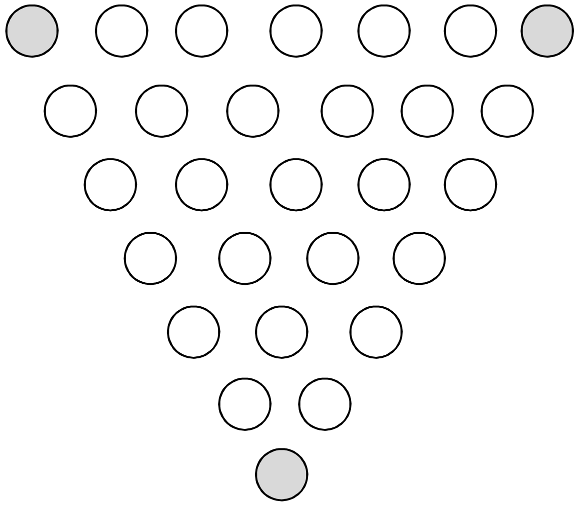
המשחק מסתיים כאשר כל השורות בשלושת הכיוונים מחוקות.

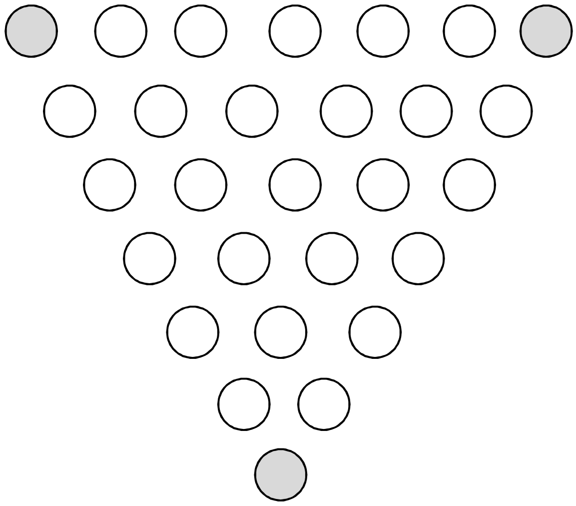
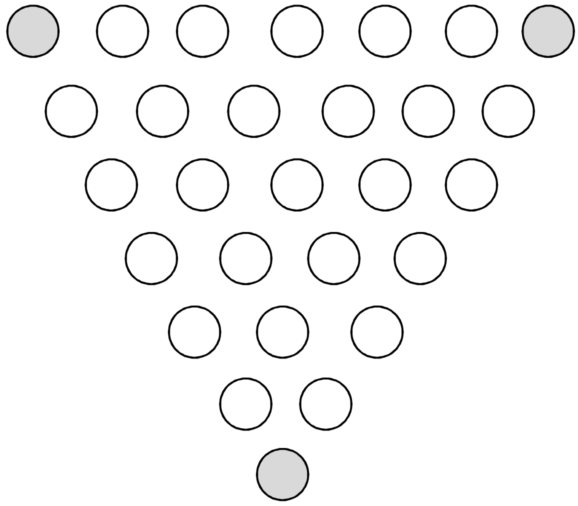
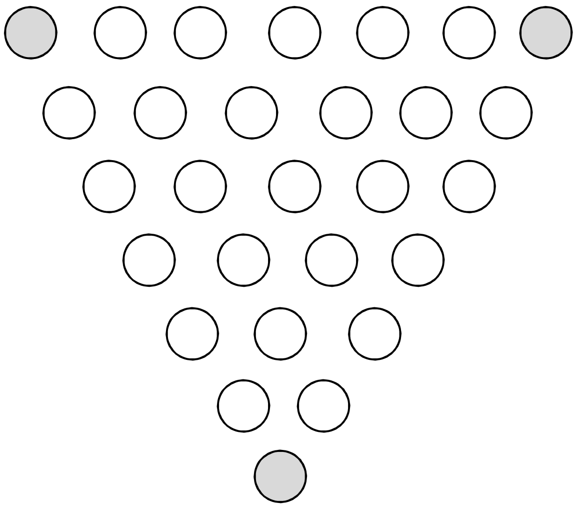
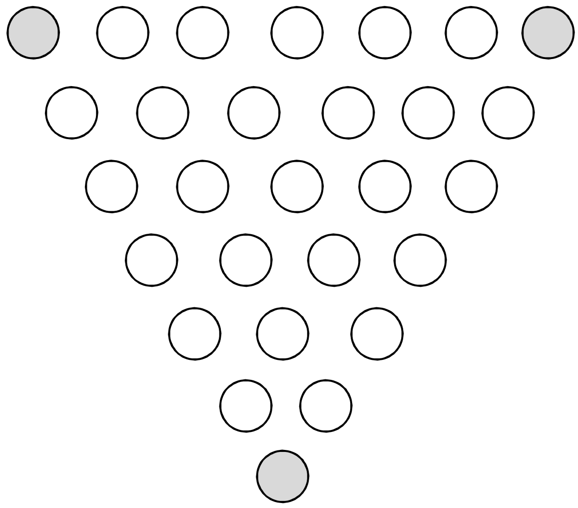
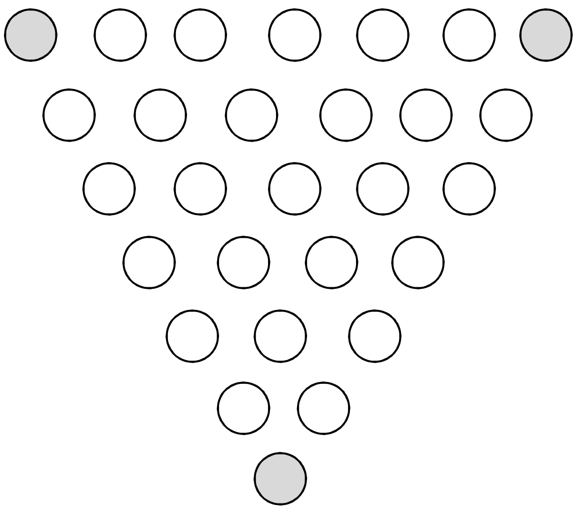
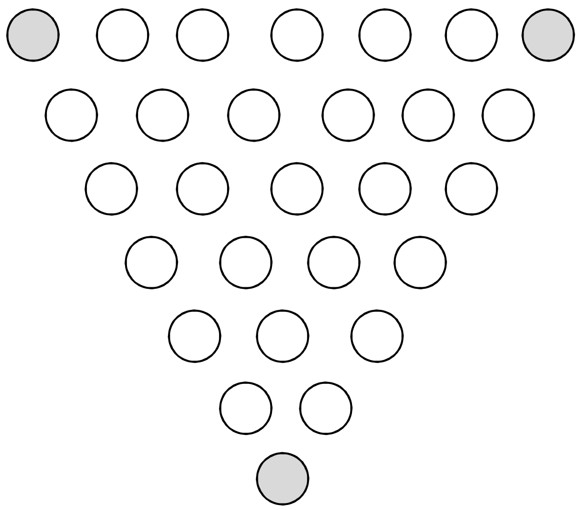
מנצח השחקן שצבר יותר נקודות.



לפניך עוד משולשים מעיגולים למשחקים חוזרים:





אחרי ששיחקת את המשחק מספר פעמים, ענה על השאלות הבאות.

1. כאשר משחקים שני שחקנים, האם ייתכן לסיים את המשחק בתיקו? נמק.

2. מהו מספר הנקודות הקטן ביותר שעל שחקן לצבור כדי לנצח במשחק הנערך בין שני שחקנים? נמק.

3. האם ייתכן לסיים את המשחק בתיקו כאשר הוא נערך בין שלושה שחקנים? נמק.

4. חזור על השאלות 1 – 3 עבור המשחקים הבאים:
   - מספר העיגולים בשורה הארוכה הוא 5.
   - מספר העיגולים בשורה הארוכה הוא 6.
   - מספר העיגולים בשורה הארוכה הוא 8.

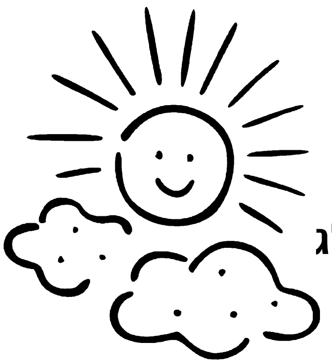
5. נסה לשער מה צריך להיות מספר העיגולים בשורה הארוכה כדי שאפשר יהיה לסיים את המשחק בתיקו, במשחק לשני שחקנים, במשחק לשלושה שחקנים.

המרכז הישראלי למצוינות בחינוך
Israel Center for Excellence through Education

מצוינות 2000
בחסות קרן סקירבול

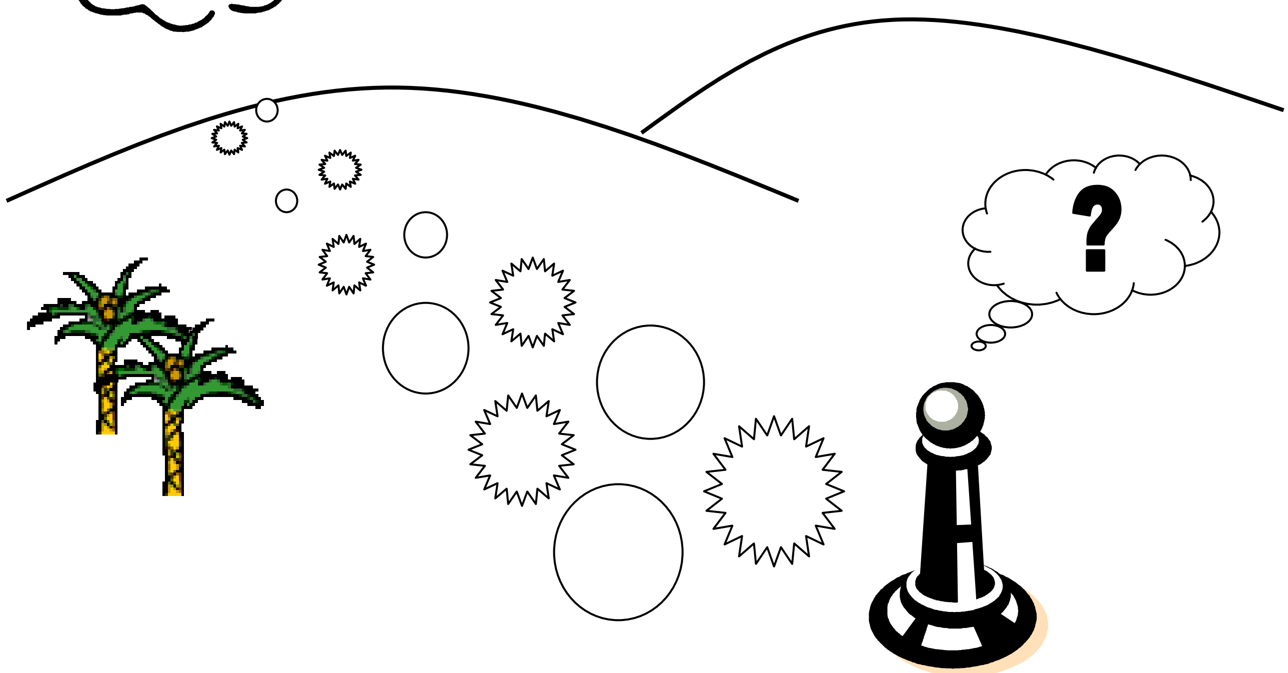
המכון למצוינות בהוראה

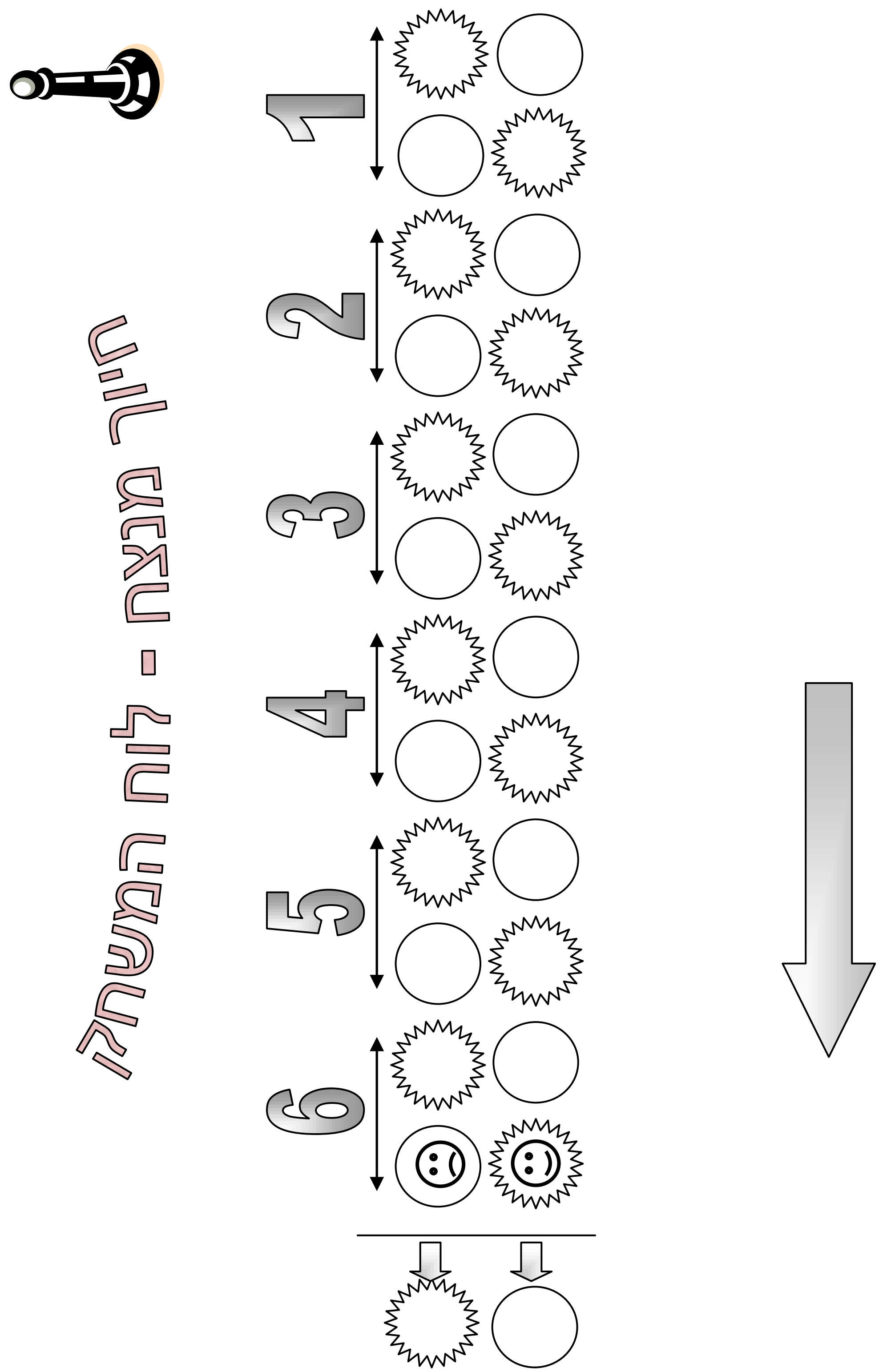
חיוך מנצח



צבי שלם

מערכת: גלי שמעוני, ד"ר אבי פולג




חיוך מנצח - לוח המשחק
1
2
3
4
5
6

מכון ויצמן למדע
WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE
מכון דוידסון לחינוך מדעי
DAVIDSON INSTITUTE OF SCIENCE EDUCATION

מתמטיקה בהתכתבות

מספרי ערפד רמה 3

כתובתנו באינטרנט:
www.weizmann.ac.il/davidson/e-learn

נתקלתם בבעיה טכנית באתר? moodle.davidson@weizmann.ac.il
בכל בעיה אחרת – mathbymail@weizmann.ac.il

צוות התכנית מתמטיקה בהתכתבות

ראש תחום תוכניות למידה מרחוק
ד"ר יוסי אלרן

ראש תכנית מתמטיקה בהתכתבות
מיכל אלרן

יועצת מדעית
ד"ר סבינה שטוקר

מתמטיקאים
פרופ' אדריס תיתי (ערבית)
פרופ' אברהם הרכבי (ספרדית)
ד"ר איירין אייזן (ארה"ב)
יערה אנדולט
רותם גבאי
יונתן וגנר
רועי לחמי
חסן מסאלחה (ערבית)
אמיר מרקוביץ
סאוסן עילבוני (ערבית)
ולידימיר פיבניק
נטליה קוריץ
ג'ניפר רסניק (ספרדית)
נטליה שנקר (ספרדית)

ניהול משרדי
מירי שרתוק-גורודצקי
רוויטל אהרונוב
סיון טראו רוזנשטיין
ג'אן גולדנברג (קנדה)
ניקול דה ברטולו (קנדה)
קרול פסטליכט-פרלמן)מכסיקו)
רינה מיכאל (אוסטרליה)

איורים :מחלקת הגרפיקה של מכון ויצמן למדע וחופית עמרם.
אינטרנט :חופית עמרם
דפוס :הוצאה לאור, מכון ויצמן למדע.

מספרי ערפד ומספרים מעניינים נוספים

(*"מתמטיקה בהתכתבות"* תשע"ב *מחזור* 1 *רמה* 3)

שלום וברוכים הבאים לתכנית הבין-לאומית *מתמטיקה בהתכתבות* לכל המשתתפים החדשים, וברוכים השבים לחברינו הוותיקים. אנו מקווים שתיהנו משלל הבעיות, החידות והמשחקים המתמטיים שנביא כאן במהלך השנה.

נפתח את השנה בנושא מפתיע ומשעשע – מספרי ערפד!

לפני שנגיע לעצם העניין, יש צורך בכמה תזכורות בנושאים שונים הקשורים למספרים...

<u>מספרים ראשוניים</u>

מספרים ראשוניים הם מספרים שלמים המיוחדים בכך שהם מתחלקים (ללא שארית) רק בעצמם ובמספר 1.

דוגמה: המספר 3 מתחלק **רק** ב-3 וב-1, ולכן הוא מספר ראשוני.

המספר 6 מתחלק ב-6, ב-2, ב-3 וב-1, ולכן הוא **איננו** מספר ראשוני.

היוצא מן הכלל היחיד הוא המספר 1 בעצמו, שלמרות שהוא מתחלק בעצמו וב-1 (זה אותו דבר במקרה זה) הוא איננו מוגדר כראשוני.

1. א. השלימו את המשפט: המספרים הראשוניים בין 0 ל-30 הם ________________________

____

ב. האם מספר ראשוני יכול להיות מספר זוגי? כן/לא (סמנו את התשובה הנכונה)

<u>גורמים של מספר</u>

גורמים של מספר הם מספרים טבעיים שבהם המספר המקורי מתחלק ללא שארית.

לכל מספר טבעי יש לפחות שני גורמים.

דוגמה: הגורמים של המספר 12 הם 1, 2, 3, 4, 6, 12, מכיוון שהמספר 12 מתחלק בכל אחד מהם ללא שארית.

<u>מספר מושלם</u>

מספר מושלם הוא מספר ששווה בדיוק לסכום כל הגורמים שלו (חוץ מהמספר עצמו).

דוגמה: המספר **28**.

מספר זה הוא מושלם, כי הגורמים שלו הם 1, 2, 4, 7, 14, והסכום שלהם הוא בדיוק 28!

28 = 14+7+4+2+1

2. א. מצאו את כל הגורמים של המספרים הבאים: 23, 24, 25, 50, 120.

הגורמים של המספר 23: ______________________________

הגורמים של המספר 24: ______________________________

הגורמים של המספר 25: ______________________________

הגורמים של המספר 50: ______________________________

הגורמים של המספר 120: ______________________________

ב. כמה גורמים יש למספר ראשוני כלשהו? 1 / 2 / 3 / 4 (סמנו את התשובה הנכונה)

ג. מספר הגורמים של מספר פריק (לא ראשוני) שהוא ריבוע של מספר אחר הוא זוגי / אי זוגי (סמנו את התשובה הנכונה).

ד. מספר הגורמים של מספר פריק (לא ראשוני) שהוא לא ריבוע של מספר אחר הוא זוגי / אי זוגי (סמנו את התשובה הנכונה).

3. א. מצאו מספר מושלם בין 2 ל-10: ________________

ב. סמנו את התרגיל שמתאר את 496 כמספר מושלם מבין התרגילים הבאים:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 123 + 249 = 496$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 35 + 70 + 120 + 240 = 496$

$200 + 296 = 496$

ג. המספר המושלם הבא אחרי 496 הוא מספר עם ארבע ספרות. היעזרו באינטרנט וסמנו אותו מבין המספרים הבאים: 8128 / 4444 / 8812 / 8218

במספר המושלם הבא אחרי המספר שאחרי 496 יש 6 / 7 / 8 / 9 ספרות.

מספרי ארבע על ארבע הם מספרים שאפשר ליצור בעזרת ארבע פעמים המספר 4, תוך שימוש בפעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל וחילוק.

לדוגמה, את המספר 7 אפשר ליצור מארבעה מספרי 4 כך: 4+4-4:4=7, או בתוספת סוגריים (4+4)-(4:4)=8-1=7.

4. צרו את המספרים הבאים בשיטת "ארבע על ארבע": 16, 2, 8 וכמה קצת יותר קשים: 6, 9, 15, 60.

16 = ______________________________ 2 = ______________________________

8 = ______________________________ 6 = ______________________________

9 = ______________________________ 15 = ______________________________

60 = ______________________________

ככל הידוע, המתמטיקאי וולטר רוז' בול (Walter Rouse Ball) חד לראשונה את חידת *ארבע על ארבע* בספרו "שעשועי מתמטיקה ומאמרים (Mathematical Recreations and Essays).

הוא כתב ספר זה בשנת 1892 ביחד עם חברו המתמטיקאי קוקסטר (H.S.M. Coxeter).

בול הצטיין במתמטיקה בלימודיו באוניברסיטת קיימברידג' באנגליה,

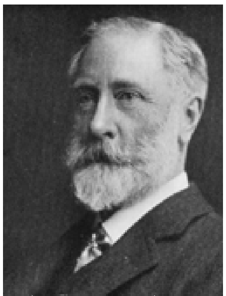
ואף זכה מספר פעמים במקומות גבוהים באולימפיאדה.

למרות שהוא לא היה פעיל במחקר מתמטי, הוא היה ידוע בתור מורה

מעולה והתעניין מאוד בשעשועי מתמטיקה ובהיסטוריה של המדעים.

הוא היה גם עורך דין ופעיל בפעילות ציבורית.

ספרו הודפס בארבע עשרה מהדורות והוא נפוץ עד היום.


וולטר רוז' בול
(1850-1925)

אם נרחיב את כללי משחק המספרים *ארבע על ארבע* ונאפשר שימוש בחזקות ובשורשים ריבועיים, וכן הצמדה של ספרות זו לזו, אפשר להגיע להרבה מאוד מספרים. לדוגמה: 1776=444×4

<u>חזקות של מספרים</u>

כשאנו אומרים שמספר הוא **בחזקת** מספר אחר, אנו מתכוונים שמכפילים את המספר (הראשון) בעצמו כמה פעמים, לפי המספר שבחזקה.

לפעמים נאמר שאנו **מעלים** את המספר הראשון בחזקת המספר השני.

דוגמה: 2 בחזקת 3 (אפשר גם להגיד המספר 2 שמועלה בחזקת 3) מסומן כך 2^3, ופירושו 2×2×2, כלומר 8.

דוגמה נוספת: 2^4, שהוא 2 בחזקת 4, ופירושו 2×2×2×2, כלומר 16.

<u>שורש ריבועי</u>

שורש ריבועי הוא הפעולה ההפוכה לפעולת ההעלאה בריבוע (בחזקת 2). במילים אחרות, שורש ריבועי *של מספר מסוים* הוא מספר שעונה על השאלה: <u>איזה מספר כפול עצמו נותן את *המספר המסוים*?</u>

השורש הריבועי מסומן כך: $\sqrt{\text{מספר}}$. תוכלו למצוא סימן זה ברוב מחשבוני הכיס.

דוגמה: שורש 4 מסומן כך: $\sqrt{4}$ והוא שווה למספר 2 – $\sqrt{4} = \sqrt{2\times 2} = 2$ (כלומר 2 הוא המספר *שכפול עצמו נותן 4*).

עוד דוגמה: $\sqrt{25} = \sqrt{5\times 5} = 5$ ובמלים – המספר 5 הוא השורש של המספר 25.

5. חשבו את הערכים הבאים: 3^2, 4^3, 10^2, 5^4. סמנו את התשובה הנכונה בתרגילים הבאים.

$3^2 = 6 / 9 / 12 / 33$

$4^3 = 12 / 44 / 64 / 444$

$5^4 = 625 / 545 / 555 / 5555$

$15^2 = 15 / 105 / 225 / 155$

השורש של 144 ($\sqrt{144}$) הוא __________

השורש של 256 ($\sqrt{256}$) הוא __________

השורש של 400 ($\sqrt{400}$) הוא __________

השורש של 1089 ($\sqrt{1089}$) הוא __________

לפניכם הרחבה נוספת למשחק *ארבע על ארבע*: לא חייבים להקפיד שיהיו בדיוק ארבע הופעות של המספר 4, ומותר ליצור את המספר המבוקש גם עם פחות מארבעה מספרי 4 (אבל לא יותר). למשל, אפשר ליצור את המספר 40 על ידי שימוש בשלושה מספרי 4 בלבד: 40=4−44.

6. צרו את המספרים הבאים בשיטת *ארבע על ארבע*. נסו ליצור את המספרים תוך שימוש בכללים החדשים והשתמשו במספר הקטן ביותר של מספרי ארבע האפשרי.

1 = ______________________________

3 = ______________________________

11 = ______________________________

18 = ______________________________

32 = ______________________________

46 = ______________________________

256 = ______________________________

<u>אבות ראשוניים</u>

בפרק זה נלמד משהו קצת אחר, המשלב בין המספרים הראשוניים, לבין העלאה בחזקת שתיים – אבות ראשוניים. האבות הראשוניים הוגדרו לראשונה על ידי מורה למתמטיקה יצירתי ביותר ששמו טרי טרוטר (Terry Trotter). טרוטר חי בשנים 1941 – 2004. הוא התחיל את הקריירה שלו בארצות הברית, ולאחר מכן עבר לאל סלבדור.

אז מהם אבות ראשוניים?

אב ראשוני מוגדר כמספר ראשוני אשר סכום הריבועים של ספרותיו הוא גם מספר ראשוני. הסכום הזה נקרא *ילד ראשוני*.

דוגמה: המספר 41 הוא אב ראשוני, שכן $4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$, ושני המספרים 17 ו-41 ראשוניים.

במילים אחרות, 41 הוא האב הראשוני של ילד ראשוני, במקרה זה 17. המספר 17 אינו אב ראשוני, כי $50 = 49 + 1 = 7^2 + 1^2$, והמספר 50 הוא מספר פריק (מספר שאינו ראשוני).

7. סמנו את כל המספרים שהם אבות ראשוניים ברשימת המספרים הבאה:

11 / 13 / 17 / 19 / 23 / 29 / 31 / 37 / 41 / 43 / 47 / 53 / 59 / 61 / 67 / 71 / 73 / 79 / 83 / 89 / 97

רמז: קיימים בדיוק חמישה אבות ראשוניים דו-ספרתיים.

אפשר גם למצוא שושלות של אבות ובנים ראשוניים.

דוגמה: המספר 191 הוא אב ראשוני למספר 83, והמספר 83 הוא אב ראשוני למספר 73. המספר 73 הוא סוף השושלת, כי אם נחפש לו בן ראשוני נמצא את המספר 58 שהוא מספר פריק.

8. עד היום, השושלות הארוכות ביותר שנמצאו הן בנות שישה דורות. האב הראשוני הקדמון של אחת משושלות אלה הוא 28999999999. השלימו את שאר האבות והבנים בשושלת.

28999999999 ← _________ ← _________ ← _________ ← _________ ← _________

<u>מספרי פרידמן</u>

מספר פרידמן הוא מספר *שאפשר* ליצור תוך *שימוש* בספרותיו יחד עם פעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל, חילוק והעלאה בחזקה. אפשר להשתמש גם בסוגריים והצמדת שתי ספרות זו לזו – בדיוק כמו ב*ארבע על ארבע*. אסור להשתמש בספרות שאינן מרכיבות את המספר.

דוגמה למספר פרידמן עם שימוש בכפל: $126=6\times21$.

דוגמה למספר פרידמן תוך שימוש בהעלאה בחזקה: $25=5^2$. (הכוונה היא ל-5×5).

9. מדוע המספרים הבאים הם מספרי פרידמן? סמנו את התשובה הנכונה.

- המספר 121 הוא מספר פרידמן כי: $121 = 121 / 11\times11 = 121 / 12\times1 = 121 / 11^2 = 121$
- המספר 153 הוא מספר פרידמן כי: $31^5 = 153 / 51 \times 3 = 153 / 5 \times 31 = 153 / 15^3 = 153$
- המספר 289 הוא מספר פרידמן כי: $29+8 = 289 / 82\times9 = 289 / (9+8)^2=289 / 89\times2=289$
- המספר 1206 הוא מספר פרידמן כי: $62–10=1206 / 106^2=1206 / 60+12=1206 / 6\times201=1206$
- המספר 100255 הוא מספר פרידמן כי:

$12005 : 5 = 100255 / 5 \times 20051 = 100255 / 255 \times 100 = 100255 / 10025 + 5 = 100255$

אריך פרידמן (Erich Friedman), *שהמציא* את מספרי פרידמן, נולד ב-1965 בארצות הברית. הוא מתמטיקאי מוכשר מאוד העוסק הרבה במשחקים מתמטיים. פרידמן הוא אדם רב כישרונות; הוא זוכר בעל-פה את חמישים הספרות הראשונות אחרי הנקודה ב-π, ומצליח לפתור קובייה הונגרית בחמישים שניות!

<u>מספרי פרידמן יפים</u>

מספר פרידמן יפה הוא מספר פרידמן אשר סדר הספרות בביטוי המתמטי המתאר אותו זהה לסדר הספרות במספר עצמו. דוגמה למספר פרידמן יפה: $343 = (3 + 4)^3$

סוג נוסף של מספרי פרידמן יפים הם מספרי פרידמן המורכבים מספרה אחת בלבד, שחוזרת על עצמה מספר פעמים, לדוגמה $11111111111 = ((11-1)^{11} -1\times1):(11-1-1)$

10. הראו שהמספרים הבאים הם מספרי פרידמן יפים: 736, 1285, 2592, 28224, 99999999

מספרי ערפד

מספר ערפד הוא מספר שאפשר לקבל ממכפלה של שני מספרים, המורכבים מהספרות של המספר עצמו. שני המספרים האלה מכונים **ניבים**.

מספר ערפד הוא *מקרה פרטי* של מספרי פרידמן.

פירוש המונח מקרה פרטי הוא שכל מספרי הערפד כלולים בתוך מספרי פרידמן.

דוגמה למספר ערפד: 1827000=210×8700.

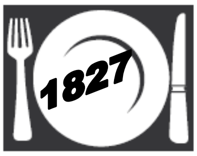
מספר ערפד אמתי הוא מספר ערפד שבו לשני המספרים המוכפלים יש אותו מספר ספרות, ולפחות אחד מהם אינו מסתיים בספרה אפס.

דוגמה למספר ערפד אמתי: 1827=21×87.

מספר ערפד ראשוני הוא מספר ערפד אמתי שבו שני המספרים המוכפלים הם מספרים ראשוניים (בנוסף לתכונה שהזכרנו קודם ששני המספרים צריכים להיות בעלי מספר ספרות זהה, ולפחות אחד מהם אינו מסתיים בספרה אפס).

דוגמה למספר ערפד ראשוני: 117067=167×701

(המספרים 167 ו-701 הם ראשוניים)



11. המספרים: 126, 153, 688 ו-1395 הם ארבעה מספרי ערפד. מצאו לכל מספר ערפד את הניבים המתאימים לו מתוך "מחסן הניבים" הבא (רמז – לא צריך להשתמש בכל המספרים במחסן):

3 5 6 8 13 15 21 39 51 53 86 93

126 - הניבים הם: ________________ 153 - הניבים הם: ________________

688 - הניבים הם: ________________ 1395 - הניבים הם: ________________

12. מדוע המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד? סמנו את התשובה הנכונה.

א. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל ריבוי האפסים.

ב. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל שהוא מספר זוגי.

ג. המספר 103000 אינו יכול להיות מספר ערפד כי אין שום אפשרות ליצור שני מספרים מהספרות של 103000 כך שהמכפלה שלהם תהיה 103000, וזאת בגלל שהוא מספר גדול מאוד.

13. המספרים: 1260, 2187, 6880 ו-1435 הם ארבעה מספרי ערפד **אמתיים**. מצאו לכל מספר ערפד אמתי את הניבים המתאימים לו מתוך "מחסן הניבים" הבא (רמז – לא צריך להשתמש בכל המספרים במחסן):

12 13 21 27 35 41 60 68 80 81 86 87 88

1260 - הניבים הם: ______________ 2187 - הניבים הם: ______________

6880 - הניבים הם: ______________ 1435 - הניבים הם: ______________

14. אלו מבין המספרים: 1260, 2187, 6880 ו-1435 הם מספרי ערפד **ראשוניים**?

6880 – כן/לא הניבים הם: ______________

124483 – כן/לא הניבים הם: ______________

1435 – כן/לא הניבים הם: ______________

536539 – כן/לא הניבים הם: ______________

<u>מספרים הוגנים</u>

מספר הוגן מוגדר בתור מספר שערכו שווה למספר האותיות בשמו או בדרך אחרת במילים שאפשר לתאר אותו.

דוגמאות למספרים הוגנים בעברית: 4 – ארבע (4 אותיות)

10 – חמש ועוד חמש (10 אותיות)

שימו לב שלפעמים אפשר לתאר את המספר ההוגן בכמה דרכים שונות!

דוגמה: 11 – ארבע ועוד שבע (11 אותיות)

אחד יותר מעשר (11 אותיות)

וכו'.....

<u>מספרים בזבזנים</u>

נגדיר מספר כ*מספר בזבזני* אם אפשר לתאר אותו במספר אותיות הקטן ממספר האותיות בשם של המספר עצמו.

דוגמה: המספר 36 – שש בריבוע (8 אותיות) לעומת שלושים ושש (9 אותיות).

*15. סמנו את המספרים ההוגנים בעברית מבין המספרים:

1 2 3 4 5

9 10 15 17 18

בפורום נדון במספרים הוגנים נוספים, וננסה למצוא גם דוגמאות למספרים הוגנים שניתן לתאר אותם בכמה דרכים שונות. בנוסף לכך נדון במספרים בזבזניים, עליהם תלמדו גם מעט בשאלה הבאה.

*16. לפניכם שני תיאורים. כתבו איזה מספרים בזבזניים הם מתארים:

א. תשע בריבוע (9 אותיות) לעומת שמונים ואחד (10 אותיות) מתאר את המספר ______ כמספר בזבזני.

ב. שש בחזקת שלוש (11 אותיות) לעומת מאתיים ושש עשרה (13 אותיות) מתאר את המספר ________ כמספר בזבזני.

17. סווגו את המספרים הבאים לפי קבוצות - מספרים ראשוניים, מספרי פרידמן, מספרי ערפד, מספרי ערפד אמתיים (ייתכן שיהיו מספרים שישתייכו ליותר מקבוצה אחת):

11 - __________________________

4 - __________________________

28 - __________________________

81 - __________________________

1255 - __________________________

127 - __________________________

1827 - __________________________

146137 - __________________________

החוברת הבאה תהיה בנושא: המתמטיקה של החיים...

ביבליוגרפיה וחומר רקע

חוברות העשרה של מכון ויצמן למדע

חומר מקור של יוסי ומיכל אלרן

אתרי אינטרנט מומלצים:

http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Friedman_number
http://mathworld.wolfram.com/VampireNumber.html
http://mathworld.wolfram.com/PerfectNumber.html
http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/1203.html
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_03_01_04.html
http://hjem.get2net.dk/jka/math/vampires/
http://www.grenvillecc.ca/faculty/jchilds/vampire.htm
http://sprott.physics.wisc.edu/pickover/pubb.html
http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html

לבן ראשוני יכול להיות יותר מאב ראשוני אחד? הדגימו והסבירו.

מטח
המרכז לטכנולוגיה חינוכית

שבילים למצוינות

מתמטיקה לכיתה ז
מטח

- משחקים במספרים
- שאלות על מספרים ראשוניים
- שעון על לוח שנה?
- שטחים וגפרורים
- טנגרם
- משחקים בלוחות מספרים

משחק "המרוץ ל־60"

כללי המשחק: משחק זה מיועד לשני שחקנים.
שחקן **א** כותב מספר שלם מ־1 עד 9.
שחקן **ב** בוחר מספר נוסף מ־1 עד 9 וכותב את הסכום של שני המספרים.
שחקן **א** בוחר עוד מספר מ־1 עד 9 וכותב את הסכום החדש שמתקבל וכן הלאה.
מנצח – השחקן הראשון שכותב את המספר 60.

1 התחלקו לזוגות ושחקו במשחק לפחות פעמיים.

2 לפניכם דוגמה של סדרת מספרים שכתבו עמית וטל במהלך משחק (משמאל לימין).
7, 12, 20, 23, 25, 28, 37, 44, 48, 54, 60
השלימו בטבלה את המספרים שכתב כל אחד מהשחקנים.
מי ניצח במשחק זה? באיזה שלב?

מספר השלב	1	2	3	4	5	6	7	8	9
עמית	7	(+8) 20							
טל	(+5) 12								

3 בכל סעיף כתבו סדרת מספרים לפי האסטרטגיה הנתונה וקבעו מי משני השחקנים ינצח, כאשר לשחקן מותר לשנות את האסטרטגיה בצעד האחרון במשחק.
א. עמית כותב 8 בשלב הראשון ומוסיף 8 בכל שלב. טל מוסיף 5 בכל שלב.
ב. עמית כותב 1 בשלב הראשון, מוסיף 2 בשלב השני, מוסיף 3 בשלב השלישי וכן הלאה.
טל מוסיף 7 בכל שלב.
ג. עמית כותב 9 בשלב הראשון, מוסיף 8 בשלב השני, מוסיף 7 בשלב השלישי וכן הלאה.
טל מוסיף בכל שלב מספר הקטן ב־1 מהמספר של עמית.
ד. עמית כותב 5 בשלב הראשון, ובכל שלב מוסיף את המספר הקטן ביותר כך שהסכום שיתקבל יתחלק ב־5.
טל מוסיף בכל שלב את המספר הקטן ביותר כך שהסכום שיתקבל יתחלק ב־7.

4 בכל סעיף נתונה סדרת מספרים שהתקבלה במשחק ששיחקו עמית וטל.
מהי האסטרטגיה של כל אחד מהשחקנים לדעתכם?
המשיכו את הסדרה לפי אסטרטגיה זו וקבעו מיהו המנצח במשחק.

א| 7, 11, 18, 22, 29, 33,...

ב| 3, 6, 8, 12, 15, 20, 24, 30,...

ג| 1, 8, 10, 16, 19, 24, 28, 32, 37, 40,...

5 א. עמית מתכנן לכתוב במהלך המשחק את המספרים האלה:

1, __, 11, __, 21, __, 31, __, 41, __, 51

האם הוא יצליח לכתוב מספרים אלה ללא תלות במספרים שיכתוב טל?
הסבירו את תשובתכם.

ב. אם אפשר – הציעו עוד סדרת מספרים שעמית יכול לרשום ללא תלות במספרים שיכתוב טל. אם אי־אפשר – הסבירו מדוע.

ג. האם לעמית יכולה להיות אסטרטגיה מנצחת ללא תלות במספרים שיכתוב טל?
אם קיימת אסטרטגיה כזו, כתבו אותה והסבירו את תשובתכם.

ד. האם לטל יכולה להיות אסטרטגיה מנצחת ללא תלות במספרים שיכתוב עמית?
אם קיימת אסטרטגיה כזו, כתבו אותה והסבירו את תשובתכם.

ה. שחקו עם חבר ובדקו אם אכן אפשר לנצח באמצעות האסטרטגיה שהצעתם.

משנים את מספר היעד

6 האם האסטרטגיה המנצחת שהצעתם במשימה 5 מתאימה גם למשחק שבו מספר היעד הוא 50?
אם לא – התאימו אותה למשחק כזה.
האם האסטרטגיה המנצחת שהצעתם במשימה 5 מתאימה גם למשחק שבו מספר היעד הוא 65?
אם לא – התאימו אותה למשחק כזה.

משנים את טווח המספרים

7 א. האם האסטרטגיה שהצעתם במשימה 5 מתאימה גם למשחק שבו מספר היעד הוא 60,
כאשר בכל שלב אפשר להוסיף מספר מ־1 עד 8? אם לא – התאימו אותה גם למשחק כזה.

ב. נסו להכליל את התוצאות שקיבלתם במשימות 5, 6 ו־7א.

משחק משלכם

8 הציעו משחק במספרים משלכם. הסבירו באיזו אסטרטגיה כדאי להשתמש כדי לנצח במשחק זה.
נמקו.

חיפוש מספרים ראשוניים, הנפה של ארטוסתנס

1 א. כתבו חמישה מספרים ראשוניים. תארו את הדרך שבעזרתה מצאתם את המספרים.

ב. האם 1 הוא מספר ראשוני? הסבירו.

תזכורת

מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מ־1 שמתחלק בדיוק בשני מספרים: ב־1 ובעצמו.

דוגמאות: המספרים 7 ו־23 הם מספרים ראשוניים.

***

מתמטיקאים, פילוסופים ומדענים חוקרים את המספרים הראשוניים מזה אלפי שנים, אך רבים מסודותיהם של מספרים אלה עדיין לא פוענחו. ביחידה זו תמצאו כמה שאלות פתוחות – שאלות שעדיין לא נפתרו – על המספרים הראשוניים. אתם מוזמנים לנסות את כוחכם!

***

כיצד מוצאים מספרים ראשוניים? החכם היווני אֶרָטוֹסְתֶנֶס הציע דרך פשוטה למציאת מספרים ראשוניים, שנקראת **הנפה של ארטוסתנס**.

2 במשימה זו תשתמשו בנפה של ארטוסתנס למציאת כל המספרים הראשוניים עד 100.

השתמשו ברשימת כל המספרים השלמים מ־2 עד 100:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

א. שלב 1 – המספר הקטן ביותר ברשימה הוא 2, שהוא מספר ראשוני.
הַשאירו אותו ברשימה ומחקו ממנה את כל הכפולות שלו.

שלב 2 – המספר הבא בראש הרשימה הוא 3, וגם הוא ראשוני.
הַשאירו אותו ברשימה ומחקו ממנה את כל הכפולות שלו.

המשך

ב. • מהו המספר הבא בראש הרשימה, שאת כפולותיו יש למחוק? האם הוא ראשוני או פריק?
- האם אחרי כל שלב בתהליך יופיע בראש הרשימה מספר ראשוני? הסבירו.
- שערו: לאחר שתמחקו את הכפולות של המספר הבא – מה יהיה המספר **הפריק** הראשון ברשימה שעדיין לא נמחק?

ג. שערו עד איזה מספר ראשוני תצטרכו להמשיך את התהליך. נמקו את השערתכם.
המשיכו את התהליך ובדקו את השערתכם.

ד. כתבו את כל המספרים הראשוניים עד 100.
כמה מספרים ראשוניים עד 100 מצאתם?

הידעתם?

אֶרָטוֹסְתֶנֶס (276–194 לפנה"ס) – מתמטיקאי, משורר, אתלט (בצעירותו), גאוגרף ואסטרונום יווני. בני זמנו כינוהו בֵּתָא (האות השנייה באלפבית היווני), כיוון שהוכיח את עצמו כשני־הטוב־ביותר בתחומים רבים. הוא היה היווני הראשון שחישב (בדיוק רב!) את היקף כדור הארץ, והוא שהָגה את המערכת הגאוגרפית של קווי אורך ורוחב.

3 א. כמה מספרים ראשוניים יש בין 1 ל־10? בין 11 ל־20? בין 21 ל־30?
בדקו כמה ראשוניים יש בכל עשרת עד 100.

ב. באיזו שורה בטבלה שבמשימה 2 יש הכי הרבה מספרים ראשוניים?

ג. האם ייתכן שבין עשרה מספרים עוקבים יש חמישה מספרים ראשוניים או יותר? הסבירו.

ד. האם ייתכן שבין עשרה מספרים עוקבים אין בכלל מספרים ראשוניים? הסבירו.

ה. שערו: האם במאה השנייה של המספרים (כלומר המספרים מ־101 עד 200) יש יותר ראשוניים מאשר במאה הראשונה, או פחות? בדקו את השערתכם.

4 נכון או לא נכון? הסבירו.

א. בין המספרים הטבעיים מ־1 עד 50 יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.

ב. בין המספרים הטבעיים מ־100 עד 200 יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.

ג. בכל קבוצה של מספרים טבעיים עוקבים יש יותר מספרים פריקים מאשר מספרים ראשוניים.

5 ידוע כי 8861, 53087 ו־2502559 הם מספרים ראשוניים.

א. כתבו בעזרתם ביטוי חשבוני שהתוצאה שלו תתחלק בשלושתם.

ב. כתבו בעזרת שלושת המספרים ביטוי חשבוני שהתוצאה שלו לא תתחלק באף אחד מהם.

ג. באתר The primes Pages תוכלו למצוא רשימה* של 50,000,000 המספרים הראשוניים הקטנים ביותר (מ־2 עד 982,451,653). האם קיים מספר שאינו מתחלק באף אחד מהם? הסבירו.

6 כאשר בודקים את רשימות המספרים הראשוניים, מוצאים כי ככל שהמספרים גדלים – תדירות הופעת המספרים הראשוניים יורדת. האם הם "ייגמרו"? כלומר, האם יש מספר ראשוני אחרון – כזה שלא קיים מספר ראשוני גדול ממנו? נמקו.

נכון לתמוז תשע"א, המספר הראשוני הגדול ביותר הידוע הוא $2^{43,112,609}-1$. זהו מספר בעל 12,978,189 ספרות. המספר התגלה במסגרת פרויקט GIMPS – פרויקט שיתופי ברשת, המגייס את כוחם של עשרות אלפי מחשבים ברחבי העולם בחיפוש אחר מספרים ראשוניים גדולים. אם אתם רוצים לשתף את המחשב הביתי שלכם בפרויקט (ואולי לגלות את המספר הראשוני הגדול ביותר הבא...) אתם יכולים להצטרף דרך האתר: http://www.mersenne.org

הפרשים בין מספרים ראשוניים, מספרים ראשוניים תאומים

7 א. האם קיימים זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 1? כמה זוגות כאלו קיימים? נמקו.

ב. מצאו זוג ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 11. האם יש עוד זוגות כאלו? נמקו.

ג. האם קיימים זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 13? נמקו.

הגדרה: זוג מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 נקראים **ראשוניים תאומים**.

8 א. מצאו 5 זוגות של ראשוניים תאומים.

ב. לכל זוג ראשוניים תאומים שמצאתם, רשמו את המספר הנמצא ביניהם. האם יש תכונה משותפת ל"מספרי האמצע" שמצאתם? הסבירו.

ג. השלָשה 2, 3, 5 היא שלשה של מספרים ראשוניים רצופים המכילה זוג של ראשוניים תאומים: 3, 5 . נסו למצוא שלשות של מספרים ראשוניים רצופים שמכילות שני זוגות של ראשוניים תאומים. כמה שלשות כאלה קיימות? האם תוכלו להסביר מדוע?

שאלה פתוחה

מתמטיקאים לא מצאו עדיין הוכחה (או הפרכה) להשערה שיש אינסוף זוגות של ראשוניים תאומים.

* לרשימת 50,000,000 הראשוניים הקטנים ביותר: http://primes.utm.edu/lists/small/millions

9 הניסיון מראה שאפשר לכתוב כל מספר זוגי כהפרש של שני מספרים ראשוניים. למשל:

$72 = 83 - 11$, $6 = 11 - 5$, $4 = 7 - 3$, $2 = 5 - 3$

וכן הלאה.

רִשמו כל אחד מהמספרים שלפניכם כהפרש של שני מספרים ראשוניים:

12, 34, 56, 88, 100

חפשו כמה שיותר אפשרויות שונות לאותו המספר.

שאלות פתוחות

הנה שתי טענות שעדיין לא נמצאה להן הוכחה (וגם לא הפרכה):

- ניתן לרשום כל מספר זוגי כהפרש של שני מספרים ראשוניים.
- ניתן לרשום כל מספר זוגי (גדול מ־2) כסכום של שני מספרים ראשוניים.

הטענה האחרונה מכונה **השערת גולדבך**, על שם המתמטיקאי הגרמני כריסטיאן גולדבך.

בדיקת ראשוניוּת

אחת הדרכים לבדיקת ראשוניוּת של מספר נקראת **מבחן החלוקה**: כדי להבטיח שמספר הוא ראשוני, יש לוודא שאינו מתחלק בשום מספר ראשוני הקטן או שווה לשורש שלו.

דוגמה על מנת לוודא ש־701 הוא מספר ראשוני, עלינו לוודא שהוא אינו מתחלק באף אחד מהראשוניים הקטנים מ־...$\sqrt{701} = 26.476$, כלומר במספרים: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ו־23.

10 א. לפניכם רשימה של מספרים תלת־ספרתיים:

176, 235, 377, 443, 469, 611, 723, 845, 999

מצאו בעזרת מבחן החלוקה אילו מהמספרים ברשימה הם ראשוניים.

ב. לפי מבחן החלוקה, על מנת לוודא שמספר הוא ראשוני יש לנסות לחלק אותו רק במספרים ראשוניים. מדוע אין צורך לבדוק חלוקה במספרים פריקים?

ג. לפי מבחן החלוקה אין צורך לבדוק חלוקה בראשוניים הגדולים משורש המספר. הסבירו מדוע.

יש אפשרויות שונות לפרק מספר טבעי לגורמים.

דוגמה את המספר 24 אפשר לפרק כך: $24 = 6 \cdot 4$ וגם כך: $24 = 3 \cdot 8$

ובכמה דרכים שונות אפשר לפרק מספר **לגורמים ראשוניים**? (שימו לב: שינוי בסדר הגורמים אינו נחשב פירוק שונה; $6 = 3 \cdot 2$ ו־ $6 = 2 \cdot 3$ הם אותו פירוק של 6.)

המתמטיקאי היווני אוקלידס (שחי בערך בשנים 275–365 לפנה"ס) הוכיח משפט הקובע שיש בדיוק דרך אחת לעשות זאת. המשפט הזה נקרא **המשפט היסודי של האריתמטיקה**.

ד. פרקו לגורמים ראשוניים כל מספר פריק מהרשימה בסעיף א.

מצוינות חובות

חבורות

מתמטיקה משולבת
אלגברה גאומטרייה מספרים

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי
על–שם עמוס דה-שליט
אגף המדעים - המזה"פ

מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

חבורות

1. פעולות בינאריות

המחשבון המסתורי

דני מצא מחשבון ישן ומסתורי.

על המחשבון הוא זיהה את המקשים של הספרות ואת המקש =

אך לא הצליח לזהות את מקשי פעולות החשבון הרגילות.

ננסה לפענח אילו פעולות מבצעים המקשים השונים במחשבון של דני.

זהה את הפעולה

1. לפניכם תרגילים שביצע דני, והתוצאות שקיבל.
מהי לדעתכם המשמעות של כל אחד מהמקשים?

דוגמה: מקש $\clubsuit$

$7 \clubsuit 3 = 20$	$1 \clubsuit 5 = 12$
$2 \clubsuit 7 = 18$	$3 \clubsuit 2 = 10$
$4 \clubsuit 4 = 16$	$8 \clubsuit 4 = 24$

משמעות המקש: $a \clubsuit b = 2 \cdot (a + b)$

א. מקש $\blacktriangle$

$2 \blacktriangle 1 = 5$	$3 \blacktriangle 5 = 11$
$11 \blacktriangle 3 = 25$	$4 \blacktriangle 6 = 14$
$20 \blacktriangle 6 = 46$	$7 \blacktriangle 5 = 19$

ב. מקש $\spadesuit$

$7 \spadesuit 1 = 4$	$2 \spadesuit 6 = 4$
$4 \spadesuit 1 = 2.5$	$7 \spadesuit 2 = 4.5$
$4 \spadesuit 2 = 3$	$2 \spadesuit 0 = 1$

ג. מקש $\bigstar$

$7 \bigstar 1 = 50$	$2 \bigstar 6 = 10$
$4 \bigstar 1 = 17$	$3 \bigstar 3 = 12$
$4 \bigstar 2 = 18$	$5 \bigstar 0 = 25$

ד. מקש $\blacklozenge$

$2 \blacklozenge 18 = 56$	$2 \blacklozenge 6 = 20$
$20 \blacklozenge 3 = 83$	$3 \blacklozenge 3 = 15$
$2 \blacklozenge 100 = 302$	$5 \blacklozenge 10 = 65$

2. לפניכם תרגילים עם פעולות המקשים ♦ ★ ♠ ▲ שחקרתם.
השלימו מספרים מתאימים.

א. מקש ▲

10 ▲ 3 = ■

11 ▲ ■ = 40

■ ▲ 16 = 76

21 ▲ ■ = 100

ב. מקש ♠

15 ♠ 47 = ■

■ ♠ 23 = 52.5

10 ♠ ■ = 4

■ ♠ ■ = 5

ג. מקש ★

4 ★ 5 = ■

−3 ★ −2 = ■

4 ★ ■ = 17

■ ★ 3 = 12

ד. מקש ♦

1 ♦ 1 = ■

3 ♦ 10 = ■

2 ♦ ■ = 11

■ ♦ ■ = 5

הגדרה:
פעולה בינארית על מספרים היא פעולה המתבצעת בין שני מספרים (לא בהכרח שונים זה מזה), ואשר נותנת כתוצאה מספר יחיד.
דוגמה: כל פעולות החשבון שהכרנו כעת הן פעולות בינאריות על מספרים.
פעולת מציאת הנגדי למספר **איננה** פעולה בינארית, כי היא פועלת על מספר אחד.

תכונות של פעולות בינאריות

3. דני ניסה לחשב במחשבון המסתורי את התרגיל 1 ▲ 7, הוא שגה והפך בטעות את הסדר בין המספר הראשון והמספר השני בתרגיל.

א. מהי התוצאה (השגויה) של דני, ומהי התוצאה הנכונה של תרגיל זה?

ב. מה יקרה אם דני יחזור על הטעות של היפוך סדר המספרים בפעולות האחרות?

הגדרה:
פעולה בינארית שבה סדר המספרים שעליהם היא מופעלת אינה משפיעה על התוצאה נקראת **פעולה חילופית** (קומוטטיבית).

4. האם הפעולות ♦ ★ ♠ ▲ הן חילופיות? אם כן, הסבירו. אם לא, בכל פעולה שאינה חילופית, הביאו דוגמאות לתרגילים שבהם שינוי סדר המספרים נותן תוצאות שונות.

5. א. הביאו שתי דוגמאות נוספות לפעולות חילופיות.
לכל פעולה כזאת, כתבו שלושה זוגות תרגילים ($a*b$ ו- $b*a$) שידגימו את תכונת החילופיות.

ב. הביאו שתי דוגמאות נוספות לפעולות שאינן חלופיות.
לכל פעולה כזאת, כתבו שלושה זוגות של תרגילים ($a*b$ ו- $b*a$), שיראו כי תכונת החילופיות אינה מתקיימת לגבי פעולות אלה.

6. א. דני אמר: "תוצאת החיבור הרגיל בין 0 לבין כל מספר אחר היא תמיד המספר האחר. כנראה שזה נכון גם לגבי הפעולה ♠".
הוא רשם את התרגילים: 0 ♠ 3   6 ♠ 0   2 ♠ 0
האם השערתו של דני נכונה?

ב. אלונה אמרה: "תוצאת הכפל הרגיל בין 1 לבין כל מספר אחר היא תמיד המספר האחר. כנראה שזה נכון גם לגבי הפעולה ♠".
היא רשמה את התרגילים: 1 ♠ 3   6 ♠ 1   2 ♠ 1
האם השערתה של רינה נכונה?

ג. נסו למצוא מספר אחד המתאים לכל המקומות הריקים בתרגילים הבאים:
3 = ▢ ♠ 3   6 = 6 ♠ ▢   2 = 2 ♠ ▢

הגדרה:
מספר שתוצאת הפעולה בינו לבין כל מספר נוסף היא המספר הנוסף נקרא **איבר ניטרלי** של הפעולה הזאת.
בשלב זה, נתייחס לאיברים ניטרליים **רק בפעולות חילופיות**.
מקובל לסמן את האיבר הניטרלי ב- e.
אם נסמן את הפעולה ב- $*$ ואם לפעולה זאת יש איבר ניטרלי, אז מתקיים:
$a*e = e*a = a$ לכל a בקבוצת המספרים שבה מוגדרת הפעולה הזאת.

ד. האם לפעולה ♠ יש איבר ניטרלי?

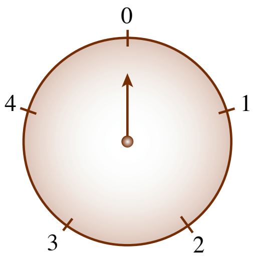
7. קבעו האם הפעולה ♦ היא בעלת איבר ניטרלי. אם כן, מצאו אותו. אם לא, הסבירו.

2. פעולות עם תוצאות מחזוריות - חלק א

דני הביט בשעון בחדרו. אביו יצא לתורנות ואמר שיחזור בעוד 10 שעות. דני ניסה להבין איזה שעה יראה השעון כשאביו יחזור.

ננסה לעזור לדני להבין כיצד לבצע פעולות על השעון, ונכיר תכונות של פעולות אלו.

הגדרה:



נתונות 5 נקודות על מעגל המסומנות במספרים ונתון מחוג המכוון ל- 0.

נגדיר פעולה $b \circ a$ בין כל זוג מספרים טבעיים או 0 כך:

סובבו את המחוג a תחנות בכיוון השעון,

ואחר-כך המשיכו לסובב באותו כיוון b תחנות נוספות.

תוצאת הפעולה היא מספר התחנה שהגעתם אליה.

דוגמאות:

$1 \circ 3 = 4$ $2 \circ 1 = 3$ $2 \circ 3 = 0$

$6 \circ 7 = 3$ $6 \circ 3 = 4$ $2 \circ 7 = 4$

1. פתרו:

א. $5 \circ 1 =$ ד. $7 \circ 7 =$ ז. $50 \circ 100 =$

ב. $4 \circ 4 =$ ה. $4 \circ 6 =$ ח. $34 \circ 22 =$

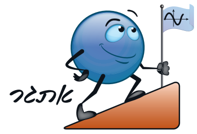
ג. $3 \circ 6 =$ ו. $10 \circ 21 =$ ט. $134 \circ 122 =$

2. א. מצאו מספר פתרונות מתאימים לכל משוואה
(x מספר טבעי או אפס):

$2 \circ x = 0$ $7 \circ x = 3$ $32 \circ x = 2$

$3 \circ x = 1$ $x \circ 2 = 1$ $x \circ 100 = 1$

ב. נסו למצוא תכונה משותפת לכל הפתרונות השונים שמצאתם לאותה משוואה.



ג. לפניכם חלק מקבוצת הפתרונות של משוואה מסוג המשוואות בסעיף א:

$26,\ 21,\ 16,\ 11,\ 6,\ 1$

נסו למצוא משוואה שאלה הפתרונות שלה.

התוכלו למצוא משוואה מתאימה נוספת?

3. ביום אחד, אביו של דני יצא שוב לתורנות של 10 שעות.

הוא אמר: "אחזור בשעה 7 בערב". מתי יצא האב לתורנות?

תכונות נוספות

סגירות

בפעילות הקודמת הכרנו פעולות בינאריות חדשות, ותכונות שלהן. הכרנו גם שתי תכונות של פעולות בינאריות: **חילופיות ואיבר ניטרלי**.

תזכורת:

פעולה בינארית בין מספרים היא פעולה בין שני מספרים שנותנת כתוצאה מספר יחיד.

פעולה חילופית היא פעולה בינארית שבה סדר המספרים אינו משפיע על התוצאה.

איבר ניטרלי של פעולה בינארית הוא מספר שפעולה בינו לבין כל מספר נוסף נותנת כתוצאה את המספר הנוסף.

כל הפעולות שהכרנו היו פעולות בינאריות. בשלב זה, נתייחס לאיברים ניטרליים רק בפעולות חילופיות.

4. האם הפעולה ○ היא פעולה בינארית? הסבירו.

האם הפעולה ○ היא חילופית? נמקו.

האם לפעולה ○ יש איבר ניטרלי? אם כן, פרטו מהו. אם לא, נמקו.

מיכאל התלבט בשאלה: האם הפעולות החיבור והחיסור הרגילות הן חילופיות - עבור קבוצת המספרים הטבעיים.

לגבי פעולת החיבור, הוא אמר: "פעולת החיבור היא חילופית.

כלומר, לכל שני מספרים טבעיים a ו- b מתקיים: $a + b = b + a$".

הוא הסביר "אם יש לי שתי חבילות של סוכריות ואני רוצה לאחד את הסוכריות לחבילה אחת, זה לא משנה אם אתחיל מחבילה אחת או מהחבילה השנייה".

לגבי פעולת החיסור, מיכאל התלבט מה לקבוע.

הוא בדק דוגמה: $7 - 3 = 4$ $\quad$ $3 - 7 = -4$

מיכאל שם לב, כי התוצאה של אחד התרגילים איננה מספר טבעי.

הוא הסיק מכך כי זוהי דוגמה נגדית המוכיחה כי פעולת החיסור איננה חילופית.

הגדרה:

קבוצת מספרים נקראת **סגורה** לגבי פעולה בינארית, אם תוצאת הפעולה בין כל שני מספרים שבקבוצה גם כן שייכת לאותה הקבוצה.

דוגמה: קבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצה סגורה לגבי פעולת החיבור הרגיל, כי סכום של כל שני מספרים טבעיים הוא תמיד מספר טבעי - כלומר, גם הוא שייך לקבוצה.

לעומת זאת, קבוצת המספרים הטבעיים **איננה** סגורה לגבי פעולת החיסור הרגיל, כי התוצאה של חיסור שני מספרים טבעיים **היא לא תמיד** מספר טבעי.

למשל, תוצאת החיסור של $3 - 7$ איננה מספר טבעי.

5. בכל סעיף, בדקו האם קבוצת המספרים הטבעיים (ללא המספר אפס) סגורה לגבי הפעולה הנתונה.
אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
א. כפל
ב. חילוק
ג. חזקה
ד. ממוצע חשבוני (תזכורת: משמעות הפעולה "ממוצע חשבוני של שני מספרים" היא מחצית סכומם).

6. האם קבוצת המספרים הטבעיים היא קבוצה סגורה לגבי הפעולה $\circ$ שהכרנו בתחילת הפעילות?
אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

7. התוצאות של הפעולה ○ הן **מחזוריות**. לכן נקרא לפעולה ○ **פעולה עם תוצאות מחזוריות**.
נסו למצוא דוגמאות מחיי יום יום המצריכות פעולות חשבון עם תוצאות מחזוריות.
בחרו אחת מדוגמאות אלו.

א. שאלו עליה שתי שאלות מחיי היום-יום.

ב. רשמו שני תרגילים שידגימו את הפעולה ואת מחזוריות התוצאות.

קיבוציות

תכונה נוספת של פעולה בינארית וקבוצת מספרים היא תכונת **הקיבוציות**. לפי חוק הקיבוץ סדר ביצוע הפעולה בשרשרת (אותה פעולה פעמיים ושלושה מספרים), איננה משנה את התוצאה. למשל:

$(10 + 5) + 3 = 10 + (5 + 3)$

8. האם לדעתכם פעולת החיסור היא קיבוצית?

הגדרה

פעולה בינארית היא **פעולה קיבוצית** אם היא מקיימת את חוק הקיבוץ, כלומר סדר הביצוע בשרשרת של אותה פעולה פעמיים, אינו משנה את התוצאה.

כלומר, פעולה $*$ היא קיבוצית עבור קבוצת מספרים, אם **לכל** שלושה מספרים a, b, c שבקבוצת המספרים המתאימים לפעולה, מתקיים השוויון: $(a * b) * c = a * (b * c)$

דוגמה: פעולת החיבור הרגיל היא קיבוצית בקבוצת המספרים הטבעיים, כי **לכל** שלושה מספרים טבעיים מתקיים: $(a + b) + c = a + (b + c)$

לעומת זאת, פעולת החיסור הרגיל איננה קיבוצית בקבוצת המספרים טבעיים.

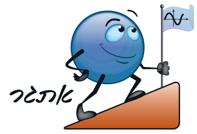
למשל, $(10 - 5) - 3 = 2$ אבל $10 - (5 - 3) = 8$

9. האם הפעולה ○ שהכרנו בתחילת הפעילות (סיבוב במעגל על-פי מספר התחנות) היא קיבוצית בקבוצת המספרים הטבעיים ו- 0? נמקו את תשובתכם.

10. נתונות שלוש פעולות בינאריות שהכרנו בפעילות הקודמת.

$a \blacktriangle b = 2 \cdot a + b$ $\qquad$ $a \spadesuit b = \frac{a + b}{2}$ $\qquad$ $a \bigstar b = a^2 + b$

לכל פעולה, קבעו האם היא קיבוצית. אם כן, הסבירו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית (כלומר, דוגמה שבה משנים את סדר הביצוע בשרשרת של הפעולה, ומקבלים תוצאות שונות).



11. נתייחס לקבוצת המספרים **השלמים** על ציר המספרים.
נגדיר פעולה M **בין** שני מספרים שלמים a **ו-** b באופן הבא:
$a\ M\ b$ שווה **למרחק** על ציר המספרים **בין** a ל- b. שימו לב! מרחק הוא תמיד מספר חיובי.

א. האם הפעולה M היא פעולה בינארית? הסבירו.

ב. האם קבוצת המספרים השלמים סגורה לגבי הפעולה M?

ג. האם הפעולה M היא חילופית? נמקו.

ד. האם הפעולה M היא קיבוצית?

ה. הסבירו מדוע לפעולה M אין איבר ניטרלי.

ו. מצאו קבוצת מספרים סגורה לגבי הפעולה M, שבה יש לפעולה זו איבר ניטרלי.

3. פעולות עם תוצאות מחזוריות - חלק ב

קבוצות פעולות ותכונות

חִזרו בקצרה **בזוגות** על המושגים והתכונות שעסקנו בהם בשיעורים הקודמים.

חלקו ביניכם את המושגים והתכונות, והסבירו אותם במילים שלכם.

א. פעולה **בינארית**

ב. קבוצה **סגורה** לגבי פעולה בינארית

ג. פעולה בינארית **חילופית**

ד. איבר **ניטרלי** לגבי פעולה בינארית (נתייחס לאיבר ניטרלי רק בפעולה חילופית)

ה. פעולה בינארית **קיבוצית**

ו. פעולה בינארית עם תוצאות **מחזוריות**

1. a ו- b הם שני מספרים שלמים, ו- $*$ היא פעולה ביניהם.
נסו לרשום בעזרת אותיות ומעט מילים את התכונות שבמסגרת.

2. אילו מן התכונות שבמסגרת מתקיימות לגבי המספרים הטבעיים והפעולות הבאות
א. חיסור
ב. ממוצע חשבוני (תזכורת: ממוצע חשבוני של שני מספרים הוא מחצית סכומם).
ג. חזקה
ד. כפל

מספר הופכי

הגדרה:

b הוא מספר הופכי ל- a בפעולת הכפל הרגילה, אם $a \cdot b = 1$.

דוגמה: $\frac{2}{5}$ הופכי ל- $2\frac{1}{2}$, כי $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 1$.

מכיוון שהכפל היא פעולה חילופית, גם $2\frac{1}{2}$ הופכי ל- $\frac{2}{5}$.

שימו לב: 1 (תוצאת המכפלה של מספרים הופכיים) הוא המספר הניטרלי של פעולת הכפל.

באופן כללי, b נקרא **מספר הופכי** ל- a בפעולה חילופית $*$ שיש לה איבר ניטרלי e

אם $a * b = e$. מכיוון שהפעולה חילופית, גם a הופכי ל- b.

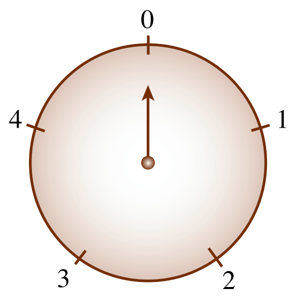
כלומר, a ו- b הופכיים זה לזה.

3. א. השלימו במחברת במילים את ההגדרה:
מספרים הופכיים זה לזה עבור פעולה מסוימת הם מספרים ש...
ב. מהו המספר ההופכי ל- 5 בפעולת החיבור הרגיל? האם יש לו שם מקובל אחר ביחס ל- 5?

4. א. האם בקבוצת המספרים **השלמים** עם פעולת הכפל הרגיל, יש מספר הופכי לכל מספר? הסבירו או תנו דוגמה נגדית.
ב. מצאו קבוצת מספרים עם פעולת הכפל הרגיל, כך שלכל מספר בה יש מספר הופכי שגם הוא שייך לקבוצה (זהירות, אפס!).

פעולות עם תוצאות מחזוריות

חיבור מחזורי



בפעילות הקודמת הכרנו את הפעולה ○ כפעולת **חיבור על שעון** שהכיל 5 נקודות. חיבור זה נותן תוצאות מחזוריות. במקרה זה, גודל המחזור הוא 5.

בדקנו גם תכונות של הפעולה הזאת בקבוצת המספרים הטבעיים ו- 0.

נתייחס עתה לפעולה בינארית זו בקבוצת המספרים $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, ונסמן אותה ב- $\oplus_5$

נרחיב את ההסתכלות גם לשעונים בעלי מספר נקודות שונה - כלומר, נבצע פעולות חשבון בגדלי מחזור שונים.

למשל, נתייחס ל- $\oplus_{12}$ כפעולת חיבור בעלת מחזור 12, על קבוצת המספרים:
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. פעולה זו שקולה לפעולת החיבור על שעון שמכיל 12 נקודות.

למשל, $9 \oplus_{12} 11 = 8$ $\quad 7 \oplus_{12} 10 = 5$ $\quad 6 \oplus_{12} 3 = 9$

5. חשבו:

א. $3 \oplus_{12} 10 =$
ב. $3 \oplus_{12} 9 =$
ג. $8 \oplus_{12} 5 =$
ד. $4 \oplus_{12} 3 =$
ה. $8 \oplus_{12} 11 =$
ו. $7 \oplus_{12} 7 =$

6. חברו **שני** תרגילים לכל תוצאה.

א. $0 = \blacksquare \oplus_{12} \blacksquare$
ב. $1 = \blacksquare \oplus_{12} \blacksquare$
ג. $5 = \blacksquare \oplus_{12} \blacksquare$

נבדוק תכונות של הפעולה $\oplus_{12}$ בקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

7. סמנו נכון / לא נכון והסבירו.

א. הקבוצה הנתונה סגורה לגבי הפעולה $\oplus_{12}$.

ב. הפעולה $\oplus_{12}$ היא פעולה חילופית.

ג. הפעולה $\oplus_{12}$ היא פעולה קיבוצית.

ד. האיבר הניטרלי של הפעולה $\oplus_{12}$ הוא 0.

ה. 8 ו- 4 הם מספרים הופכיים זה לזה לגבי הפעולה $\oplus_{12}$.

8. מצאו את ההופכיים למספרים: $0, 11, 3$ לגבי הפעולה $\oplus_{12}$

האם יש מספר נוסף שההופכי שלו שווה לו?

כפל מחזורי

9. א. הציעו הגדרה **לכפל מחזורי** בקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. סמנו פעולה זאת כך: $a \odot_5 b$

ב. פתרו לפי הגדרתכם

$4 \odot_5 3 =$ $\qquad$ $2 \odot_5 3 =$ $\qquad$ $3 \odot_5 4 =$ $\qquad$ $3 \odot_5 2 =$

ג. התייחסו לתכונות שבמסגרת בראשית הפעילות. בדקו אילו מן התכונות מתקיימות לגבי הפעולה $\odot_5$ שהגדרתם בקבוצה הנתונה?

הגדרה:

נגדיר פעולת $a \odot_5 b =$ כפעולת **כפל מחזורי**, בקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ כך:

כופלים את a ב- b בכפל רגיל, ומחסרים מהמכפלה כפולות של 5, עד שהתוצאה קטנה מ- 5.

זוהי תוצאת הפעולה.

למשל: $3 \odot_5 3 = 4$ $\qquad$ $4 \odot_5 4 = 1$

10. א. העתיקו למחברת והשלימו את הלוח של הפעולה $\odot_5$.

$\odot_5$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3				4	
4					1

ב. הסבירו כיצד רואים בלוח ש

- שהקבוצה סגורה לגבי הפעולה
- את המספר הניטרלי לגבי הפעולה
- שהפעולה היא חילופית
- זוגות של מספרים הופכיים זה לזה.

ג. האם לכל מספר בקבוצה יש הופכי? הסבירו.

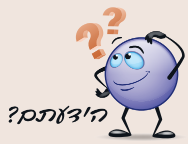
ד. הסבירו מדוע אי-אפשר לראות בלוח אם הפעולה קיבוצית.

11. נגדיר באופן דומה פעולה $b \odot_4 a$ בקבוצה $\{0, 1, 2, 3\}$.
הוכיחו כי ל- 2 אין הופכי לגבי פעולה זו בקבוצה הנתונה.

תופעות מחזוריות בחיינו

יוסי ומיכל גרים זה מול זה. כל אחד מהם מגדל כלב בדירתו. יוסי מוציא את הכלב שלו לטיול כל 8 שעות, ואילו מיכל מוציאה את הכלב שלה לטיול כל 9 שעות.

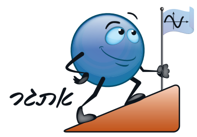
12. ביום ראשון יצאו מיכל, יוסי והכלבים לטיול משותף בשעה 7:00.
א. כל כמה שעות ייפגשו יוסי ומיכל במהלך טיוליהם עם הכלבים?
ב. באיזה יום ובאיזו שעה יתקיים הטיול המשותף הבא של יוסי מיכל והכלבים?



הציקָדָה (משמעות המילה Cicada בלטינית היא "צרצר עץ") היא חרק מזמזם המזכיר ארבה. ישנם כ- 2.500 מינים שונים של ציקדות. שניים מן המינים הללו חיים רוב הזמן מתחת לפני האדמה, ורק פעם אחת במשך כל תקופת חייהם, הם עולים אל מעל פני השטח - האחד כל 17 שנים, והשני כל 13 שנים. לכן באזורים מסוימים בעולם (למשל, בארה"ב), הציקדות ממינים אלו מופיעות מעל פני האדמה, בקבוצות גדולות מאוד כל 17 (או 13) שנים.

שני מיני הציקדות הללו יוצרות תופעות מחזוריות: האחת כל 17 שנים, והשנייה כל 13 שנים.

כל כמה שנים שני מיני הציקדה יופיעו מעל פני האדמה בעת ובעונה אחת?



13. אם בשנה מסוימת הופיעה ציקדה ממין אחד, ובשנה שאחריה הופיעה הציקדה מן המין השני, כמה שנים יעברו עד שיופיעו שני מיני הציקדות באותה השנה?
האם יש יותר מתשובה אחת אפשרית? הסבירו מדוע.

4. מהי חבורה?

לפניכם לוח הפעולה $\oplus_7$: חיבור עם תוצאות מחזוריות במחזור 7,
על קבוצת המספרים השלמים מ- 0 עד 6.

$\oplus_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

נחקור את תכונות הקבוצה והפעולה בעזרת הלוח.

1. א. הסבירו כיצד מזהים בלוח את התכונות הבאות של הפעולה $\oplus_7$
והקבוצה $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

- סגירות
- קיום מספר הניטרלי
- חילופיות
- קיום מספר הופכי לכל מספר שבקבוצה.

ב. הפעולה $\oplus_7$ היא פעולה קיבוצית. הדגימו בעזרת שתי דוגמאות.

בפעילויות הקודמות היכרנו פעולות בינאריות שונות, ולמדנו על תכונות שונות שלהן: סגירות, קיבוציות, איבר ניטרלי ואיברים הופכיים. בפעילות זו נלמד על מבנה מתמטי בשם **חבורה חילופית**, שקושר בין התכונות האלה.

הגדרה:

קבוצה של מספרים, או של עצמים מתמטיים אחרים, **עם פעולה** בינארית המוגדרת על כל איברי הקבוצה נקראת **חבורה חילופית**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. הקבוצה **סגורה** לגבי הפעולה.

ב. הפעולה היא **קיבוצית**.

ג. בקבוצה קיים **איבר ניטרלי** עבור הפעולה.

ד. לכל איבר בקבוצה יש **איבר הופכי** עבור הפעולה.

ה. הפעולה היא **חילופית**.

הערה: יש גם חבורות שאינן חילופיות, והן אינן מקיימות את התנאי החמישי. בפעילויות שלנו נעסוק רק בחבורות חילופיות.

דוגמה:

קבוצת כל המספרים השלמים (חיוביים ושליליים ו- 0) עם פעולת החיבור הרגיל היא חבורה.

כדי להראות זאת, נצטרך לוודא שכל התנאים מתקיימים:

- **סגירות:** לכל שני מספרים שלמים a ו- b, הסכום $a+b$ הוא מספר שלם, ולכן נמצא בקבוצה.
- **קיבוציות:** לכל שלושה מספרים שלמים a, b, c, מתקיים: $(a+b)+c=a+(b+c)$
- **איבר ניטרלי:** 0 נמצא בקבוצת השלמים ולכל מספר שלם a מתקיים: $a+0=0+a=a$.
- **איבר הופכי:** לכל מספר שלם a קיים מספר שלם $(-a)$, כך ש- $a+(-a)=0$
כלומר, לכל a קיים מספר שסכומו עם a הוא המספר הניטרלי.
- **חילופיות:** לכל שני מספרים שלמים a, b מתקיים: $a+b=b+a$.

2. האם קבוצת המספרים השלמים מ- 0 עד 6 עם הפעולה $\oplus_7$ שהוגדרה בתחילת הפעילות היא חבורה חילופית? נמקו.

3. לכל סעיף, מצאו דוגמא לקבוצה עם פעולה בינארית המקיימת את התנאי.

א. הקבוצה **אינה סגורה** לגבי הפעולה.

ב. הפעולה **אינה קיבוצית**.

ג. בקבוצה **אין איבר ניטרלי** עבור הפעולה.

ד. בקבוצה **יש איבר ניטרלי** עבור הפעולה, אך יש איברים בקבוצה **שאין** להם **איבר הופכי** בקבוצה.

4. לפניכם מספר קבוצות ופעולות.
קבעו אילו מן התכונות מתקיימות בהן ואילו לא. נמקו תשובותיכם.
זהו על-סמך כך, אילו קבוצות ופעולות הן חבורות חילופיות.

התכונה / הקבוצה עם הפעולה	סגירות	קיבוציות	איבר ניטרלי	איבר הופכי	חילופיות	חבורה חילופית?
המספרים הטבעיים עם חיבור						
המספרים השלמים עם כפל						
המספרים הטבעיים עם הממוצע החשבוני						
המספרים $\frac{m}{n}$ (n, m מספרים שלמים, שונים מ- 0) עם כפל						
קבוצת המספרים $(0, 1, 2, 3, 4)$ עם חיבור מחזורי $\oplus_5$		√				
קבוצת המספרים $(0, 1, 2, 3, 4)$ עם כפל מחזורי $\odot_5$		√				
קבוצת המספרים $(1, 2, 3, 4)$ עם כפל מחזורי $\odot_5$		√				
קבוצת המספרים $(0, 1, 2, 3)$ עם חיבור מחזורי $\oplus_4$		√				
קבוצת המספרים $(1, 2, 3)$ עם כפל מחזורי $\odot_4$		√				

זיהוי ובניית לוח פעולה של חבורה חילופית

5. לפניכם לוח של הפעולה כפל 6 מחזורי על קבוצת המספרים $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\odot_6$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

א. אילו מן התנאים הדרושים לקיום חבורה חילופית מתקיימים בקבוצה עם הפעולה הבינארית $\odot_6$?

ב. לכל תנאי שאינו מתקיים תנו דוגמה נגדית.

ג. האם הקבוצה עם הפעולה הנתונות היא חבורה חילופית? נמקו.

6. בכל סעיף בדקו האם הקבוצה עם הפעולה הנתונה מהווה חבורה חילופית? הסבירו את תשובתכם.

א. הקבוצה $\{a, b\}$
הפעולה ❖

❖	a	b
a	a	b
b	b	b

ב. הקבוצה $\{a, b, c\}$
הפעולה ✦

✦	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	c	a

5. וקטורים

בארבע הפעילויות האחרונות, למדנו מושגים בקבוצות של מספרים ולמדנו תכונות של פעולות במספרים.

נדון בפעולה בינארית מסוג אחר: פעולה בין עצמים מתמטיים שאינם מספרים.

הערה: העבודה על פעילות זו דורשת עבודה על דף נקודות או על דף משבצות גדולות.

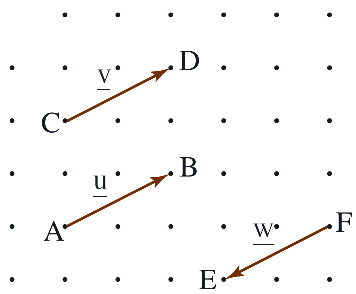
מהו וקטור?

הגדרה:

וקטור במישור מיוצג על-ידי חץ בעל אורך וכיוון,

ומסומן על-ידי אותיות גדולות המציינות את שמות הנקודות שבזנב ובראש החץ ($\overrightarrow{AB}$) או על-ידי אות קטנה ($\underline{u}$).

שימו לב! בסימון $\overrightarrow{AB}$ חשוב להקפיד על סדר האותיות. האות שבזנב החץ רשומה ראשונה משמאל, והאות שבראש החץ מימינה.



למשל, הוקטור $\underline{w}$ מסומן גם בסימון $\overline{FE}$ ולא $\overline{EF}$

שני וקטורים שיש להם **אותו אורך ואותו כיוון** נקראים **וקטורים שווים.**

למשל, $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם וקטורים שווים. מסמנים: $\underline{u} = \underline{v}$

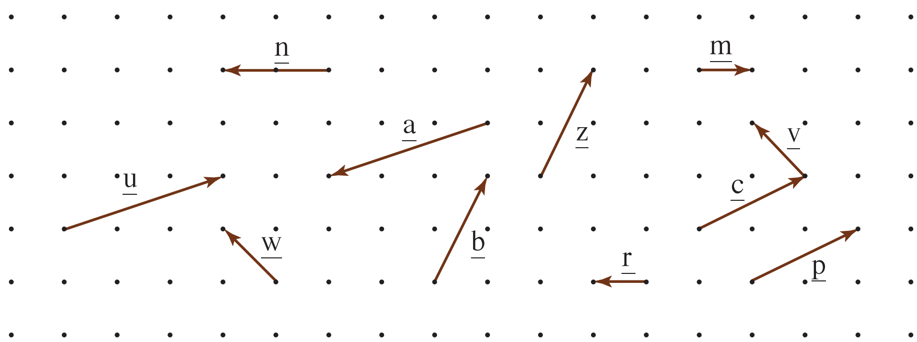
שני וקטורים **שווים באורכם**, אך **מנוגדים בכיוונם** נקראים **וקטורים נגדיים.**

למשל, $\underline{u}$ ו- $\underline{w}$ הם וקטורים נגדיים. מסמנים: $\underline{w} = -\underline{v}$

וקטור המתחיל ומסתיים באותה נקודה נקרא **וקטור האפס**, ומסומן: $\underline{0}$

1. בשרטוט הבא נתונים וקטורים.

א. מצאו זוגות של וקטורים שווים.



ב. מצאו זוגות של וקטורים שווים באורכם, אך לא בכיוונם.

ג. מצאו זוג וקטורים שווים בכיוונם, אבל לא באורכם.

ד. מצאו זוגות של וקטורים נגדיים.

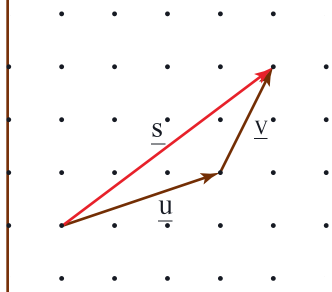
חיבור וקטורים

הוקטורים מתארים תנועה ישרה בכיוון מסוים ולמרחק מסוים.

הגדרה:

נגדיר את פעולת **החיבור + בין וקטורים כסיכום התנועה.**

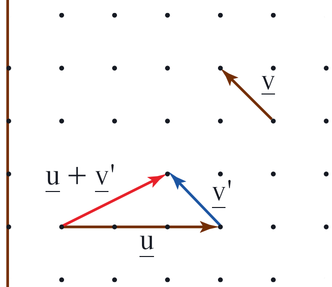
כדי לחבר וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כלומר כדי לקבל את הוקטור $\underline{u} + \underline{v}$, נתקדם תחילה לפי האורך והכיוון של $\underline{u}$, ולאחר מכן ננוע לפי האורך והכיוון של $\underline{v}$. תוצאת הפעולה היא וקטור $\underline{s}$ המשקף את סיכום התנועה שלנו, מנקודת ההתחלה של הוקטור הראשון לנקודת הסיום של הוקטור השני (ללא ציון נקודות ביניים ופניות שעברנו בדרך).



אם הוקטור $\underline{v}$ אינו בהמשכו של הוקטור $\underline{u}$, אפשר להזיז את הוקטור $\underline{v}$ (מבלי לשנות את אורכו או את כיוונו), כך שיהיה בהמשכו של הוקטור $\underline{u}$.

כלומר, במקרה זה אפשר לשרטט וקטור v' השווה ל- $\underline{v}$, כך שזנבו יהיה בראש הוקטור $\underline{u}$.

במקרה זה, $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{v}'$



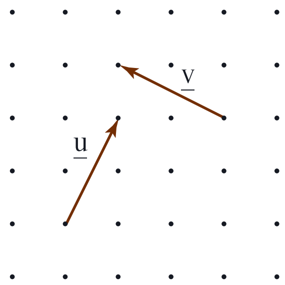
2. נתונים חמישה וקטורים וארבעה תרגילים של חיבור וקטורים.

$\underline{u} + \underline{z}$ $\underline{w} + \underline{w}$ $\underline{z} + \underline{b}$ $\underline{w} + \underline{u}$

א. עבדו על דף נקודות או על דף משבצות גדולות.
בכל תרגיל, שרטטו את זוג הוקטורים המחוברים ואת תוצאת פעולת החיבור של כל זוג.

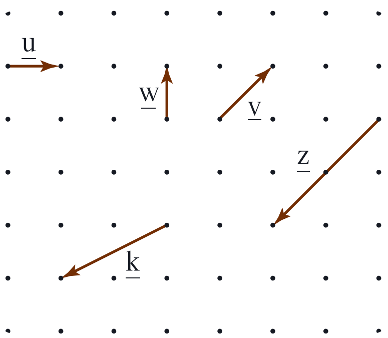
ב. לכל זוג וקטורים מסעיף א, מצאו בין הוקטורים הנתונים וקטור השווה לתוצאת החיבור ביניהם.

3. בצעו על דף נקודות את החיבור של הווקטורים $\underline{v} + \underline{u}$.



4. בשרטוט נתונים חמישה וקטורים.
בטאו אם אפשר, את הסכומים הבאים בעזרת הווקטורים הנתונים, או הנגדיים להם.

דוגמה: $\underline{u} + \underline{w} = \underline{v}$



א. $\underline{k} + (-\underline{w}) =$

ב. $\underline{z} + (\underline{v}) =$

ג. $\underline{z} + \underline{w} =$

ד. $\underline{v} + \underline{w} =$

ה. $(\underline{z} + \underline{v}) + \underline{v} =$

ו. $(\underline{z} + \underline{w}) + \underline{u} =$

ז. $\underline{z} + (\underline{w} + \underline{u}) =$

5. שרטטו וקטור כלשהו במחברת או על דף נקודות.
שרטטו שלושה זוגות וקטורים שסכומם הוא הוקטור ששרטטתם.

6. נתון תרגיל של שתי פעולות חיבור ושלושה וקטורים.
האם לדעתכם, ניתן לשרטט ישירות את וקטור התוצאה, מבלי לשרטט תחילה סכום של שניים מהם? הסבירו.

7. א. שרטטו שני וקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ על דף נקודות.
ב. שרטטו את הסכום $\underline{a} + \underline{b}$ ואת הסכום $\underline{b} + \underline{a}$
מה מצאתם?

תזכורת

קבוצת איברים עם פעולה בינארית המוגדרת על איבריה היא חבורה חילופית לגבי הפעולה, אם מתקיימים התנאים הבאים.

- הקבוצה סגורה לגבי הפעולה - כלומר, תוצאת הפעולה על כל שני איברים בקבוצה גם היא איבר בקבוצה.
- הפעולה היא קיבוצית.
- בקבוצה קיים איבר ניטרלי לגבי הפעולה.
- לכל איבר בקבוצה יש איבר הופכי שגם הוא בקבוצה, כך שהפעולה בין כל איבר וההופכי לו נותנת כתוצאה את האיבר הניטרלי.
- הפעולה היא חילופית.

8. האם קבוצת כל הווקטורים **במישור** עם פעולת החיבור בין וקטורים היא חבורה חילופית?
הסבירו במילים או/ו בעזרת שרטוט כל שלב בבדיקה שלכם.
אם יש תנאים שאינם מתקיימים, הציגו דוגמאות נגדיות.

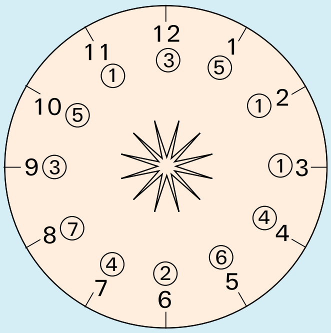
9. נתונה קבוצת כל הווקטורים **על ציר המספרים**, ונתונה פעולת החיבור בין וקטורים.
האם קבוצה זו היא חבורה חילופית?
הסבירו במילים או/ו בעזרת שרטוט כל שלב בבדיקה שלכם.
אם יש תנאים שאינם מתקיימים, הציגו דוגמאות נגדיות.

ג. שעון או לוח שנה?

איזה יום בשבוע?

לפניכם שעון מיוחד...

שעון שנת 2010



המספרים מ־1 עד 12 מייצגים את חודשי השנה:
המספר 1 מייצג את חודש ינואר,
המספר 2 את פברואר, וכן הלאה.
ליד כל מספר המייצג חודש – מופיע עיגול, ובתוכו מספר נוסף.
שעון זה מאפשר לדעת באיזה יום בשבוע חל תאריך מסוים בשנת 2010. כדי לדעת באיזה יום בשבוע חל תאריך כלשהו, למשל 3 במאי 2010, נפעל כך:

- נמצא בשעון את המספר המייצג את החודש (במקרה שלנו המספר 5, המייצג את חודש מאי), ונבדוק איזה מספר מופיע בעיגול שלידו (המספר 6).
- למספר שבעיגול (6) נוסיף את המספר של היום בחודש (בדוגמה שלנו – 3). יתקבל סכום כלשהו (בדוגמה שלנו: 9 = 6 + 3).
- אם הסכום שהתקבל קטן מ־7, הוא מייצג את היום בשבוע (1 = ראשון, 2 = שני וכו').
- אם הסכום גדול מ־7 (כמו בדוגמה) יש לחלקו ב־7, **והשארית** שתתקבל מייצגת את היום. בדוגמה הנתונה: מהפעולה 7 : 9 נקבל 7 עם שארית 2, כלומר התאריך 3 במאי 2010 חל ביום שני. (שימו לב: השארית 0 מייצגת את יום שבת.)

1 מצאו באיזה יום בשבוע בשנת 2010 חל כל אחד מהמועדים האלה:

א. יום הולדתכם
ב. יום ההולדת של אדם הקרוב אליכם
ג. היום הראשון של החופש הגדול – 21 ביוני 2010
ד. היום האחרון של החופש הגדול – 31 באוגוסט 2010
ה. היום הראשון של שנת 2010 – 1 בינואר 2010
ו. היום האחרון של שנת 2010 – 31 בדצמבר 2010 .

2 מה מייצגים המספרים בעיגולים המופיעים בשעון?

3 מדוע לדעתכם יש למצוא את שארית החילוק של הסכום ב־7?

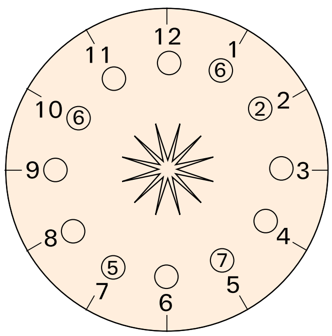
4 א. אילו תאריכים בחודש מרס 2010 חלו בימי שבת?

ב. כמה ימי שבת היו בשנת 2010? (בשנת 2010 היו בסך הכול 365 ימים.)

עוד שנה

5 לפניכם שעון של שנת 2011, ובו רק חלק מהמספרים שבעיגולים.

שעון שנת 2011



א. באיזה יום בשבוע התחילה שנת 2011? בדקו אם תשובתכם מתאימה ליום האחרון של 2010.

ב. מצאו באיזה יום בשבוע חל התאריך 28 בפברואר 2011 (היום האחרון של חודש פברואר).

ג. באיזה יום התחיל חודש מרס בשנת 2011? קבעו איזה מספר יש לכתוב בעיגול ליד חודש מרס (כלומר ליד 3).

ד. השלימו את המספרים החסרים בעיגולים.

ה. מצאו באיזה יום בשבוע בשנת 2011 חל כל אחד מהמועדים האלה:

1. יום הולדתכם
2. יום ההולדת של אדם שקרוב אליכם
3. היום הראשון של החופש הגדול – 21 ביוני 2011
4. היום האחרון של החופש הגדול – 31 באוגוסט 2011
5. היום האחרון של שנת 2011 – 31 בדצמבר 2011.

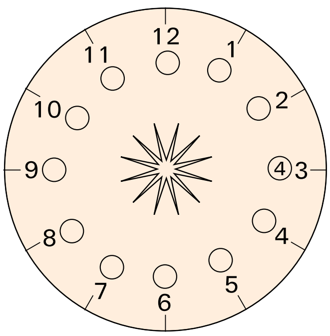
6 כמה ימי שבת היו בשנת 2011? (בשנת 2011 היו בסך הכול 365 ימים.)

7 איזה מספר יכול להיות בעיגול המתאים לחודש ינואר בשנה שיש בה 53 ימי שבת ו־365 ימים בסך הכול?

בונים שעוני שנה

8 במשימה זו תמצאו דרך לבניית שעוני שנה.

שעון שנת 2012



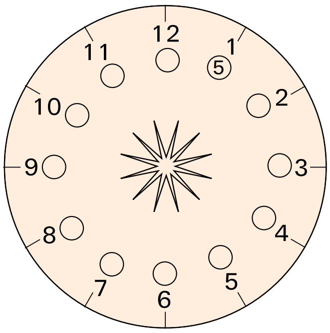
א. השלימו את השעון של שנת 2012. הסבירו ונמקו את שלבי הבנייה. כיצד תבדקו את התוצאה?

שימו לב: בשנת 2012 ישנם 366 ימים.

ב. השוו בין השעון של שנת 2012 שבניתם לבין השעון של שנת 2011 שהשלמתם במשימה הקודמת. הסבירו את התוצאה. האם ההשוואה בין השעונים של השנים 2011 ו־2010 מובילה לאותה תוצאה? הסבירו.

9 בשעון של שנת 2044, בעיגול שליד המספר המתאים לחודש ינואר, מופיע המספר 5 – כמו בשעון שנת 2010.
בשנת 2044 יש 366 ימים.
א. האם לכל החודשים בשעון של שנת 2044 מתאימים אותם המספרים־בעיגולים כמו בשעון של 2010? נמקו.
ב. השלימו את השעון של שנת 2044.

שעון שנת 2044



המאה ה־21

10 בטבלה שבהמשך ניתן לראות באיזה יום בשבוע מתחילה כל אחת מהשנים במאה ה־21.
שנת 2073, למשל, מתחילה ביום א, ושנת 2008 – ביום ג.
א. כתבו את רשימת השנים במאה ה־21 המתחילות בשבת. הסבירו.
ב. בנו שעון המתאים לשנת 2005. היעזרו במידע שבטבלה ובתשובותיכם למשימות הקודמות.
ג. לאילו שנים נוספות מתאים השעון שבניתם לשנת 2005? מה משותף לכל השנים האלה?
ד. הסבירו מדוע השעון שבניתם לשנת 2005 מתאים רק לחלק מהשנים המתחילות בשבת.
בנו שעון המתאים גם לשנים האחרות שמתחילות בשבת.
ה. כתבו את רשימת השנים במאה ה־21 המסתיימות בשבת. הסבירו.
ו. מצאו מהי השנה הקרובה שבה יום הולדתכם יחול בשבת.

היום הראשון של השנה	שנים במאה ה־21
א	06, 12, 17, 23, 34, 40, 45, 51, 62, 68, 73, 79, 90, 96
ב	01, 07, 18, 24, 29, 35, 46, 52, 57, 63, 74, 80, 85, 91
ג	02, 08, 13, 19, 30, 36, 41, 47, 58, 64, 69, 75, 86, 92, 97
ד	03, 14, 20, 25, 31, 42, 48, 53, 59, 70, 76, 81, 87, 98
ה	04, 09, 15, 26, 32, 37, 43, 54, 60, 65, 71, 82, 88, 93, 99
ו	10, 16, 21, 27, 38, 44, 49, 55, 66, 72, 77, 83, 94
ש	00, 05, 11, 22, 28, 33, 39, 50, 56, 61, 67, 78, 84, 89, 95

קיימות שיטות ונוסחאות שונות למציאת היום בשבוע על־פי התאריך, וכולן מתבססות על חשבון של שאריות. אחת משיטות אלו פותחה על־ידי המתמטיקאי האנגלי צ'ארלס דודג'סון (1832–1898), הידוע גם כלואיס קרול, המחבר של "עליסה בארץ הפלאות".

אחרון לבחירתכם

בוחרים מספרים

1. בחרו מספרים במקום המשבצות. קבעו סוגריים במידת הצורך בהתאם למשימה הנתונה.

א. הביטוי: $\square - \square \cdot 2$

המספרים לבחירה: 1, 3 , 4, 6, 9

המשימה: תוצאה **גדולה** ככל האפשר

ב. הביטוי: $\square - \square : 6$

המספרים לבחירה: 1, 4, 6, 8, 9

המשימה: תוצאה **גדולה** ככל האפשר

ג. הביטוי: $\square \cdot \square - 2$

המספרים לבחירה: 2, 3 , 4, 7, 9

המשימה: תוצאה **גדולה** ככל האפשר

ד. הביטוי: $\square : \square - 2$

המספרים לבחירה: 1, 3 , 4, 5, 9

המשימה: תוצאה **גדולה** ככל האפשר

ה.

הביטוי: $4 - \boxed{} : \boxed{}$

המספרים לבחירה: 4, 5, 6, 7, 8

המשימה: תוצאה **גדולה** ככל האפשר

ו.

הביטוי: $\boxed{} : 7 - \boxed{}$

המספרים לבחירה: 1, 3, 5, 8, 9

המשימה: תוצאה **קטנה** ככל האפשר

ז.

הביטוי: $7 \cdot \boxed{} - \boxed{}$

המספרים לבחירה: 3, 4, 5, 8, 9

המשימה: תוצאה **קטנה** ככל האפשר

ח.

הביטוי: $\boxed{} : 4 - \boxed{}$

המספרים לבחירה: 1, 3, 4, 5, 9

המשימה: תוצאה **גדולה** ככל האפשר

ט.

הביטוי: $\boxed{} : 4 - \boxed{}$

המספרים לבחירה: 1, 2, 3, 4

המשימה: תוצאה בין -3 ל- -2.5

בוחרים פעולות או מספרים

2. בחרו אחת מארבע פעולות החשבון, במקום המשבצת, וקבעו זוג אחד של סוגריים לכל היותר, בהתאם למשימה הנתונה.

א. הביטוי: $3 : 9 \square 6 + 5$

המשימה: קרוב ל- 10, ככל האפשר

ב. הביטוי: $9 \cdot 2 \square 7 + 6$

המשימה: קרוב ל- 16, ככל האפשר

ג. הביטוי: $8 \square 0 + 6 \cdot 5$

המשימה: קרוב ל- 25, ככל האפשר

ד הביטוי: $2 - 5 : 9 \square 3$

המשימה: קרוב ל- 2, ככל האפשר

ה. הביטוי: $4 \cdot 7 \cdot 2 \square 9$

המשימה: רחוק מ- 6, ככל האפשר

ו הביטוי: $2 \square 6 \cdot 9 : 7$

המשימה: רחוק מ- 7, ככל האפשר

3. בחרו מספר שלם מבין המספרים 0 עד 9, וקבעו זוג אחד של סוגריים לכל היותר, בהתאם למשימה הנתונה.

א. הביטוי: $8 + 6 + 9 : \square$

המשימה: קרוב ל- 6, ככל האפשר

ב. הביטוי: $0 : \square \; 1 \cdot 2 \cdot 6$

המשימה: קרוב ל- 16, ככל האפשר

ג. הביטוי: $4 + 7 \cdot 6 \cdot \square$

המשימה: רחוק מ- 18, ככל האפשר

ד הביטוי: $3 - 4 + \square \cdot 9$

המשימה: קרוב ל- 20, ככל האפשר

ה. הביטוי: $2 - 7 - 3 \cdot \square$

המשימה: קרוב ל- (‎-10), ככל האפשר

ו הביטוי: $7 : 2 + \square \cdot 6$

המשימה: בין 20 ל- 22

4. בחרו מספר שלם מבין המספרים 9- עד 9, וקבעו זוג אחד של סוגריים לכל היותר, בהתאם למשימה הנתונה.

א. הביטוי: $\boxed{} + 2 - 8 : 5$

המשימה: קרוב ל- 6, ככל האפשר

ב. הביטוי: $8 - \boxed{} + (-6) \cdot (-3)$

המשימה: קרוב ל- 30, ככל האפשר

ג. הביטוי: $1 + \boxed{} \cdot 4 + (-7) : (-6)$

המשימה: קרוב ל- $\frac{1}{2}$, ככל האפשר

הידעתם?

חלק מן המשימות בפעילות זו הן למצוא מספרים שהצבתם תיתן תוצאה גדולה ביותר (מקסימום) או קטנה ביותר (מינימום) מבין מספרים נתונים (כלומר, תחת אילוצים).

משימה כזו היא משימה נפוצה בחיי יומיום. התחום המתמטי העוסק בכך נקרא **תכנון ליניארי**. זהו תחום חדש במתמטיקה שימושית שנוצר במאה העשרים על-ידי ג'ורג' דנציג (George Dantzig, 1914 - 2005) במטרה לעזור לצבא האמריקאי בפתרון בעיות שנוצרו במלחמת העולם השנייה.

דוגמה לבעיה בתחום התכנון הליניארי:

קיימים סוגים שונים של פריטי מזון שניתן להכניס לדיאטה, וסוגים שונים של אבות מזון שיש להביא בחשבון בעת בניית הדיאטה: ויטמינים, חלבונים, מינרלים והערך הקלורי של כל פריט מזון. מטרתנו בבניית הדיאטה היא לבחור את **כמות** המזון מכל סוג שיש לצרוך, כך שכמות אבות המזון שנצרכים במהלך הדיאטה גדולה מסף מינימלי כלשהו, ותחת אילוץ זה להביא למינימום את כמות הקלוריות שנצרכת במהלך הדיאטה.

חידה - קסם מספר הטלפון

התחילו בחישוב:

1. הכניסו את שלושת המספרים הראשונים של מספר הטלפון שלכם בבית (ללא קידומת)
2. הכפילו ב- 80
3. הוסיפו 1
4. הכפילו הכל ב-250
5. הוסיפו את 4 הספרות הנוספות של מספר הטלפון
6. הוסיפו את 4 הספרות הנוספות של מספר הטלפון - פעם נוספת
7. הפחיתו מהתוצאה 250
8. חלקו הכל ב-2

מה סוד הקסם?

עוד חידה

איך אפשר ליצור את המספר 200 באמצעות הספרות 1,2,3,4,5?

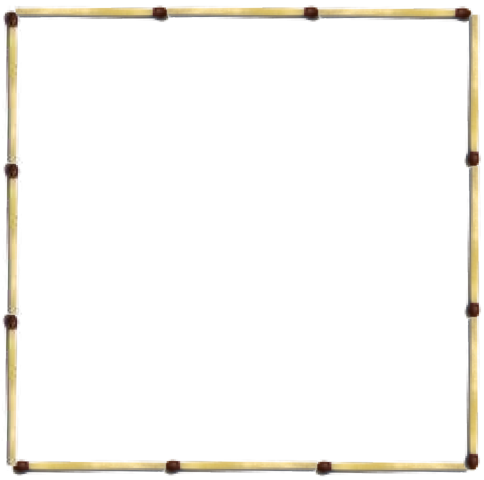
מותר להשתמש בכל מספר פעם אחת, בסוגריים ובכל פעולות החשבון. רמז: השתמשו גם בחזקה.

כמה ריבועים אפשר לבנות מ־16 גפרורים?

1 בנו ריבועים מ־16 גפרורים לפי הנדרש בכל סעיף. אסור לשבור את הגפרורים!
סרטטו את כל הריבועים שבניתם.
א. ריבוע אחד.
ב. שני ריבועים. מצאו דרך אחרת לבנות שני ריבועים.
ג. 3 ריבועים. מצאו דרך אחרת לבנות 3 ריבועים.
ד. 4 ריבועים. מצאו דרך אחרת לבנות 4 ריבועים.
ה. 5 ריבועים. מצאו דרך אחרת לבנות 5 ריבועים.
ו. נסו לבנות 6 ריבועים.

מצולעים מ־12 גפרורים

2 הריבוע שלפניכם בנוי מ־12 גפרורים. שטחו שווה ל־9 יחידות "גפרור ריבועי".



א. בנו מלבנים שונים מ־12 גפרורים.
סרטטו את המלבנים שבניתם.
ב. מצאו את שטחו של כל מלבן.
ג. בנו צורה כלשהי (לאו דווקא מלבן) מ־12 גפרורים
לפי השטח הנתון בכל סעיף:
1 4 "גפרורים ריבועיים"
2 5 "גפרורים ריבועיים"
3 6 "גפרורים ריבועיים"

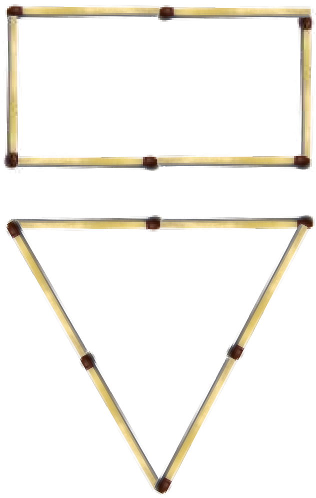
מלבנים מ־36 גפרורים

3 בנו מלבן מ־36 גפרורים לפי השטח הנתון בכל סעיף.
אם הצלחתם – רשמו את מידות המלבן. אם לא הצלחתם – הסבירו מדוע.
א. 32 "גפרורים ריבועיים"
ב. 64 "גפרורים ריבועיים"
ג. 65 "גפרורים ריבועיים"
ד. 77 "גפרורים ריבועיים"
ה. 81 "גפרורים ריבועיים"
ו. 84 "גפרורים ריבועיים"

4 מצאו את כל המלבנים השונים שניתן לבנות מ־36 גפרורים. כתבו את מידותיהם.
איזה מהמלבנים הוא בעל השטח הגדול ביותר?

מצולעים משישה גפרורים

5 משישה גפרורים אפשר לבנות מצולעים שונים. לפניכם שניים מהם.



א. האם שני המצולעים שווים בשטחם?
אם לא – מהו המצולע ששטחו גדול יותר? נמקו!

ב. נסו לבנות משולשים שונים מגפרורים.
נמקו את הטענה: "כל צלע במשולש קטנה מסכום שתי הצלעות האחרות."

ג. האם אפשר לבנות משישה גפרורים משולש שאינו שווה־צלעות?
אם הצלחתם – סרטטו את המשולש. אם לא – הסבירו מדוע.

ד. האם אפשר לבנות משישה גפרורים מלבן שונה מהמלבן הנתון?
נמקו את תשובתכם.

ה. בנו משישה גפרורים מרובעים שונים שאינם מלבנים.
סרטטו את המרובעים שבניתם ותארו אותם.

ו. בנו משישה גפרורים מצולעים שונים. סרטטו את המצולעים שבניתם.
נסחו תכונה המתאימה לצלעות של מצולע כלשהו (בדומה לתכונה של צלעות המשולש המופיעה בסעיף ב).

משולשים ומרובעים משמונה גפרורים

6 א. בכל סעיף נסו לבנות משולש משמונה גפרורים לפי הנדרש. סרטטו את המשולש שבניתם.
אם יש כמה אפשרויות – סרטטו את כולן.
אם אי־אפשר לבנות את המשולש הנדרש משמונה גפרורים – הסבירו מדוע.

1 משולש שווה־צלעות 2 משולש שווה־שוקיים שאינו שווה־צלעות 3 משולש שונה־צלעות

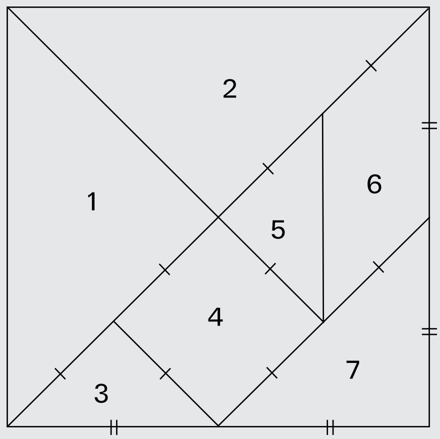
ב. כתבו את כל האפשרויות של אורכי צלעות של משולשים הבנויים משמונה גפרורים.

7 א. מה יכול להיות אורך הצלע הארוכה במרובע הבנוי משמונה גפרורים?
כתבו את כל האפשרויות של אורכי צלעות של מרובעים הבנויים משמונה גפרורים.
הסבירו מדוע אין אפשרויות נוספות.

ב. בכל סעיף נסו לבנות מרובע משמונה גפרורים לפי הנדרש. סרטטו את המרובע שבניתם.
אם יש כמה אפשרויות – סרטטו את כולן.
אם אי־אפשר לבנות את המרובע הנדרש משמונה גפרורים – הסבירו מדוע.

1 מלבן 4 דלתון קמור
2 מעוין 5 דלתון קעור
3 טרפז 6 מרובע משלכם מסוג אחר

ב. טנגרם



לפניכם תַּצְרֵף (פאזל) סיני עתיק הנקרא טנגרם.
טנגרם הוא ריבוע המחולק ל־7 חלקים
(חמישה משולשים בגדלים שונים, מקבילית וריבוע)
כמו בסרטוט.
כל חלק של הטנגרם נקרא טָן.

כיצד בנוי טנגרם?

1 א. השתמשו באחד הריבועים שבדף הגזירה "טנגרם" (בסוף החוברת) ונסו לבנות טנגרם
כמו בסרטוט שלמעלה. רשמו את שלבי החלוקה ובצעו אותם.
כתבו בכל טן את מספרו וגזרו את הטנים.
ב. נסו למצוא דרכים נוספות לבניית טנגרם. תארו אותן ובצעו.
ג. כתבו את כל התכונות הגאומטריות שבהן נעזרתם כשבניתם את הטנגרם.
(ישרים מקבילים או מאונכים, קטעים שווים וכדומה.)

מהם חלקי הטנגרם?

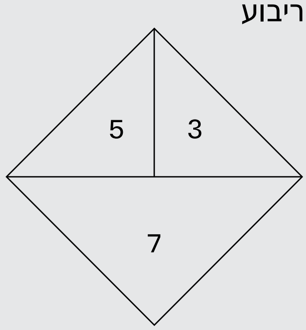
2 א. קבעו מהו סוג המצולע של כל טן בטנגרם. הסבירו את תשובתכם על סמך הדרך
שבניתם את הטנגרם במשימה 1. האם בין הטנים יש צורות חופפות? מהן?
ב. מצאו את גודלי הזוויות של כל טן. הסבירו על סמך הבנייה.
ג. נגדיר את צלע הריבוע המקורי כיחידת אורך. מצאו את השטח של כל טן.
האם בין הטנים יש צורות שוות־שטח? מהן? נמקו.
ד. אם בסעיף הקודם מצאתם זוג טנים שווי־שטח שאינם חופפים,
נסו לחלק אותם לחלקים חופפים.
ה. הרכיבו מהטנים שני מרובעים שווי־שטח שאינם חופפים.
הציגו אפשרויות שונות.

בונים צורות מטנים

3 השתמשו בטנים שגזרתם במשימה 1.
בכל סעיף בנו את הצורה המבוקשת, וסרטטו אותה כך שיהיה ברור באילו טנים השתמשתם בבנייה.
הסבירו מדוע התקבלה הצורה המבוקשת.
כתבו מהו שטח הצורה.

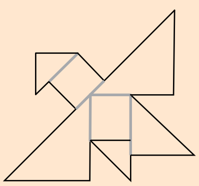
א. טרפז שווה־שוקיים
ב. טרפז שאינו שווה־שוקיים
ג. מחומש קמור
ד. מחומש קעור
ה. משושה קמור
ו. משושה קעור

דוגמה ריבוע

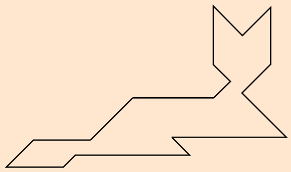


4 א. בנו כל אחת מהצורות שלפניכם מ־7 הטנים. סמנו בסרטוט את חלוקת הצורה לטנים.
ב. לאיזו מהצורות יש ההיקף הגדול ביותר? סדרו את הצורות לפי היקפיהן מהקטן לגדול.
ג. לאיזו מהצורות יש השטח הגדול ביותר? סדרו את הצורות לפי שטחיהן מהקטן לגדול.

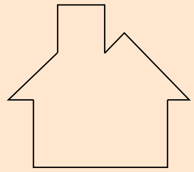
דוגמה


ציפור

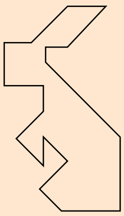
1


חתול

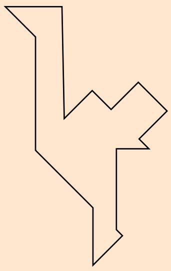
2


ביתן

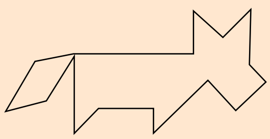
3


ארנב

4


יען

5


כלב

משלימים לוחות

כללי המשחק:
לפניכם לוח 3 × 3. בכל משבצת של הלוח כתובה הספרה 0.
לוח כזה נקרא "לוח אפס".
בכל שלב של המשחק בוחרים לוח 2 × 2 מהלוח הנתון,
ולכל מספר הרשום בו מחברים את המספר 1.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

1 ארנון כתב בשלב הראשון לוח כזה:

1	1	0
1	1	0
0	0	0

בשלב השני התקבל הלוח שלפניכם:

1	1	0
1	2	1
0	1	1

א. איזה לוח 2 × 2 בחר ארנון בשלב השני?

ב. כתבו את כל האפשרויות
שיכולות להתקבל
בשלב השלישי.

ג. בחרו את אחד הלוחות מסעיף ב. המשיכו וכתבו עבורו אפשרויות לשלושת השלבים הבאים.
השתמשו ב**דף הלוחות** המופיע בסוף החוברת.

ד. לפניכם לוחות שכתבה שירה.
שירה שמה לב שבשורה הראשונה של כל אחד
מהלוחות שהיא השלימה, הסכום של שני
המספרים הקיצוניים שווה למספר האמצעי.
האם הקשר הזה מתקיים גם בלוחות שלכם?
האם הקשר הזה מתקיים בכל לוח כזה?
הסבירו מדוע.

4	5	1
6	10	4
2	5	3

$4 + 1 = 5$

1	3	2
3	5	2
2	2	0

$1 + 2 = 3$

3	5	2
6	9	3
3	4	1

$3 + 2 = 5$

ה. נסו למצוא קשרים נוספים בין המספרים בכל הלוחות שלכם.
האם הקשרים שמצאתם מתקיימים בכל הלוחות האפשריים במשחק הזה?

כיצד להגיע ללוח הנתון?

2 א. איציק התחיל למלא לוח אפס וביצע 5 שלבים.
מה אפשר לדעת על הלוח שקיבל איציק?
נסו לכתוב בלוח שלפניכם את המספרים שהתקבלו בשלב החמישי.

ב. בכל סעיף נתון לוח.
האם ייתכן שאיציק קיבל את הלוח הזה
בשלב כלשהו? אם לא – הסבירו מדוע.
אם כן – ציינו באיזה שלב התקבל הלוח,
וכתבו דרך אפשרית להגיע ללוח הנתון.
אם יש דרכים נוספות – תארו אותן.

1

2	3	1
4	6	0
2	3	5

2

2	1	1
1	5	4
1	2	3

3

1	3	2
1	5	4
0	2	2

ג. לכל לוח נתון קבעו באיזה שלב
במשחק הוא נכתב, וכתבו דרך
אפשרית להגיע אליו.
אם יש דרכים נוספות – תארו אותן.

1

1	4	3
3	7	4
2	3	1

2

2	5	3
5	9	4
3	4	1

3

4	6	2
5	8	3
1	2	1

ד. בכל סעיף נתון לוח.
האם ניתן לקבל את הלוח הזה
בשלב כלשהו של המשחק?
אם לא – הסבירו מדוע.
אם כן – כתבו דרך אפשרית
להגיע ללוח הנתון.

1

1	3	2
3	4	1
2	1	2

2

2	7	5
5	6	7
2	2	2

3

0	4	4
2	7	5
2	3	1

3 משחק זוגות – ״להגיע למספרים״

הוראות המשחק: מתחילים בלוח אפס. כל שחקן בתורו רושם מספרים בלוח לפי כללי המשחק המופיעים בעמ׳ 15.
מטרת שחקן **א** היא ליצור בלוח את צירוף המספרים הנתון.
מטרת שחקן **ב** היא למנוע זאת ממנו.

1

	7	
5		

2

7		5

א. שחקו את המשחק במטרה ליצור את לוח 1.
- האם יש לשחקן א אסטרטגיה מנצחת? נמקו.
- האם יש לשחקן ב אסטרטגיה מנצחת? נמקו.

ב. החליפו תפקידים ושחקו את המשחק במטרה ליצור את לוח 2.
לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת במשחק זה?

לשחזר מספרים חסרים בלוח

1	3	2
2		2
1	1	0

3	5	2
7	10	3
		1

4 א. אחרי ארבעה שלבים קיבל דני את הלוח שלפניכם.
הציעו דרך למצוא את המספר המחוק בלוח.
האם אפשר למצוא את המספר בלי לשחזר את שלבי המשחק? הסבירו.

ב. רינה ביצעה מספר שלבים וקיבלה את הלוח שלפניכם.
נסו לשחזר את המספרים המחוקים.

5 משחק זוגות – ״לשחזר מספרים בלוח״

כל תלמיד בונה לעצמו 10 לוחות, שלב אחרי שלב, לפי כללי המשחק המופיעים בעמ׳ 15.
בכל לוח כדאי לבצע מספר שונה של שלבים.
שחקן א מחליט כמה מספרים חסרים הוא מוכן לשחזר בלוח של שחקן ב.
שחקן ב מוחק את המספרים בלוח בהתאם להחלטה של שחקן א, ומראה את הלוח לשחקן א.
שחקן א צריך לגלות מהם המספרים שנמחקו. עבור כל מספר נכון שגילה הוא מקבל נקודה אחת.
לאחר מכן השחקנים מתחלפים בתפקידים.
השחקן שקיבל נקודות רבות יותר הוא המנצח.
המנצח הכיתתי הוא השחקן שקיבל את מרב הנקודות.
נקודות למחשבה לפני תחילת המשחק:
- כמה מספרים כדאי שהשחקן יחליט למחוק?
- היכן כדאי למחוק מספרים בלוח?

משתמשים במשתנים

6 בלוח שלפניכם המספרים בפינות הלוח מסומנים באמצעות המשתנים a, b, c, d.

b		a
c		d

א. השלימו את הלוח: בטאו את המספרים במשבצות הריקות באמצעות המשתנים a, b, c, d.

ב. בטאו באמצעות המשתנים a, b, c, d את הסכום של כל המספרים בטבלה.
האם ייתכן שהסכום יהיה שווה ל־8? ל־11? ל־26?
אם לא – הסבירו מדוע.
אם כן – כמה שלבים צריך לבצע כדי לקבל את הסכום הזה?

7

b	a	
	c	
		d

א. השלימו את הלוח: בטאו את המספרים במשבצות הריקות באמצעות המשתנים a, b, c, d.

ב. האם ייתכן ש־ $a = 7$, $b = 8$, $c = 0$, $d = 11$?
אם לא – הסבירו מדוע.
אם כן – כמה שלבים צריך לבצע כדי לקבל לוח זה?

ג. האם ייתכן ש־ $c = a + b$? הסבירו את תשובתכם.

8

b	d	
a	c	k

א. איזה מהמשתנים a, b, c, d, k בלוח שלפניכם מייצג את המספר הגדול ביותר?
איזה משתנה מייצג את המספר הקטן ביותר?

ב. השלימו את הלוח. בטאו את המספרים במשבצות הריקות באמצעות המשתנים a, b, c, d, k.

ג. כתבו קשרים רבים ככל האפשר בין המשתנים a, b, c, d, k.

דף גזירה "טנגרם"

דף לוחות