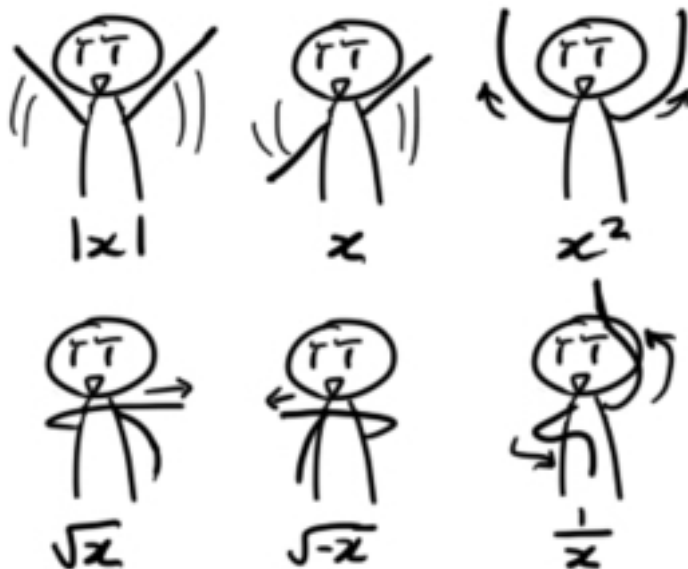


הרחבת עולם הפונקציות

הזזות ומתיחות

למורה



פיתוח : המרכז הארצי למתמטיקה בחינוך העל יסודי

קישור לקובץ http://highmath.haifa.ac.il/kita_madait/transformations.pdf

פורסם באתר מרכז המורים: <http://highmath.haifa.ac.il>

כתובת המערכת

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל-יסודי

הפקולטה לחינוך אוניברסיטת חיפה

הר הכרמל חיפה, 31905

טל. 04-8288351, פקס:

04-8240757

דוא"ל: hmathcntr@edu.haifa.ac.il

חלק מהמשימות מבוססות על פעילויות

ומפיצוחים שפותחו על ידי **המרכז הארצי למתמטיקה בחינוך העל יסודי**,

<http://highmath.haifa.ac.il>

בנוסף יש הפניות לפעילויות באתרים אלו.

יצא לאור במימון האגף למדעים במזכירות הפדגוגית
ומינהלת מל"מ המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי
© כל הזכויות שמורות למשרד החינוך



מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט



אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך



משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
אגף מדעים

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

* הסקירה הבאה נשענת על עבודת התזה של גאולה סבר לקראת תואר M.A בהנחייתה של פרופ' מיכל ירושלמי, החוג לחינוך מתמטי, אוניברסיטת חיפה.

אחת המטרות בפיתוח חשיבה מתמטית בבית הספר העל יסודי היא להביא את התלמיד להבין פונקציות ולפעול על פונקציות באופן חופשי ואינטואיטיבי כך שיוכל להשתמש במושג הפונקציה בענפי המתמטיקה השונים. אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus, 1994) קוראים לאינטואיציות ולתובנות לגבי תכונות של פונקציות ופעולות עליהן "חוש לפונקציות". הם טוענים כי צריך וניתן לטפח "חוש לפונקציות" אצל תלמידים. חוש לפונקציות דורש, לדעתם, הבנה במספר היבטים:

- הבחנה בין משתנים תלויים ובלתי תלויים.
 - השתנות (variation) והשתנות הדדית של שני משתנים (covariation).
 - השתנות של השתנות (קצב גדילה).
 - הבנה של האפקט של פעולות שונות על פונקציות.
- טרנספורמציות הן כלי מתמטי ליצירת משפחה של פונקציות. הן מעודדות להסתכל על הפונקציה כדוגמה או כפרט במשפחה ומהוות כלי לנוע בין הפונקציות בתוך המשפחה.
- "חוש לפונקציות" כולל את היכולת לשייך פונקציה למשפחה שלה ולזהות את התכונות המשותפות למשפחה (Confrey, 1994) והטרנספורמציות הן כלי לנוע בין הפונקציות בתוך המשפחה.
- על התלמידים:

- להכיר מאגר של פונקציות בסיסיות, לדעת את הנוסחה האלגברית וצורת הגרף המתאימה להן.
- להיות בעלי יכולת להפעיל סדרה של טרנספורמציות על פונקציה הבסיס כדי ליצור פונקציה חדשה.
- להיות מסוגלים לנתח כל פונקציה, מורכבת ככל שתהיה. לזהות בה את פונקציה הבסיס ואת סידרת הטרנספורמציות שהופעלה עליה ובכך לשחזר את תהליך בנייתה.

תלמיד שפיתח יכולות להבין ולדמיין טרנספורמציות על פונקציות בייצוגן הגרפי והאלגברי ומהה פונקציה כשייכת למשפחה, יוכל להשתמש בטרנספורמציות ככלי שימושי כמעט בכל נושא הנוגע לפונקציות, כגון הכרות עם משפחות שונות של פונקציות, גזרות, מניפולציות אלגבריות ועוד.

מהן טרנספורמציות של פונקציות?

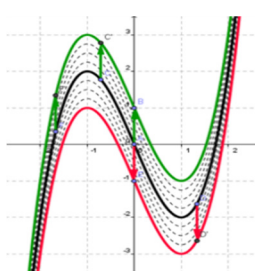
טרנספורמציות של פונקציות הן פעולות על פונקציות היוצרות משפחה של פונקציות בעלות תכונות משותפות שלא משתנות תחת הטרנספורמציה (invariant). כלומר הטרנספורמציה שומרת על תכונות מסוימות של הפונקציה, למשל, סוג הגידול של הפונקציה (ליניארי, ריבועי, טריגונומטרי וכד'), ובאותה עת משנה תכונות אחרות כגון קצב הגדילה, או ערכים מיוחדים.

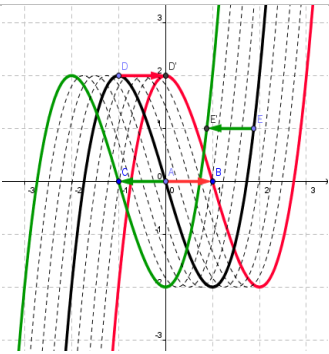
ביחידה זו נעסוק בטרנספורמציות ליניאריות, דהיינו הרכבה של פונקציות ליניאריות על התחום והטווח של פונקצית הבסיס $g(f(x)) = Af(Bx + C) + D$ כאשר A, B, C, D הם פרמטרים.

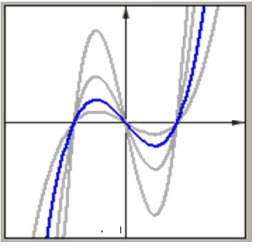
נעסוק כאן בארבעה סוגים יסודיים של טרנספורמציות ליניאריות:

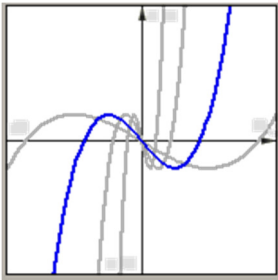
- הזזה אופקית
- מתיחה אופקית
- מתיחה אנכית
- הזזה אנכית

ביחידה זו יתנסו התלמידים בארבעה סוגים אלה של טרנספורמציות של פונקציות ולכן נציג כאן כיצד באה לידי ביטוי כל אחת מהטרנספורמציות בייצוגים השונים ובפונקציה המורכבת (לאחר הטרנספורמציה).

הזזה אנכית		
הייצוג	תיאור ההזזה אנכית	
סימבולי	תוספת של קבוע לאיבר החופשי של הפונקציה.	$g(x) = f(x) + k$
הגרף	צורת הגרף נשמרת ומוזזת באופן קשיח לאורך ציר ה-y, כך שנשמר מרחק אנכי קבוע בין הגרפים של הפונקציות. אם $k > 0$ ההזזה היא כלפי מעלה, אם $k < 0$ ההזזה היא כלפי מטה. מכאן שנקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר y היא: $(0, f(0) + k)$	
טבלת הערכים	תוספת של הקבוע לערך הפונקציה, בטור $f(x)$.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה-x נשאר קבוע ושיעור ה-y גדל/קטן בערך קבוע.	קבוע $-k$ $(x, y) \rightarrow (x, y + k)$
$y = Af(Bx + C) + D$	D מבטא הזזה אנכית ב- D יחידות.	

הזזה אופקית		
סימבולי	תוספת של קבוע לארגומנט של הפונקציה.	$g(x) = f(x+k)$
הגרף	צורת הגרף נשמרת ומוזזת באופן קשיח אופקית על ציר ה- x , כך שנשמר מרחק אופקי קבוע בין הפונקציות. אם $k > 0$ ההזזה היא שמאלה, אם $k < 0$ ההזזה היא ימינה. הזזה אופקית ב- $(-k)$ יחידות. מכאן שנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא $(-k, 0)$ (בהנחה שנקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $(0, 0)$).	
טבלת הערכים	תוספת של קבוע למקור, תוספת בטור של ה- x , והפעלת הפונקציה על המקור החדש.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- y נשאר קבוע, ושיעור ה- x גדל, קטן בערך קבוע.	קבוע k - $(x, y) \rightarrow (x-k, y)$
	C אחראי על ההזזה אופקית אבל לא לבדו, אלא תלוי גם ב- B . גורם ההזזה האופקית הוא: $\left(\frac{-C}{B}\right)$ יחידות.	$y = Af(Bx+C)+D$

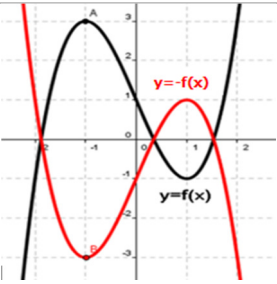
מתיחה אנכית		
סימבולי	הכפלת הפונקציה בקבוע.	$g(x) = k \cdot f(x)$
הגרף	צורת הגרף של הפונקציה המקורית נמתחת או מתכווצת לגובה לאורך ציר y . ככל שערכי $ k $ גדולים יותר הגרף נראה "גבוה וצר" יותר. עבור $0 < k < 1$ הגרף מתכווץ לאורך ציר y . k שלילי גורם בנוסף למתיחה/כיווץ גם לשיקוף ביחס לציר ה- x .	
טבלת הערכים	ערך הפונקציה מוכפל בקבוע בטור $f(x)$.	
נקודות	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- x נשאר קבוע, ושיעור ה- y גדל/קטן פי הערך של הקבוע.	קבוע k : $(x, y) \rightarrow (x, ky)$
	A מבטא מתיחה אנכית.	$y = Af(Bx+C)+D$

מתיחה אופקית		
$g(x) = f(kx)$	הכפלה של ארגומנט הפונקציה בקבוע.	סימבולי
	צורת הגרף נמתחת או מתכווצת לרוחב לאורך ציר x. ככל שערכי k גדולים יותר הגרף מתכווץ. כלומר נראה "צר" יותר. עבור $0 < k < 1$ הגרף נמתח לאורך ציר x, מתרחב. k שלילי גורם בנוסף למתיחה גם לשיקוף ביחס לציר ה- y.	הגרף
	הכפלת הקבוע היא לארגומנט הפונקציה, בטור של ה- x ורק אחר-כך מופעלת הפונקציה.	טבלת הערכים
קבוע k - $(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{k}, y\right)$	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- y נשאר קבוע, ושיעור ה- x גדל/קטן פי הערך של הקבוע.	נקודות
	B מבטא את המתיחה האופקית, כאשר גורם המתיחה הוא $\frac{1}{B}$.	$y = Af(Bx + C) + D$

שני מקרים פרטיים של מתיחות:

גורם המתיחה (-1)

כפי שצוין קודם, גורם מתיחה שלילי מפעיל גם טרנספורמציות שיקוף כאשר ציר השיקוף הינו אחד מצירי המערכת. גורם המתיחה השלילי השונה מ- (-1) "מסתיר" את העובדה הזו. לכן מעניין לבדוק שני מקרים פרטיים של מתיחות, בהם גורם המתיחה שווה ל- (-1).

מתיחה אנכית – הכפלת פונקציה ב- (-1)		
$g(x) = -f(x)$ $g(x) = -1f(x)$	כפל הפונקציה ב- (-1).	סימבולי
	צורת הגרף נשמרת, אך הגרף משתקף ביחס לציר ה- x . תחומי עליה וירידה של הפונקציה מתחלפות.	הגרף
	ערך הפונקציה מוכפל ב- (-1) בטור $f(x)$.	טבלת הערכים
קבוע 1- יוצר העתקה $(x, y) \rightarrow (x, -y)$	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- x נשאר קבוע, ושיעור ה- y מתחלף לנגדי שלו.	נקודות
	$A = -1$ מבטא את השיקוף ביחס לציר השיקוף $y = 0$.	$y = Af(Bx + C) + D$ $y = -f(Bx + C) + D$

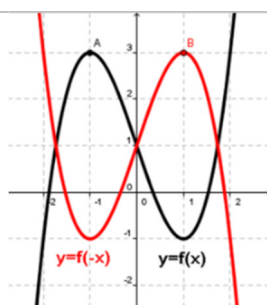
סימבולי

$$g(x) = f(-x)$$

$$g(x) = f(-1x)$$

הכפלת ארגומנט הפונקציה ב- (-1).

הגרף



צורת הגרף נשמרת והגרף משתקף ביחס לציר ה- y .
תחומי עליה וירידה של הפונקציה מתחלפים.

טבלת הערכים

הכפלה ב- (-1) היא לארגומנט הפונקציה, בטור של ה-
 x ורק אחר-כך מופעלת הפונקציה.

נקודות

כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- x מתחלף בנגדי
שלו. שיעור ה- y נשאר קבוע.
קבוע 1- יוצר העתקה
 $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

$B = -1$ מבטא את השיקוף ביחס לציר השיקוף
 $x = 0$.

$$y = Af(Bx + C) + D$$

$$y = Af(-x + C) + D$$

החשיבות בסדר הפעלה של מספר טרנספורמציות

כאמור יש להבחין בין הפעולות החיבוריות הגורמות להזזת גרף הפונקציה ולפעולות הכפוליות שגורמות למתיחתו. כמו כן יש משמעות האם הפעולה נעשית על הארגומנט (מקור הפונקציה, שיעור ה- x) או הפעולה על הגרף היא אופקית, או על ערכה (שיעור ה- y) או הפעולה על הגרף היא אנכית. כאשר אנו מפעילים מספר טרנספורמציות בזו אחר זו, יש להפעיל קודם את הטרנספורמציות האופקיות (המופעלות על הארגומנט) ורק אחר כך את הטרנספורמציות האנכיות. מבחינת סדר הפעולות, קודם מזיזים אופקית ואחר-כך מכווצים/מותחים אופקית. רק לאחר מכן מותחים אנכית, ובסוף מזיזים אנכית.

הזזה	טרנספורמציה אופקית	טרנספורמציה אנכית
1	4	
2	3	

כך לדוגמה, בהעתקה של גרף הפונקציה $f(x)$ ל- $g(x) = 2f(3x+1)+5$ יש לבצע את סדרת הטרנספורמציות בסדר הבא:

1. הזזה אופקית 1 שמאלה.
2. מתיחה אופקית בגורם של 3, כלומר כיווץ הפונקציה (פי $\frac{1}{3}$).
3. מתיחה אנכית פי 2.
4. הזזה אנכית ב- 5.

יש לעודד את התלמידים לבצע הצבות בפונקציה כזו ולבחון את סדר החישוב שלמעשה קובע את סדר הפעלת הטרנספורמציות (או סדר הרכבת הפונקציות).

היסטוריה של טרנספורמציות על קצה המזלג

לפני המאה ה-17 שלטו במתמטיקה שני תחומים נרחבים ונפרדים: הגיאומטריה הסינטטית שמקורה אצל היוונים והאלגברה שמקורה אצל הערבים. דקארט (1596-1650), היה החלוץ שהציע לקשר בין בעיות גיאומטריות עם משוואות אלגבריות באמצעות הצגה של קואורדינאטות. יחד עם התפתחות מושג הפונקציה במאה ה-17 וה-18 התרחב השימוש בגיאומטריה של טרנספורמציות. טרנספורמציה הוגדרה כפונקציה, העתקה מקבוצה לעצמה. טרנספורמציה של פונקציות תוארה כהתאמה בין נקודות שעל פונקצית המקור לבין נקודות על הפונקציה המועתקת. כלומר, התאמה בין זוגות סדורים המציינים את הקואורדינאטות של הנקודות. באותה עת חקרו את קבוצת הטרנספורמציות אשר שומרות על הצורה. קבוצות של טרנספורמציות שונות הביאו לפיתוח גיאומטריות נוספות מעבר לגיאומטריה האוקלידית כמו הגיאומטריה ההיפרבולית והגיאומטריה הפרויקטיבית.

הקשר בין גיאומטריה, תורת הקבוצות ופונקציות הוכרז בתוכנית ארלנגן של פליקס קליין (1849-1925). הגיאומטריה הוגדרה כחקר של תכונות המרחב שלא משתנות (invariant) תחת קבוצה של טרנספורמציות. תוכנית ארלנגן שינתה את פני הגיאומטריה מתפיסה בה העצמים בגיאומטריה (כמו נקודות, קווים, משולשים מעגלים וכו') מציינים מקום או צורה, לעיסוק בתורת הקבוצות ובמושגים של העתקות ו"בלתי משתנה" (invariance) תחת טרנספורמציה.

תוכנית ארלנגן הולידה בין היתר את הגדרת הגיאומטריות תחת הטרנספורמציות הבאות:

טרנספורמציה אוקלידית כוללת הזזה, סיבוב ושיקוף. טרנספורמציה אוקלידית משנה את המיקום והכיוון של העצם המשתנה. הצורה אינה משתנה, הזוויות והאורכים נשמרים. ישר מועתק לישר, מעגל מועתק למעגל.

טרנספורמציה אפינית (Affine) מכלילה את הטרנספורמציה האוקלידית. תחת טרנספורמציה אפינית ישרים מועתקים לישרים אך מעגל מועתק לאליפסה. היא שומרת את כל הנקודות המועתקות על אותו ישר ועל אותו יחס של המרחקים בין הנקודות. האורך והזווית של העצם אינם נשמרים.

בתכנית הלימודים לכיתה ט' מטפלים בטרנספורמציות האפיניות **הזזה ומתיחה** של פונקציות בלבד ומבחינים בין טרנספורמציות אופקיות ואנכיות. ישנן טרנספורמציות בגיאומטריות אחרות המתנהגות אחרת, למשל: **טרנספורמציה פרויקטיבית** היא כללית יותר. יכולה להעתיק מספר סופי של נקודות לאינסוף ולהפך. בטרנספורמציה זו צורת העצם מתעוותת ואינה נשמרת. ישנן גם טרנספורמציות של

$$\text{פונקציות שאינן גיאומטריות, שבהן לא נעסוק כאן כגון: } g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

קשיים בתפיסה של טרנספורמציות

לימוד הטרנספורמציות של פונקציות נועד לפתח אצל התלמיד את החוש לפונקציות ולאפשר לו פתרון בעיות בתחומים שונים. עם זאת נסקור כעת מספר קשיים שהוצגו בספרות. הכרת הקשיים תהווה בסיס ליצירת מערך הוראה מתאים.

תנאי מקדים להבנת הטרנספורמציות:

קושי אחד בלימוד נושא הטרנספורמציות של פונקציות עולה כאשר נשוא הפעולה, מושג הפונקציה, אינו מופנם כראוי. אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus, 1994) טוענים שלתלמידים צריכה להיות התנסות מוקדמת עם סוג הפונקציות עליהן הם מפעילים את הטרנספורמציות והכרות עם תכונותיהן בייצוג הגרפי ובייצוג הסימבולי כמו גם היכולת לקשר בין הייצוגים. לראיה, הם מצאו שתלמידים שלמדו את הפונקציה הריבועית בהרחבה, הצליחו לבנות את התבנית $g(x) = a(x-d)^2 + e$ ולנתח את השפעת הפרמטרים על הגרף, אך לא הצליחו לזהות ולבנות טרנספורמציות של פונקציות מסוגים אחרים.

Baker, Hemenway & Trigueros (2000) בדקו אצל תלמידיהם את רמת ההבנה של מושג הפונקציה לפי הגישה של APOS (Action-Process-Object-Schema). על-פי גישת APOS בתחילה התלמיד תופס את המושג כפעולה, בהמשך כהליך המתאר את הפעולה, וברמה הגבוהה תופס את המושג כאובייקט העומד בפני עצמו. הם מצאו שהתלמידים הצליחו יותר בטרנספורמציות על פונקציות ליניאריות וריבועיות מאשר על פונקציות אחרות. הסיבה לכך, לדבריהם, שהתלמידים למדו בעבר פונקציות אלו בהרחבה ורמת הבנתם את פונקציות הישר והפרבולה הייתה ברמת תהליך-אובייקט. לעומת זאת, עבור פונקציות אחרות, התלמידים גילו קשיים בזיהוי הפונקציה שהופעלה עליה טרנספורמציה. הלומדים הסתכלו על הפונקציה המועתקת כעל פונקציה חדשה לגמרי. הם מצאו כי תלמידים שאינם תופסים את מושג הפונקציה כאובייקט, לא הצליחו לזהות טרנספורמציות על פונקציות גם לאחר שלמדו במפורש את הנושא. התלמידים לא הצליחו לזהות את התכונה הקבועה (invariance) של הטרנספורמציה. גם אם הכירו את סוגי הטרנספורמציות, לא השתמשו בכך לשם פתרון בעיות.

ראיה סטטית מול ראיה דינאמית:

אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus, 1994) מבחינים בין ראיה סטטית וראיה דינאמית של טרנספורמציות. ראיה סטטית של טרנספורמציות משווה בין שני מצבים קפואים, הישן והחדש, הפונקציה המקורית והפונקציה שהיא התוצר של הטרנספורמציות שהופעלו על פונקצית המקור. ראיה דינאמית של טרנספורמציות מדמה את התהליך בו הועתקה הפונקציה המקורית, תוך מעבר בין מצבי הביניים של סדרת הטרנספורמציות שהופעלה. בראיה דינאמית אפשר לבצע ממש (בדמיון או באמצעות כלים טכנולוגיים) הדמיה רציפה של הזזות, מתיחות וכיווצים המשנים את פונקצית המקור לפונקציה החדשה. ראיה סטטית מעידה על תפיסה של הטרנספורמציה כפעולה ואילו ראיה דינאמית מעודדת להסתכל על הטרנספורמציה כתהליך.

Goldenberg (1988) תוהה מה תלמידים רואים כאשר הם מסתכלים על גרפים של פונקציות וטוען כי הסתכלות סטטית על תמונת הגרפים עשויה לגרום לאשליה ולבלבול אצל תלמיד.

אייזנברג ודרייפוס (Eisenberg & Dreyfus) הראו גם כי תלמידים הנוטים להסתכל על טרנספורמציות באופן סטטי, כטרנספורמציה של גרף ממיקומו התחלתי למיקומו הסופי, גילו קושי לזהות טרנספורמציות כאשר נתקלו בהן. הם הסתכלו על הגרף שהתקבל במצב הסופי, כתוצר של הטרנספורמציה עצמה, ולא של התהליך בו נבנה הגרף. לפיכך יש לעודד אצל התלמידים ראיה של הטרנספורמציות כתהליך דינאמי, המשנה כל נקודה למיקומה החדש דרך סידרה של מצבי ביניים.

Baker et al. (2000) מצאו כי תלמידים בעלי הבנה של פונקציות ברמה גבוהה של תהליך או אובייקט, היו מסוגלים להבין את רעיון הטרנספורמציות באופן דינאמי. הם יכלו לדמיין כיצד ישתנה העקום או מיקומו כאשר מפעילים עליו טרנספורמציה, דבר המעיד לדבריהם על הבנה ברמה של תהליך את רעיון הטרנספורמציות.

Borba (1993) מוסיף וטוען שהגישה בה חוקרים את התבנית האלגברית והשפעתה על הגרף (אלגברה ← גרפים) מעודדת ראייה סטטית של טרנספורמציות. והסתכלות על ההשוואה בין שני מצבים לפני ואחרי הטרנספורמציה, כלומר עבור כל שינוי של הפרמטר מסתכלים על התוצאה המתקבלת. ואילו הגישה בה חוקרים טרנספורמציות ישירות על הגרפים (גרפים ← אלגברה) מעודדת ראייה של הטרנספורמציות כתהליך דינאמי.

טרנספורמציות של עצם גיאומטרי

טרנספורמציות של גרפים הן טרנספורמציות גיאומטריות של המישור כולו על עצמו, כלומר כל נקודות המישור מועתקות על נקודות המישור והאפקט הנראה לעין הוא של נקודות הגרף בלבד. מחקרה של Edwards (2002) בנושא טרנספורמציות גיאומטריות הראה שתפיסה מתמטית זו שונה מאד מתפיסתם האינטואיטיבית של התלמידים.

מחקרים מראים כי תלמידים נוטים לתפוס את הגרף כעצם גיאומטרי שלם המונח על המישור הקרטזי (Yerushalmy, 1993, עמוד 55) ומשום כך נוטים גם לראות את הזווית כהזווית עצם קשיח על פני המישור. גם עבור מתיחות התלמידים עשויים לאמץ דימוי מחיי היום יום. Goldenberg and Kilman (1990) ניתחו תפיסות של תלמידים את הגרף ותיארו כיצד תלמידים מתייחסים לגרף כעצם פסי ובעזרת זכוכית מגדלת מטפורית, מותחים (או משנים קנה מידה) של גרפים ומוצאים תכונות "פיסיות" של הגרף. לפיכך, הזווית ומתיחות של גרפים עשויות להיתפס כפעולה על עצמים פסיים גיאומטריים.

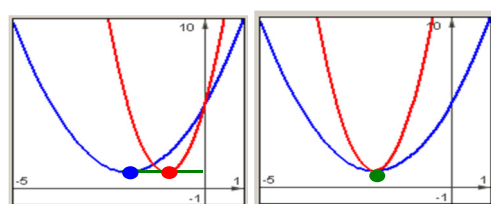
Edwards (2002) דיווחה במחקרה כי תלמידים שהפעילו טרנספורמציות באופן ישיר על עצמים גיאומטריים באמצעות כלים ממוחשבים (microworlds) התייחסו לצורות הגיאומטריות מתוך הבנות חושיות ואינטואיטיביות שלהם את המרחב. היא מצאה שתפיסתו של התלמיד דומה לתפיסת הגיאומטריה המסורתית שרווחה לפני המאה ה-19 לפיה הצורה הגיאומטרית היא עצם פסי המונח על המישור, וטרנספורמציה שלה משמעה תנועה של הצורה על פני המישור. השוואה בין תפיסת התלמידים ותפיסת המתמטיקאים המודרניים מתוארת בטבלה הבאה:

טרנספורמציות בעיני התלמיד	טרנספורמציות בעיני המתמטיקאי
המישור ריק, בלתי נראה ומשמש כרקע.	המישור הוא קבוצה של נקודות.
צורות גיאומטריות מונחות על המישור.	צורות גיאומטריות הן תת קבוצות של נקודות במישור.
טרנספורמציות הן תנועות פיסיות של צורות גיאומטריות על פני המישור.	טרנספורמציות הן מיפוי של כל נקודות המישור (האפקט הנראה על תת הקבוצה).
ה"עצמים" הגאומטריים הם נקודות, קווים, מעגלים, משולשים וכו'. כמו גם גרפים.	ה"עצמים" הגיאומטריים הם קבוצות של טרנספורמציות.

טבלה: השוואה בתפיסת הטרנספורמציות אצל התלמיד ואצל המתמטיקאי

לדעת Edwards "מיס-קונספציות" שגילו התלמידים בנושא נעוצות בשוני בין המתמטיקה המודרנית שלפיה מעוצב הכלי הממוחשב לבין תפיסתו החושית של התלמיד. כדוגמה למיסקונספציה כזו, היא הביאה את הקושי של תלמידים ומומחים גם יחד לתפוס סיבוב של צורה גיאומטרית סביב נקודת מרכז שרירותית המרוחקת מהצורה עצמה, דבר המנוגד להתנסויות החושיות מחיי היום יום.

במחקר ההוראה של Borba (1993) בנושא תפיסת הטרנספורמציות התקשו התלמידים להבין את אופן פעולת המתיחה כאשר הכלי הממוחשב דרש קביעה שרירותית של קו עוגן. קו העוגן הוא הקו (שאינו בהכרח חלק מהגרף) שנשאר קבוע במתיחה ושאר נקודות המישור נמתחות במרחק פרופורציוני ממנו. התלמידים התקשו למצוא היכן למקם את קו העוגן כך שהגרף יתקבל במקום הרצוי ולקשר לתבנית האלגברית המורכבת. הסבר אפשרי לקשיי התלמידים בהבנת קו העוגן, דומה לזה שנתנה Edwards לגבי טרנספורמציות גיאומטריות, קו העוגן אמנם הולם את ההגדרה המתמטית המודרנית אך מנוגד לתפיסה החושית של הלומד.



צפיית התלמיד
ציר y. מתיחה כאשר העוגן הוא

בכלים הממוחשבים בספר האלקטרוני (Yerushalmy, Katriel) & Shternberg 2003 קו העוגן נקבע להיות ציר ה- y . גם אז נוצרת הפתעה כאשר מתיחה של פרבולה מזיזה את הקודקוד בניגוד לציפייה האינטואיטיבית שמתיחת הפרבולה תהיה דרך הקודקוד.

יתרונה של הצגה זו (מתיחה בעוגן קבוע בציר y) הוא בכך שהתבנית האלגברית המתארת את הטרנספורמציות ($y = Af(Bx + C) + D$) נוחה יותר לניתוח ומעודדת לראות את האבחנה בין טרנספורמציות אופקיות לאנכיות.

Edwards טוענת שיש לתת תשומת לב לפער ההבנות בין המתמטיקה המודרנית ותפיסות התלמיד הן בעיצוב הכלים הטכנולוגיים והן בשיטות ההוראה. Borba (1993) סובר שבגישה שהוא מציע לעידוד יכולות הוויזואליזציה של הטרנספורמציות (גרפים ← אלגברה), התלמידים מסוגלים להתמודד עם העיוות

של הגרף שנוצר מטרנספורמציה של המישור כולו (כמו שינוי קנה המידה). יתרה מכך, הם גם עשויים להשתחרר מהדימוי של הגרף כעצם קשיח, ובאופן זה יראו את הגרף כתופעה התלויה ביחידות ובקנה המידה של מערכת הצירים.

מה קשה יותר?

חוקרים שעסקו בהוראת טרנספורמציות של פונקציות עסקו בשאלה איזו טרנספורמציה יותר קשה להבנה וניסו לנתח את מקורות הקושי.

Eisenberg & Dreyfus (1994) בנו היררכיה של הטרנספורמציות לפי דרגות קושי, לפיה טרנספורמציות אנכיות הן הקלות ביותר להבנה, אחריהן טרנספורמציות אופקיות ולבסוף השילוב ביניהן. הם טוענים שדרגות הקושי נובעות ממורכבות התהליכים היוזאליים של הטרנספורמציות.

Baker et al. (2000) טוענים כי טרנספורמציות אנכיות קלות יותר עבור התלמידים כי הן פעולות המופעלות ישירות על פונקציית הבסיס. לעומת זאת, הטרנספורמציות האופקיות הן פעולות מסובכות להבנה עבור התלמידים, כי הן מורכבות מפעולות על המשתנה הבלתי תלוי של הפונקציה, ועל התוצאה מפעילים את פונקציית הבסיס, ורק אז מתקבלת תוצאת הטרנספורמציה.

Confrey (1994) עסקה במחקרה בחקירה של טרנספורמציות מתוך המבט הוויזואלי, מצאה כי בדרך כלל תלמידים מצליחים לתפוס הזות באופן אינטואיטיבי, אך מתקשים להתמודד עם מתיחות. מבחינת הגרפים הזות שומרות על צורת הגרפים כמות שהיא, רק משנה את מיקומם במערכת הצירים. לעומת זאת במתיחות צורת הגרף משתנה יחד עם מיקומה.

האפקט של הזזה אופקית $g(x) = f(x+k)$ מפתיע רבים, תלמידים ומורים גם יחד. הם מצפים שכאשר k חיובי, התזזה של הגרף בהזזה האופקית תהיה בכיוון החיובי, באופן דומה למתרחש בהזזה אנכית. האינטואיציה הרווחת היא, שהגרף $f(x+3)$ אמור היה לזוז 3 יחידות ימינה בכיוון החיובי, ולא להפך (Zazkis 2003, Borba 1993). גם כיוון המתיחה האופקית יוצר בלבול: האם מתיחה אופקית בגורם 2, $g(x) = f(2x)$, תרחיב את גרף הפונקציה או תכווץ אותו? (Confrey 1994).

מה ביחידה זו?

ביחידה זו נעסוק בהרחבה ובהעמקה של מושג הפונקציה. בפרט נחקור הזות ומתיחות של פונקציות שונות.

נתחיל בהכרות של הזות ומתיחות בהקשר של בעיות אורייניות, בעיות מילוליות המתארות מצבים מחיי היום יום. נבחן את המשמעות של הזות ומתיחות של פונקציות בגרפים ובביטויים האלגבריים.

בהמשך נתבונן בהזות ומתיחות של גרפים שונים, שלא בהכרח אנו מכירים את התבנית האלגברית שלהן. נבחין בין פעולות אנכיות לאופקיות.

בחלק האחרון של היחידה, נכיר את פונקצית השורש כפונקציה ההפוכה לפונקציה הריבועית, ושוב נעמיק ונחקור כיצד באות לידי ביטוי פעולות ההזות והמתיחות על פונקצית השורש.

במהלך היחידה מומלץ (אך לא הכרחי) להשתמש ביישומונים הדינאמיים המשולבים ביחידה, המאפשרים לראות את פעולת ההזות והמתיחות באופן חזותי ומוחשי וכתנועה חיה של הגרפים.



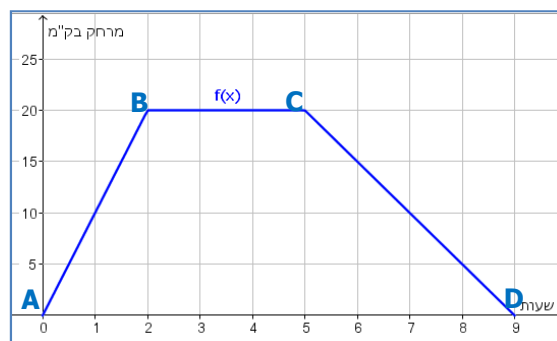
טיול אופניים – הזזות

בפעילות זו, מומלץ להיעזר ביישומון "[טיול אופניים](#)", המדמה את את סיפור הרכיבה של נגה ויונתן.



1. נגה יצאה מביתה לטיול אופניים לבקר את חברתה הטובה שרון.

לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המתאר את המרחק של נגה מביתה לפי זמן הרכיבה. תארו את מהלך הרכיבה של נגה:



א. התייחסו לשיעורי נקודות המפנה, הנקודות A, B, C, D ומה הן מייצגות בסיפור הרכיבה.

תשובה:

נגה מתחילה לנסוע (נקודה A) ומתרחקת מביתה, היא נוסעת במהירות קבועה של 10 קמ"ש (גרף ישר ששיפועו 10), עד שהיא מגיעה לביתה של חברתה הטובה שרון אחרי שתיים (נקודה B), היא נשארת למשך 3 שעות אצל שרון (נקודה C), ואחרי זה היא חוזרת הביתה במהירות קבועה של 5 קמ"ש (גרף ישר ששיפועו 5). היא מגיעה הביתה תוך 4 שעות (נקודה D).

חשוב לציין שהגרף איננו מסלול הנסיעה של נגה. כך הנקודה A אינה המיקום של הבית של נגה אלא הנקודה A בגרף מייצגת את הפרטים הבאים: בזמן הנסיעה 0 (זמן היציאה) נגה נמצאה בביתה (מרחק 0 מהבית).

ב. התייחסו לקטעים AB, BC, CD ותארו מה הם מייצגים בסיפור הרכיבה.

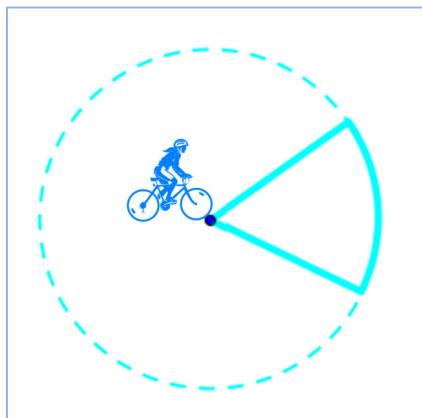
תשובה:

קטע AB מייצג את דרכה של נגה לביתה של שרון. השיפוע של AB הוא מהירות הרכיבה של נגה.

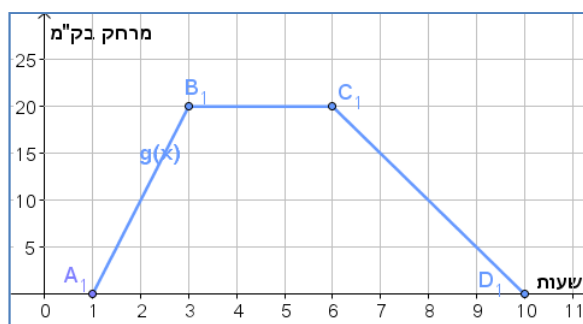
קטע BC מייצג את השהייה של נגה בביתה של שרון.

קטע CD מייצג את דרכה חזרה של נגה מביתה של שרון. השיפוע של CD הוא מהירות הרכיבה של נגה.

הערה: שימו לב כי הקטע **BC** מתאר מסלול שנמצא במרחק שווה מביתה של נגה לאורך 3 שעות. ולכן גם תיאור של נסיעה במסלול מעגלי במקום חניה יכול להתאים. למשל, נגה יצאה מביתה ונסעה במהירות קבועה (10 קמ"ש) במסלול ישר במשך שתיים עד שהגיעה לביתה של שרון. היא שהתה אצל שרון במשך שעה וחזרה הביתה בדרך אחרת. היא נסעה הביתה במשך שתיים במסלול מעגלי (המרחק מהבית של נגה נשאר קבוע) ואחר כך נסעה ארבע שעות נוספות במסלול ישר במהירות קבועה (5 קמ"ש) ראו באיור את מסלול הנסיעה של נגה.



2. יונתן הצטרף גם הוא לטיול אופניים. לפניכם הגרף המתאר את רכיבתו:



ג. במה דומה ובמה שונה גרף הרכיבה של יונתן מזה של נגה?

תשובה:

יונתן התחיל להתרחק מביתו שעה אחרי שנגה עזבה את ביתה (נקודה **A1**), הוא נסע במהירות קבועה השווה למהירות בה נסעה נגה בדרכה אל שרון (ישר ששיפועו 10). אחרי שתיים של נסיעה (נקודה **B1**), הוא נח למשך 3 שעות כמו שעשתה נגה (נקודה **C1**) וחזר באותה מהירות שבה נגה חזרה (ישר ששיפועו 5). אחרי 4 שעות הגיע לנקודת המוצא שלו (נקודה **D1**).

ד. מה ניתן לומר על סיפור הטיול של יונתן? בחרו את התשובה הנכונה.

תשובה:

1. יונתן יצא שעה לפני נגה.
2. יונתן יצא שעה אחרי נגה.
3. יונתן רכב שעה אחת יותר מנגה.

ה. האם וכיצד השתנו שיעורי נקודות המפנה? ומה מבטא השינוי בסיפור הרכיבה?

תשובה:

רק שיעורי ה- x של נקודות המפנה השתנו. בגרף המתאר את הרכיבה של יונתן כל שיעורי ה- x גדולים ב-1 מהשיעורים של הנקודות בגרף המתאר את הרכיבה של נגה. (הגרף של יונתן הוא אותו גרף של נגה אבל בהזזה של יחידה אחת ימינה). השינוי מבטא את היציאה המאוחרת בשעה של יונתן וגם את המסלול הזה שעשו שניהם (התרחקות במהירות קבועה וזהה במשך שעותיים מנקודת המוצא שלהם, מנוחה של 3 שעות וחזרה במהירות זהה וקבועה במשך 4 שעות).

ו. קבעו על פי הגרף של נגה בשאלה 1, באילו שעות נגה היתה במרחק 10 ק"מ מביתה. קבעו על פי הגרף של יונתן באילו שעות היה יונתן במרחק 10 ק"מ מהבית?

תשובה:

נגה היתה במרחק 10 ק"מ מביתה פעמיים: פעם ראשונה בדרכה הלוך אחרי שעה אחת, ופעם נוספת אחרי 7 שעות בדרכה חזרה.

יונתן היה במרחק 10 ק"מ מביתו פעמיים: פעם ראשונה בדרכו הלוך אחרי 2 שעות (מאז שנגה יצאה), ופעם שניה אחרי 8 שעות בדרכו חזרה.

ז. הגרף של יונתן הוא למעשה **הזזה יחידה אחת ימינה** של הגרף של נגה. נשווה בין שני הגרפים ונתבונן בנקודות מתאימות. השלימו את הטבלה הבאה:

תשובה:

	A		B	C		D		
נגה	(0,0)	(1,10)	(3,20)	(5,20)	(8,5)	(9,0)	(a,b)	(c-1,d)
יונתן	(1,0)	(2,10)	(4,20)	(6,20)	(9,5)	(10,0)	(a+1,b)	(c,d)

ח. מה ניתן לומר על הקשר בין שיעורי נקודות מתאימות בשני הגרפים?

תשובה:

בנקודות מתאימות שיעורי ה- y שווים.

בנקודות מתאימות שיעורי ה- x אצל יונתן גדולים ב-1 משיעורי ה- x אצל נגה.

ט. נתון כי הגרף המתאר את הרכיבה של נגה בשאלה 1, מתואר על ידי הפונקציה $f(x)$. איזו מהפונקציות הבאות מתארת את הרכיבה של יונתן בעזרת $f(x)$?

תשובה:

1. $g(x) = f(x) + 1$

2. $g(x) = f(x) - 1$

3. $g(x) = f(x + 1)$

4. $g(x) = f(x - 1)$

כך למשל, $g(2)=f(1)=10$, נגה היתה במרחק 10 ק"מ אחרי שעה ויונתן היה באותו מרחק רק אחרי שעתיים מאז שנגה יצאה.

3. בנו גרפים מתאימים לסיפורי הרכיבה הבאים ורשמו ביטוי אלגברי מתאים בעזרת $f(x)$.

1. יובל יצא שעתיים לפני נגה.

תשובה:

$$g(x) = f(x + 2)$$

כלומר, $g(-2)=f(0)=0$. הזמן שבו נגה יצאה מיוצג על ידי $x=0$. יובל היה במרחק 0 ק"מ מנקודת המוצא שעתיים לפני שנגה יצאה והיתה גם היא במרחק 0 ק"מ מנקודת המוצא של שניהם.

2. תמר יצאה שעתיים אחרי נגה.

תשובה:

$$g(x) = f(x - 2)$$

4. נסכם:

א. גרף $f(x)$ הוז k יחידות ימינה, $(k>0)$. רשמו ביטוי אלגברי מתאים לפונקציה המוזת $g(x)$.

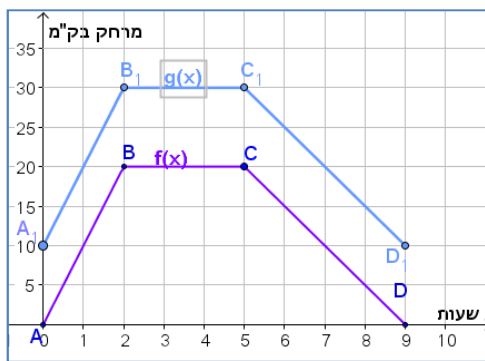
תשובה:

$$g(x) = f(x - k)$$

ב. גרף $f(x)$ הוז k יחידות שמאלה, $(k>0)$. רשמו ביטוי אלגברי מתאים לפונקציה המוזת $g(x)$.

תשובה:

$$g(x) = f(x + 2)$$



5. לפניכם גרף $g(x)$ הנוצר על ידי הזזה 10 יחידות

מעלה של הגרף $f(x)$.

ג. במה דומים ובמה שונים שני הגרפים?

תשובה:

לכל נקודה בפונקציה $f(x)$ מתאימה נקודה בפונקציה $g(x)$ כך ששיעורי ה- x שווים ושיעורי ה- y בפונקציה $g(x)$ גדולים ב-10 משיעורי ה- y של הנקודות בפונקציה $f(x)$.

ד. נשווה בין שני הגרפים ונתבונן בנקודות מתאימות. השלימו את הטבלה הבאה:

תשובה:

	A		B	C		D		
$f(x)$	(0,0)	(1,10)	(3,20)	(5,20)	(8,5)	(9,0)	(a,b)	(c,d-10)
$g(x)$	(0, 10)	(1,20)	(3,30)	(5,30)	(8,15)	(9,10)	(a,b+10)	(c,d)

ה. כתבו קשר אלגברי בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

תשובה:

$$g(x) = f(x) + 10$$

6. בגרף בשאלה 5, $f(x)$ מתאר את סיפור טיול האופניים של נגה ואילו הגרף $g(x)$ מתאר את סיפור טיול

האופניים של עדן. השוו בין טיולי הרכיבה של נגה ועדן. האם הן תפגשנה במהלך הטיול?

תשובה:

נגה התחילה את הטיול כשהיא במרחק אפס מביתה ועדן התחילה את הטיול במרחק 10 ק"מ מביתה של נגה. שתיהן רכבו בצורה זהה.

7. נסכם:

גרף $f(x)$ הוזז k יחידות מעלה, ($k > 0$). רשמו ביטוי אלגברי מתאים לפונקציה המוזזת $g(x)$.

תשובה:

$$g(x) = f(x) + k$$

גרף $f(x)$ הוזז k יחידות מטה, ($k > 0$). רשמו ביטוי אלגברי מתאים לפונקציה המוזזת $g(x)$.

תשובה:

$$g(x) = f(x) - k$$

בבריכת השחייה - מתיחות

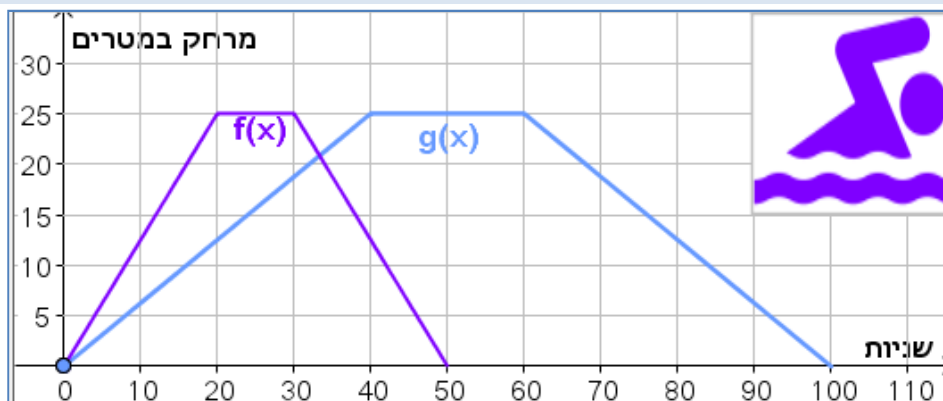
בפעילות זו, מומלץ להיעזר ביישומון "[השחינים](#)", המדמה את סיפור השחייה של אבי ובני.



1. אבי ובני שוחים בבריכה שאורכה 25 מ'. הם שוחים מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם.

בהגיעם לקצה הבריכה הם נחים מעט, ואז הם משנים את כיוון שחייתם וחוזרים לנקודת ההתחלה. אבי שוחה מהר יותר מבני. אבי ובני התחילו לשחות באותו זמן ושניהם שחו מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם ובחזרה, פעם אחת.

לפניכם הגרף המתאים לזמן השחייה של כל שחיין את מרחקו מתחילת הבריכה, במהלך שחייה של פעם אחת מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם וחזרה.



א. התאימו לכל שחיין את אחד הגרפים. הסבירו.

[תשובה:](#)

הגרף $f(x)$ מתאר את השחייה של השחיין המהיר יותר, אבי. אבי מסיים את השחייה, כלומר מגיע לנקודת המוצא בזמן קצר יותר (50 שניות לעומת 100 שניות).

ב. רשמו כמה זמן נח כל שחיין בקצה הבריכה.

[תשובה:](#)

אבי נח למשך 10 שניות, ובני נח למשך 20 שניות.

ג. כעבור כמה זמן, בערך, מתחילת השחייה נפגשו השחינים?

[תשובה:](#)

בהסתמך על הגרף רואים כי הם נפגשים כעבור 33-34 שניות בערך.

ד. בנקודת הפגישה, האם השחיינים שחו באותו כיוון או בכיוונים מנוגדים? הסבירו.

תשובה:

הם שחו בכיוונים מנוגדים, כאשר אבי היה בדרכו חזרה ובני בדרכו הלוך.

ה. בכמה שניות סיים אבי את שחייתו לפני בני?

תשובה:

הוא סיים 50 שניות לפני בני.

ו. פי כמה מהר שוחה אבי מבני?

תשובה:

אבי שוחה במהירות גדולה פי 2 מבני. אנו רואים בגרף כי אבי עובר מרחק של 25 מ' ב- 20 שניות לעומת בני עובר אותו מרחק ב- 40 שניות.

ז. התייחסו לנקודות שונות בכל אחד מהגרפים והשוו בין שיעורי הנקודות של שני השחיינים.

תשובה:

	תחילת המשחה		תחילת המנוחה	סיום המנוחה	סיום המשחה		
אבי	(0,0)	(8,10)	(20,25)	(30,25)	(50,0)	(a,b)	$(\frac{1}{2}c,d)$
בני	(0,0)	(16,10)	(40,25)	(60,25)	(100,0)	(2a,b)	(c,d)

ח. כתבו קשר אלגברי בין הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

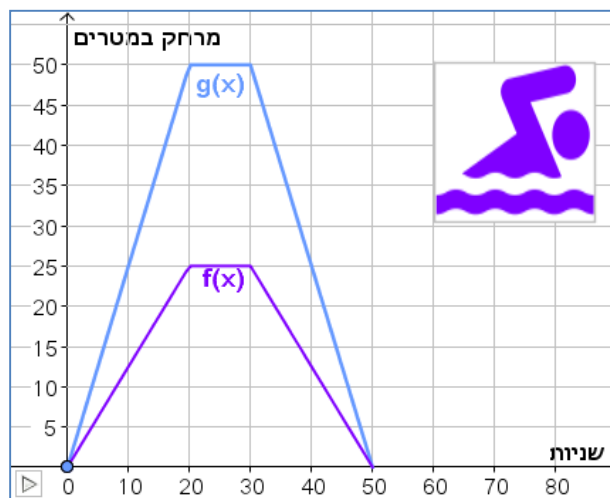
תשובה:

$$g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

כך למשל, $g(40)=f(20)=25$

2.

אלי שחיין המתאמן לתחרות בינלאומית מתאמן בבריכה אולימפית שאורכה 50 מ' וחברו בני שוחה בבריכה רגילה שאורכה 25 מ'. הם שוחים מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם. בהגיעם לקצה הבריכה הם נחים מעט, ואז הם משנים את כיוון שחייתם וחוזרים לנקודת ההתחלה. אלי שוחה מהר יותר מבני. אלי ובני התחילו לשחות באותו זמן ושניהם שחו מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם ובחזרה, פעם אחת. לפניכם הגרף המתאים לזמן השחייה של כל שחיין את מרחקו מתחילת הבריכה, במהלך שחייה של פעם אחת מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם וחזרה.



א. התאימו לכל שחיין את אחד הגרפים. הסבירו.

תשובה:

הפונקציה $g(x)$ מתארת את השחייה של אלי כי אלי שוחה בבריכה שאורכה 50 מ', הפונקציה $f(x)$ מתארת את השחייה של בני ששוחה בבריכה קטנה יותר ומתרחק רק 25 מ' ממקום יציאתו.

ב. רשמו כמה זמן נח כל שחיין בקצה הבריכה.

תשובה:

שני השחינים נחו למשך 10 שניות כל אחד.

ג. האם סיים אלי את שחייתו לפני בני?

תשובה:

לא. שניהם סיימו באותו זמן לאחר 50 שניות.

ד. מי מהשחיינים שחה מהר יותר? פי כמה?

תשובה:

אלי הוא השחיין המהיר יותר, והוא שחה במהירות ששווה לכפליים ממהירותו של בני. על פי המוצג בגרף אלי עבר מרחק כפול ממה שעבר בני באותו זמן.

ה. התייחסו לנקודות שונות בכל אחד מהגרפים והשוו בין שיעורי הנקודות של שני השחיינים.

תשובה:

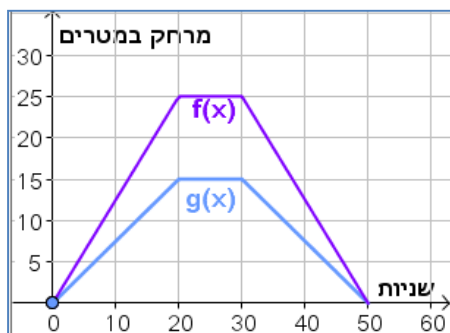
	סיום המשחה		סיום המנוחה	תחילת המנוחה	תחילת המשחה		
בני	$(c, \frac{d}{2})$	(a, b)	$(50, 0)$	$(40, 12.5)$	$(30, 25)$	$(20, 25)$	$(8, 10)$
אלי	(c, d)	$(a, 2b)$	$(50, 0)$	$(40, 25)$	$(30, 50)$	$(20, 50)$	$(8, 20)$

הקשר האלגברי הוא: $g(x) = 2f(x)$

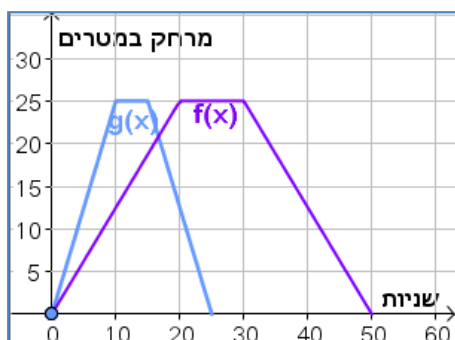
עובד על פי משימה ממאגר 801

3. כתבו סיפור לכל אחד מהגרפים הבאים ורשמו ביטוי אלגברי מתאים ל- $g(x)$ בעזרת $f(x)$.

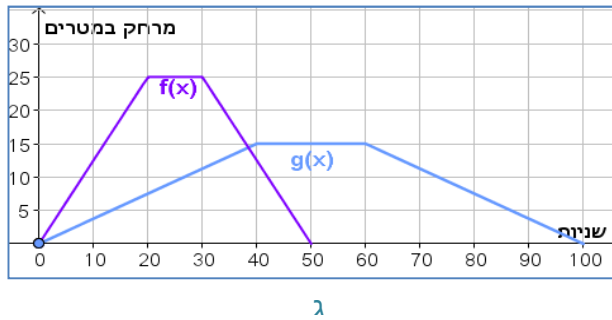
תשובה:



א. סמי ואמיר שוחים בבריכה שאורכה 25 מ'. הם שוחים מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם. בהגיעם לקצה הבריכה הם נחים מעט, ואז הם משנים את כיוון שחייתם וחוזרים לנקודת ההתחלה באותה מהירות. סמי שוחה מהר יותר מאמיר. סמי שוחה במהירות של 2.5 מ' בשניה ואילו אמיר שוחה במהירות של 12.5 מ' בשניה. סמי ואמיר התחילו לשחות באותו זמן ושניהם שחו מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם ובחזרה, פעם אחת.



ב. סמי שחיין שמתאמן בבריכה שאורכה 25 מ' וחברו אמיר מתאמן בבריכה אחרת שאורכה 15 מ'. הם שוחים מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם. בהגיעם לקצה הבריכה הם נחים מעט, ואז הם משנים את כיוון שחייתם וחוזרים לנקודת ההתחלה באותה מהירות. סמי שוחה מהר יותר מאמיר. סמי שוחה במהירות של 2.5 מ' בשניה ואילו אמיר שוחה במהירות של 1.25 מ' בשניה. סמי ואמיר התחילו לשחות באותו זמן ושניהם שחו מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם ובחזרה, פעם אחת.



ג. סמי שחיין שמתאמן בבריכה שאורכה 25 מ'. חברו אמיר מתאמן בבריכה אחרת שאורכה 15 מ'. הם שוחים מתחילת הבריכה אל קצה הבריכה שמולם, בהגיעם לקצה הבריכה סמי נח למשך 10 שניות ואמיר נח למשך 20 שניות. מהירותו של סמי שווה ל- $\frac{10}{3}$ ממהירותו של אמיר.

4. נסכם: גרף $f(x)$ נמתח k יחידות הצידה, ($k > 0$). רשמו ביטוי אלגברי מתאים לפונקציה שנמתחה $g(x)$.

תשובה:

כאשר $k > 1$ הגרף מתכווץ לצדדים וכאשר $0 < k < 1$ הגרף נמתח לצדדים.
גרף $f(x)$ נמתח k יחידות מעלה ($k > 0$). רשמו ביטוי אלגברי מתאים לפונקציה שנמתחה $g(x)$.

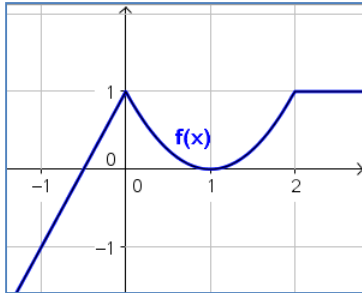
תשובה:

$$g(x) = kf(x)$$

מתיחות והזזות של פונקציות

בפרק הקודם הכרנו כיצד באות לידי ביטוי הזזות ומתיחות של פונקציה אחת שתיארה סיפור, בפרק זה נרחיב ונחקור כיצד באות לידי ביטוי הזזות ומתיחות של הגרף של פונקציה כלשהי, $f(x)$, על פי התבנית:

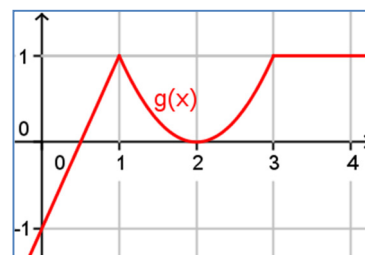
$$g(x) = af(bx + c) + d$$



1. נתונה פונקציה $f(x)$ כלשהי.

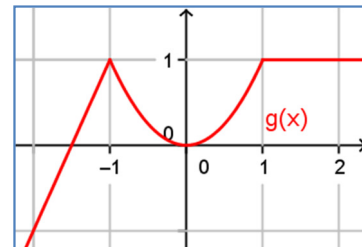
שרטטו בדף הבא פונקציות חדשות $g(x)$ שהן הזזות של $f(x)$
א. הזזה אופקית ימינה יחידה אחת.

תשובה:



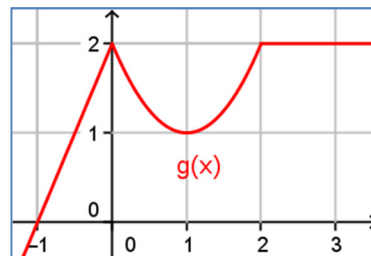
ב. הזזה אופקית שמאלה יחידה אחת.

תשובה:



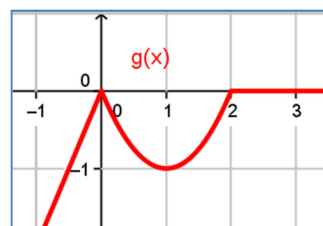
ג. הזזה אנכית למעלה יחידה אחת.

תשובה:



ד. הזזה אנכית למטה יחידה אחת.

תשובה:



ענו לפי השרטוט עבור כל פונקציה מועתקת על השאלות הבאות:

- לאילו נקודה מועתקת נקודת החיתוך עם ציר y ?
- סמנו נקודות יחודיות נוספות בגרף, לאילו נקודות הן מועתקות? מה הקשר בין שיעוריהן.
- בהינתן נקודה כלשהי (x, y) רשמו את שיעורי הנקודה המועתקת באופן כללי.
- התאימו לכל הזזה את אחד מהביטויים הבאים:

1. $g(x) = f(x) + 1$

2. $g(x) = f(x) - 1$

3. $g(x) = f(x + 1)$

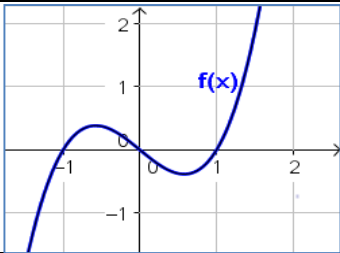
4. $g(x) = f(x - 1)$

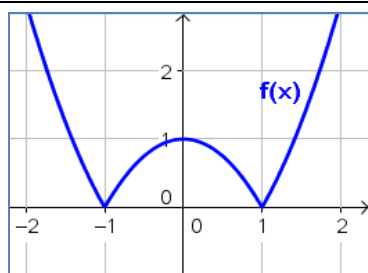
תשובה:

הזזה אנכית למטה יחידה אחת	הזזה אנכית למעלה יחידה אחת	הזזה אופקית שמאלה יחידה אחת	הזזה אופקית ימינה יחידה אחת.		
$(0, 1) \rightarrow (0, 0)$	$(0, 1) \rightarrow (0, 2)$	$(0, 1) \rightarrow (-1, 1)$	$(0, 1) \rightarrow (1, 1)$	א. נקודת חיתוך עם ציר y	
$(1, 0) \rightarrow (1, -1)$	$(1, 0) \rightarrow (1, 1)$	$(1, 0) \rightarrow (0, 0)$	$(1, 0) \rightarrow (2, 0)$	ב. נקודת חיתוך עם ציר x	
$(-\frac{1}{2}, 0) \rightarrow (-\frac{1}{2}, -1)$	$(-\frac{1}{2}, 0) \rightarrow (-\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, 0) \rightarrow (-1\frac{1}{2}, 0)$	$(-\frac{1}{2}, 0) \rightarrow (\frac{1}{2}, 0)$	נקודה:	
$(x, y) \rightarrow (x, y-1)$	$(x, y) \rightarrow (x, y+1)$	$(x, y) \rightarrow (x-1, y)$	$(x, y) \rightarrow (x+1, y)$	ג. הנקודה (x, y)	
$g(x) = f(x) - 1$	$g(x) = f(x) + 1$	$g(x) = f(x + 1)$	$g(x) = f(x - 1)$	ד.	

ה. ענו שוב על הסעיפים א-ד עבור שתי הפונקציות הבאות. ובדקו את מסקנותיכם.

תשובה:

					
		הזזה אופקית ימינה יחידה אחת.	הזזה אופקית שמאלה יחידה אחת	הזזה אנכית למעלה יחידה אחת	הזזה אנכית למטה יחידה אחת
א.	נקודת חיתוך עם ציר y	$(0,0) \rightarrow (1,0)$	$(0,0) \rightarrow (-1,0)$	$(0,0) \rightarrow (0,1)$	$(0,0) \rightarrow (0,-1)$
ב.	נקודת חיתוך עם ציר x	$(0,0) \rightarrow (1,0)$ $(1,0) \rightarrow (2,0)$ $(-1,0) \rightarrow (0,0)$	$(0,0) \rightarrow (-1,0)$ $(1,0) \rightarrow (0,0)$ $(-1,0) \rightarrow (-2,0)$	$(0,0) \rightarrow (0,1)$ $(1,0) \rightarrow (1,1)$ $(-1,0) \rightarrow (-1,1)$	$(0,0) \rightarrow (0,-1)$ $(1,0) \rightarrow (1,-1)$ $(-1,0) \rightarrow (-1,-1)$
ג.	הנקודה (x,y)	$(x,y) \rightarrow (x+1,y)$	$(x,y) \rightarrow (x-1,y)$	$(x,y) \rightarrow (x,y+1)$	$(x,y) \rightarrow (x,y-1)$
ד.		$g(x) = f(x - 1)$	$g(x) = f(x + 1)$	$g(x) = f(x) + 1$	$g(x) = f(x) - 1$



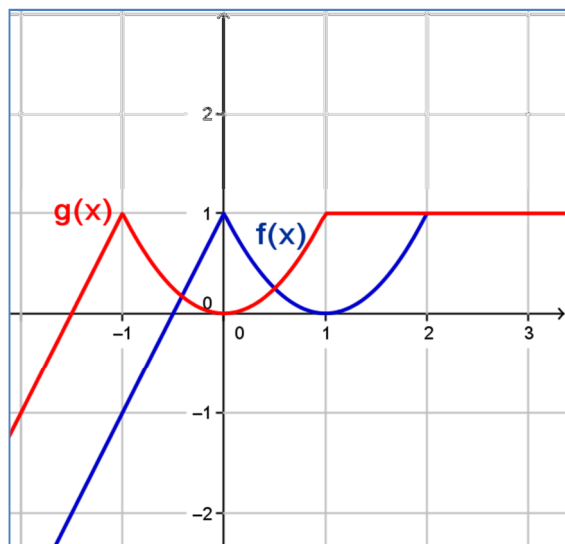
		הזזה אופקית ימינה יחידה אחת.	הזזה אופקית שמאלה יחידה אחת	הזזה אנכית למעלה יחידה אחת	הזזה אנכית למטה יחידה אחת
א.	נקודת חיתוך עם ציר y	$(0,1) \rightarrow (1,1)$	$(0,1) \rightarrow (-1,1)$	$(0,1) \rightarrow (0,2)$	$(0,1) \rightarrow (0,0)$
ב.	נקודת חיתוך עם ציר x	$(1,0) \rightarrow (2,0)$ $(-1,0) \rightarrow (0,0)$	$(1,0) \rightarrow (0,0)$ $(-1,0) \rightarrow (-2,0)$	$(1,0) \rightarrow (1,1)$ $(-1,0) \rightarrow (-1,1)$	$(1,0) \rightarrow (1,-1)$ $(-1,0) \rightarrow (-1,-1)$
ג.	הנקודה (x,y)	$(x,y) \rightarrow (x+1,y)$	$(x,y) \rightarrow (x-1,y)$	$(x,y) \rightarrow (x,y+1)$	$(x,y) \rightarrow (x,y-1)$
ד.		$g(x) = f(x - 1)$	$g(x) = f(x + 1)$	$g(x) = f(x) + 1$	$g(x) = f(x) - 1$



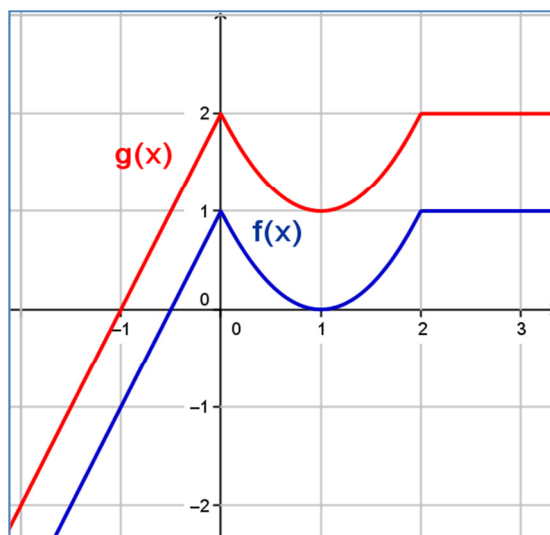
שרטוט הפונקציות המוזזות

שרטטו בכל מערכת צירים פונקציה $g(x)$ שהיא הזזה של $f(x)$.

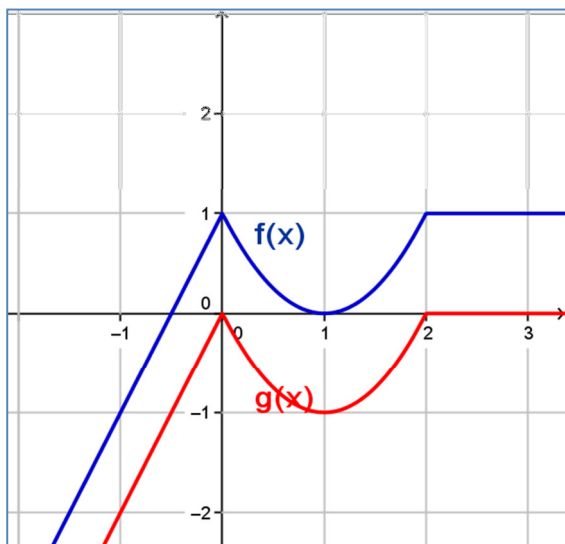
תשובה: (הפונקציות המוזזות מופיעות באדום)



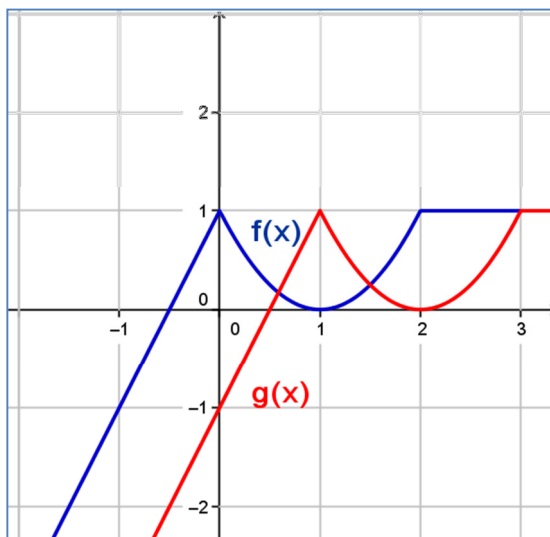
ב. הזזה אופקית שמאלה יחידה אחת.



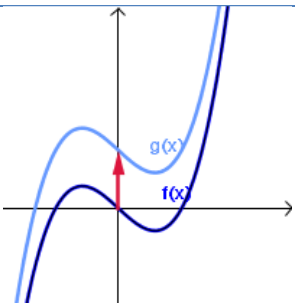
א. הזזה אנכית למעלה יחידה אחת.

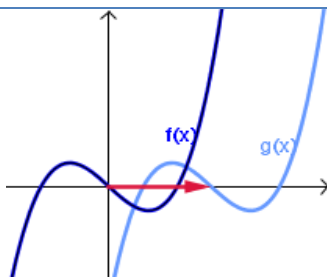


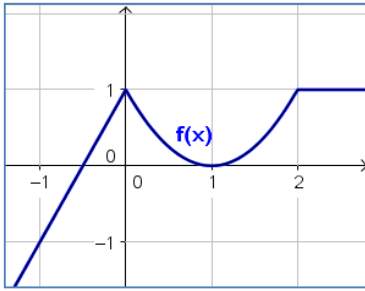
ד. הזזה אנכית למטה יחידה אחת.



ג. הזזה אופקית ימינה יחידה אחת.

הזזה אנכית		
$g(x) = f(x) + k$	תוספת של קבוע לערך של הפונקציה.	ביטוי אלגברי
	צורת הגרף נשמרת ומוזזת באופן קשיח לאורך ציר ה-y. אם $k > 0$ ההזזה היא כלפי מעלה, אם $k < 0$ ההזזה היא כלפי מטה.	הגרף
קבוע k - $(x, y) \rightarrow (x, y + k)$	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- x נשאר קבוע ושיעור ה- y גדל/קטן בערך קבוע.	נקודות

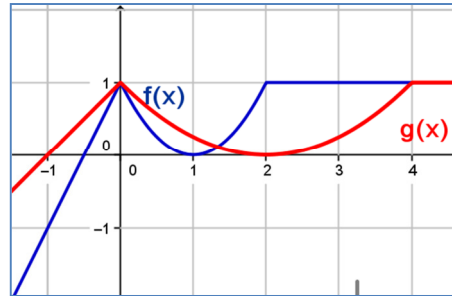
הזזה אופקית		
$g(x) = f(x + k)$	תוספת של קבוע לארגומנט של הפונקציה.	ביטוי אלגברי
	צורת הגרף נשמרת ומוזזת באופן קשיח ב- k יחידות אופקית על ציר ה-x. אם $k > 0$ ההזזה היא שמאלה, אם $k < 0$ ההזזה היא ימינה.	הגרף
קבוע k $(x, y) \rightarrow (x - k, y)$	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- y נשאר קבוע, ושיעור ה- x גדל, קטן בערך קבוע.	נקודות



2. נתונה פונקציה $f(x)$ כלשהי.

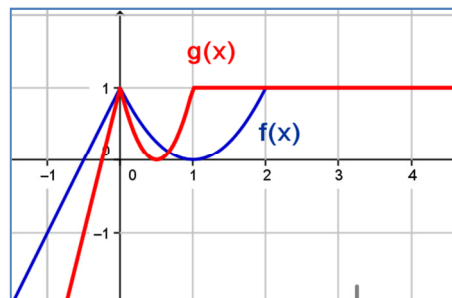
שרטטו בדף הבא פונקציות חדשות $g(x)$ שהן **מתיחות של $f(x)$** .
א. מתיחה אופקית פי 2.

תשובה:



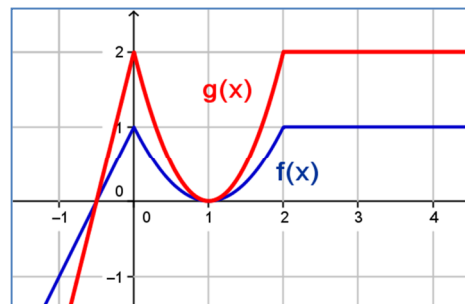
ב. כוץ אופקי פי 2.

תשובה:



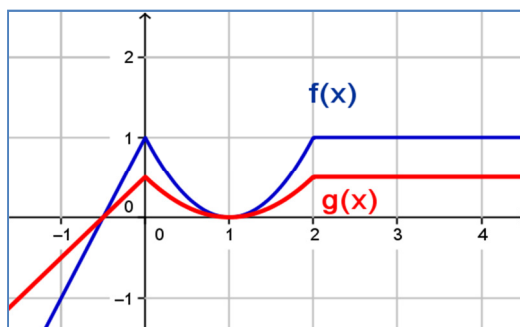
ג. מתיחה אנכית פי 2.

תשובה:



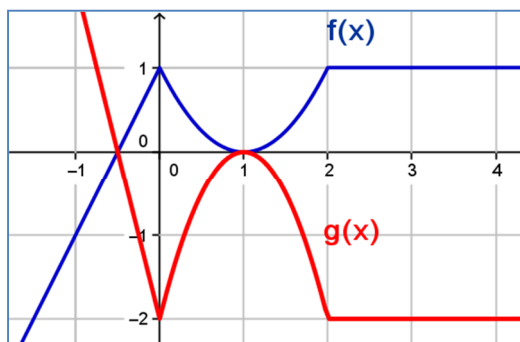
ד. כוץ אנכי פי 2.

תשובה:



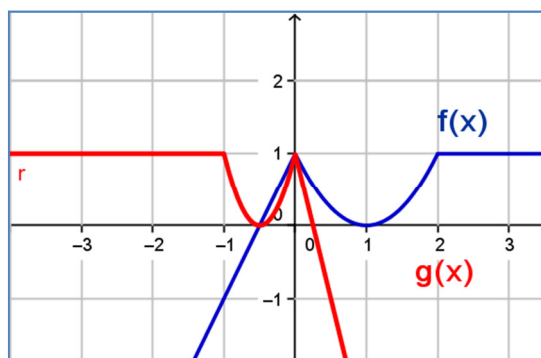
ה. מתיחה אנכית פי 2 ושיקוף בציר ה x.

תשובה:



ו. כוץ אופקית פי 2 ושיקוף בציר ה y.

תשובה:



ענו לפי השרטוט עבור כל פונקציה מועתקת על השאלות הבאות:

- א. לאיזו נקודה מועתקת נקודת החיתוך עם ציר y ?
- ב. עקבו אחר נקודות יחודיות נוספות בגרף. לאילו נקודות הן מועתקות? מה הקשר בין שיעוריהן.
- ג. בהינתן נקודה כלשהי (x,y) רשמו את שיעורי הנקודה המועתקת באופן כללי.
- ד. התאימו לכל הזזה את אחד מהביטויים הבאים:

1. $g(x) = 2f(x)$

2. $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

3. $g(x) = f(2x)$

4. $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$

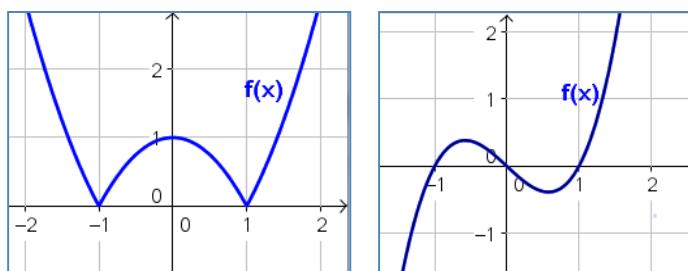
5. $g(x) = -2f(x)$

6. $g(x) = f(-2x)$

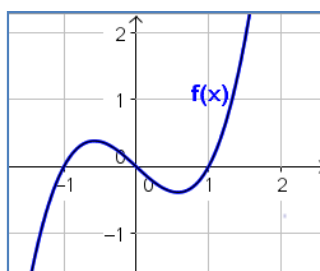
תשובה: א+ב+ג+ד

נק' חיתוך עם ציר y	מתיחה אופקית פי 2.	כווץ אופקי פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	כווץ אנכי פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	כווץ והיפוך אופקית פי 2.
$(0,1)$ ↓ $(0,1)$	$(0,1)$ ↓ $(0,1)$	$(0,1)$ ↓ $(0,1)$	$(0,1)$ ↓ $(0,2)$	$(0,1)$ ↓ $(0,0.5)$	$(0,1)$ ↓ $(0,-2)$	$(0,1)$ ↓ $(0,1)$
$(1,0)$ ↓ $(2,0)$	$(1,0)$ ↓ $(0.5,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(-0.5,0)$
$(2,1)$ ↓ $(4,1)$	$(2,1)$ ↓ $(1,1)$	$(2,1)$ ↓ $(2,1)$	$(2,1)$ ↓ $(2,2)$	$(2,1)$ ↓ $(2, 0.5)$	$(2,1)$ ↓ $(2,-2)$	$(2,1)$ ↓ $(-2, 1)$
(x,y) ↓ $(2x,y)$	(x,y) ↓ $(0.5x,y)$	(x,y) ↓ (x,y)	(x,y) ↓ $(x,2y)$	(x,y) ↓ $(x,0.5y)$	(x,y) ↓ $(x,-2y)$	(x,y) ↓ $(0.5x,-y)$
ביטוי אלגברי מתאים להזזה	$g(x) = f(\frac{1}{2}x)$	$g(x) = f(2x)$	$g(x) = 2f(x)$	$g(x) = \frac{1}{2}f(x)$	$g(x) = -2f(x)$	$g(x) = f(-2x)$

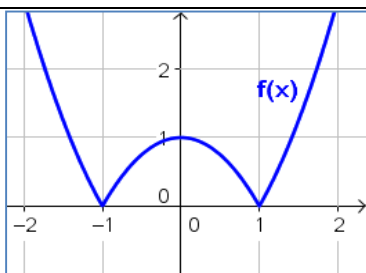
ה. ענו שוב על הסעיפים א-ד עבור שתי הפונקציות הבאות. ובדקו את מסקנותיכם.



תשובה:



מתיחה אופקית פי 2.	מתיחה פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.
$(0,0)$ ↓ $(0,0)$	$(0,0)$ ↓ $(0,0)$	$(0,0)$ ↓ $(0,0)$	$(0,0)$ ↓ $(0,0)$	$(0,0)$ ↓ $(0,0)$	$(0,0)$ ↓ $(0,0)$	נק' חיתוך עם ציר y
$(1,0)$ ↓ $(0.5,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(0.5,0)$	$(1,0)$ ↓ $(2,0)$	
$(-1,0)$ ↓ $(-0.5, 0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-1,0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-1, 0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-1,0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-0.5,0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-2,0)$	
(x,y) ↓ $(0.5x,-y)$	(x,y) ↓ $(x,-2y)$	(x,y) ↓ $(x,0.5y)$	(x,y) ↓ $(x,2y)$	(x,y) ↓ $(0.5x,y)$	(x,y) ↓ $(2x,y)$	(x,y)
$g(x) = f(-2x)$	$g(x) = -2f(x)$	$g(x) = \frac{1}{2}f(x)$	$g(x) = 2f(x)$	$g(x) = f(2x)$	$g(x) = f(\frac{1}{2}x)$	ביטוי אלגברי מתאים להזדה



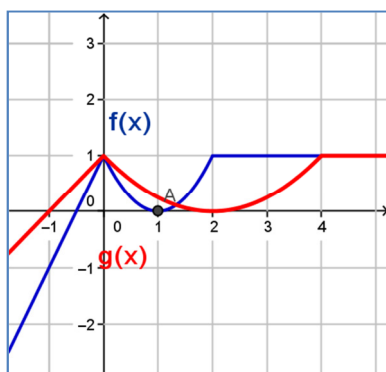
מתיחה אופקית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	מתיחה אנכית פי 2.	
$(0,1)$ ↓ $(0,-0.5)$	$(0,1)$ ↓ $(0,-2)$	$(0,1)$ ↓ $(0,0.5)$	$(0,1)$ ↓ $(0,2)$	$(0,1)$ ↓ $(0,1)$	$(0,1)$ ↓ $(0,1)$	נק' חיתוך עם ציר y
$(1,0)$ ↓ $(0.5,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(1,0)$	$(1,0)$ ↓ $(0.5,0)$	$(1,0)$ ↓ $(2,0)$	
$(-1,0)$ ↓ $(-0.5,0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-1,0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-1,0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-1,0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-0.5,0)$	$(-1,0)$ ↓ $(-2,0)$	
(x,y) ↓ $(0.5x,-y)$	(x,y) ↓ $(x,-2y)$	(x,y) ↓ $(x,0.5y)$	(x,y) ↓ $(x,2y)$	(x,y) ↓ $(0.5x,y)$	(x,y) ↓ $(2x,y)$	(x,y)
$g(x) = f(-2x)$	$g(x) = -2f(x)$	$g(x) = \frac{1}{2}f(x)$	$g(x) = 2f(x)$	$g(x) = f(2x)$	$g(x) = f(\frac{1}{2}x)$	ביטוי אלגברי מתאים להזדה



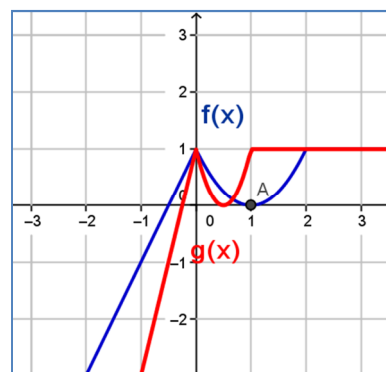
שרטוט הפונקציות הנמתחות

שרטטו בכל מערכת הצירים פונקציה $g(x)$ שהיא **מתיחה של $f(x)$**

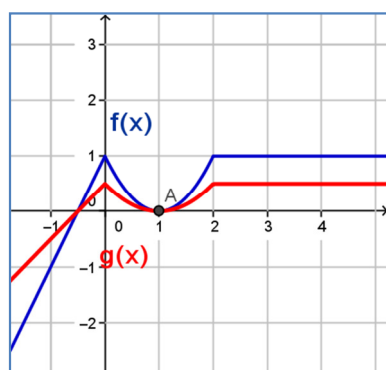
תשובה: הפונקציות הנמתחות מופיעות באדום



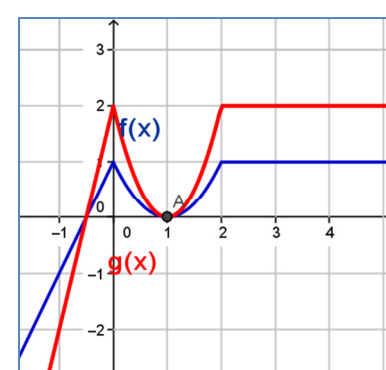
ב. מתיחה אופקית פי 2.



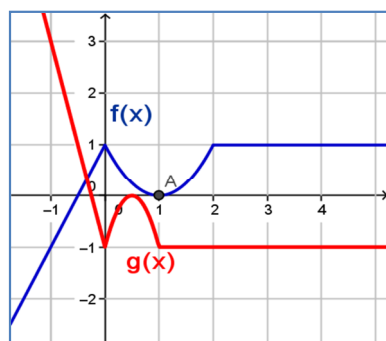
א. כוץ אופקי פי 2.



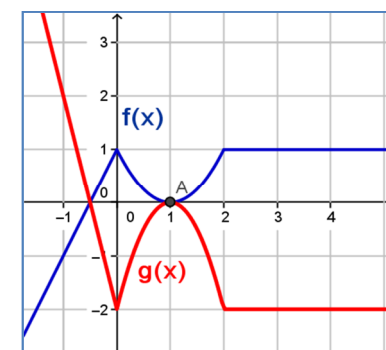
ד. כוץ אנכי פי 2.



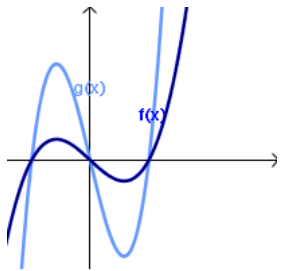
ג. מתיחה אנכית פי 2.



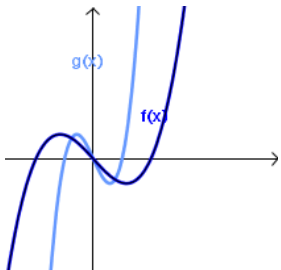
ו. כוץ אופקית 2 ושיקוף בציר ה-x.



ה. מתיחה אנכית פי 2 ושיקוף בציר ה-x.

מתיחה אנכית		
$g(x) = k \cdot f(x)$	הכפלת הפונקציה בקבוע.	ביטוי אלגברי
	צורת הגרף של הפונקציה המקורית נמתחת או מתכווצת לאורך ציר y. ככל שערכי k גדולים יותר הגרף נראה "גבוה וצר" יותר. עבור $0 < k < 1$ הגרף מתכווץ לאורך ציר y. k שלילי גורם בנוסף למתיחה/כיווץ גם לשיקוף ביחס לציר ה-x.	הגרף
קבוע k : $(x, y) \rightarrow (x, ky)$	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- x נשאר קבוע, ושיעור ה- y גדל/קטן פי הערך של הקבוע.	נקודות



מתיחה אופקית		
$g(x) = f(kx)$	הכפלה של ארגומנט הפונקציה בקבוע.	ביטוי אלגברי
	צורת הגרף נמתחת או מתכווצת לרוחב לאורך ציר x. ככל שערכי k גדולים יותר הגרף מתכווץ. כלומר נראה "צר" יותר. עבור $0 < k < 1$ הגרף נמתח לאורך ציר x, מתרחב. k שלילי גורם בנוסף למתיחה גם לשיקוף ביחס לציר ה-y.	הגרף
קבוע k - $(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{k}, y\right)$	כל נקודה מועתקת כך ששיעור ה- y נשאר קבוע, ושיעור ה- x גדל/קטן פי הערך של הקבוע.	נקודות

$$g(x) = af(bx + c) + d \quad \text{בתבנית:}$$

תשובה:

הפרמטר a:

גורם למתיחה או לכווץ לאורך ציר y .

עבור $a > 1$ הגרף נמתח אנכית.

עבור $0 < a < 1$ הגרף מתכווץ לאורך ציר y .

עבור $-1 < a < 0$ הגרף מתכווץ לאורך ציר y ומשתקף ביחס לציר x .

עבור $a < -1$ הגרף נמתח אנכית ומשתקף ביחס לציר x .

הפרמטר b:

גורם למתיחה או התכווצות לאורך ציר x .

עבור $b > 1$ הגרף נמתח לאורך ציר x . (מתרחב)

עבור $0 < b < 1$ הגרף מתכווץ לאורך ציר x . (מתכווץ)

עבור $-1 < b < 0$ הגרף מתכווץ לאורך ציר x ומשתקף ביחס לציר y .

עבור $b < -1$ הגרף נמתח לאורך ציר x ומשתקף ביחס לציר y .

הפרמטר c:

גורם להזזה אופקית של הגרף.

עבור $c > 0$ הגרף מוזז בצורה קשיחה ימינה.

עבור $c < 0$ הגרף מוזז בצורה קשיחה שמאלה.

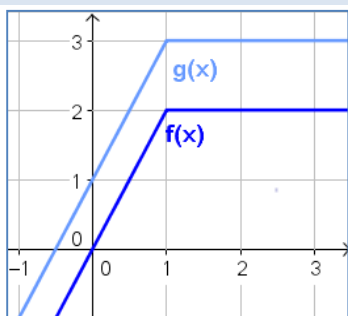
הפרמטר d:

גורם להזזה אנכית לאורך ציר y .

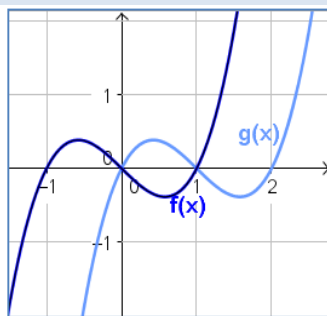
אם $k > 0$ הגרף מוזז בצורה קשיחה למעלה.

אם $k < 0$ הגרף מוזז בצורה קשיחה למטה.

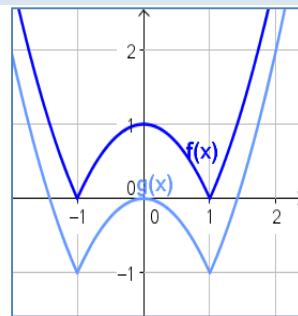
4. נתונים הגרפים של $f(x)$ (בכחול כהה) ובוצעה עליהם הזזה או מתיחה כלשהי.



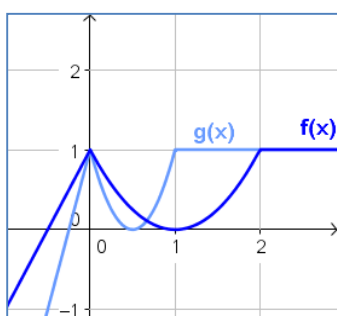
ג



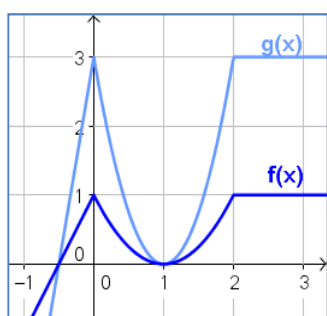
ב



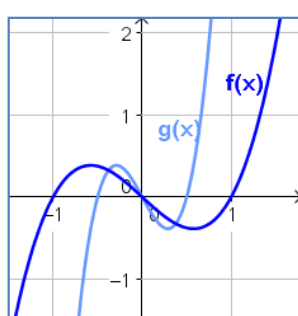
א



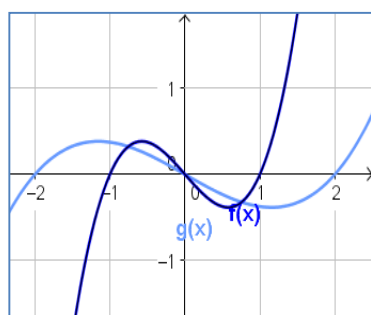
ו



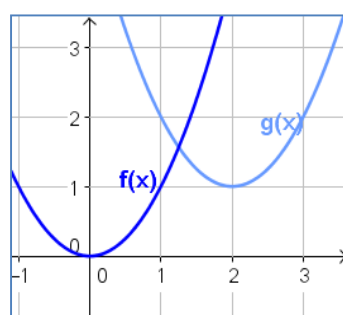
ה



ד



ח

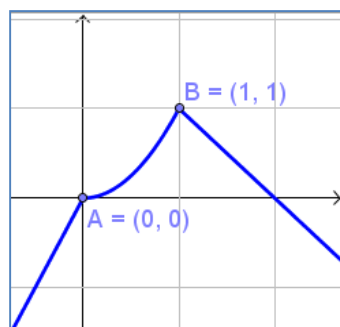


ז

תשובה

- א. $g(x) = f(x) - 1$ (הזזה יחידה אחת למטה).
 ב. $g(x) = f(x - 1)$ (הזזה יחידה אחת ימינה).
 ג. $g(x) = f(x) + 1$ (הזזה יחידה אחת למעלה).
 ד. $g(x) = f(2x)$ (כיווץ אופקי פי 2).
 ה. $g(x) = 3f(x)$ (מתיחה אנכית פי 3).
 ו. $g(x) = f(2x)$ (כיווץ אופקי פי 2).
 ז. $g(x) = f(x - 2) + 1$ (הזזה יחידה אחת ימינה ולמעלה).
 ח. $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$ (מתיחה אופקית פי 2).

5. נתונה פונקציה $f(x)$ כלשהי.



כתבו בכל סעיף לאן יועתקו הנקודות A ו-B, ובנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

1. $g(x) = f(x) - 1$

2. $g(x) = f(x - 1)$

3. $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$

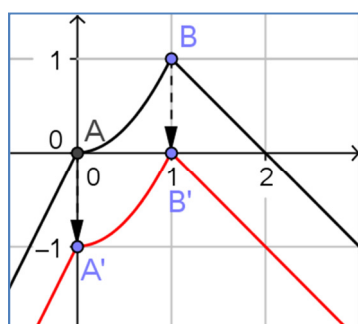
4. $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

5. $g(x) = -f(x) - 1$

6. $g(x) = f(1 - x)$

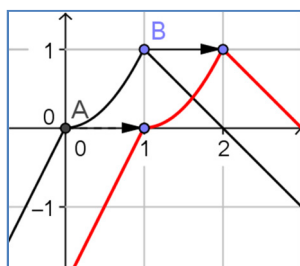
תשובה

1.



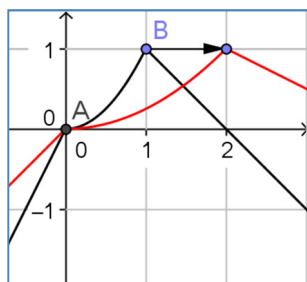
B = (1, 1)	A = (0, 0)
↓	↓
B' = (1, 0)	A' = (0, -1)

2.



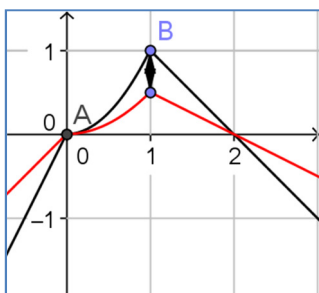
B = (1, 1)	A = (0, 0)
↓	↓
B' = (2, 1)	A' = (1, 0)

3.



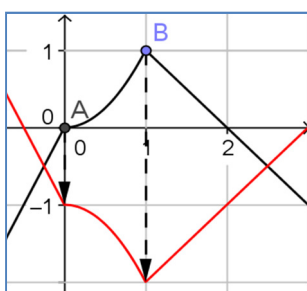
$B = (1, 1)$	$A = (0, 0)$
↓	↓
$B' = (2, 1)$	$A' = (0, 0)$

4.



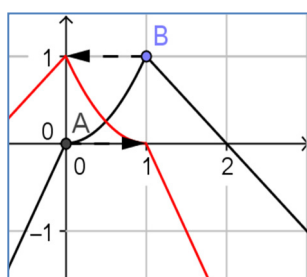
$B = (1, 1)$	$A = (0, 0)$
↓	↓
$B' = \left(1, \frac{1}{2}\right)$	$A' = (0, 0)$

5.



$B = (1, 1)$	$A = (0, 0)$
↓	↓
$B' = (1, -2)$	$A' = (0, -1)$

6.



$B = (1, 1)$	$A = (0, 0)$
↓	↓
$B' = (0, 1)$	$A' = (1, 0)$

6. נתונה הפונקציה $f(x) = |x|$.

שרטטו גרפים לכל אחת מהפונקציות הבאות ותארו את פעולת ההזזות והמתיחות שהופעלו עליה. רשמו ביטוי אלגברי מפורש לפונקציה המועתקת.

1. $g(x) = f(x) - 2$

2. $g(x) = f(x + 2)$

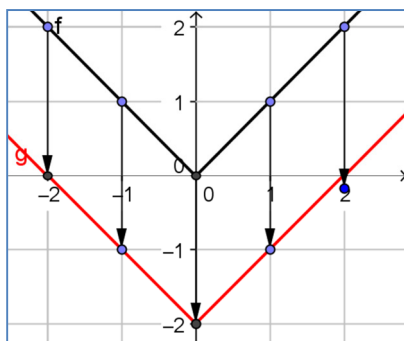
3. $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

4. $g(x) = 2f(x - 1) + 3$

תשובה

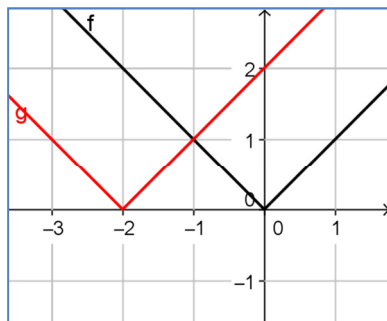
1. כל נקודה שעל הפונקציה f מועתקת כך ששיעור ה- x נשאר קבוע ושיעור ה- y קטן ב-2.

$$g(x) = |x| - 2$$



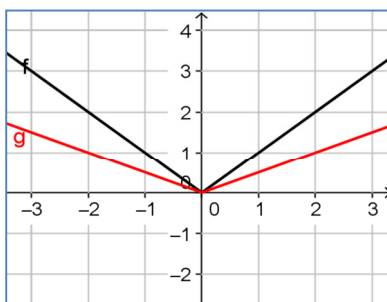
2. כל נקודה שעל הפונקציה f מועתקת כך ששיעור ה- y נשאר קבוע, ושיעור ה- x קטן ב-2.

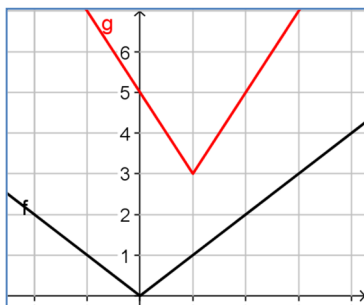
$$g(x) = |x + 2|$$



3. כל נקודה שעל הפונקציה f מועתקת כך ששיעור ה- x נשאר קבוע ושיעור ה- y מוכפל ב- $\frac{1}{2}$.

$$g(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$$

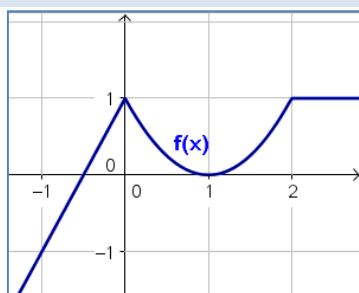




4. כל נקודה שעל הפונקציה f מועתקת כך ששיעור ה- x גדל ב-1 ושיעור ה- y מוכפל ב-2 בתוספת 3.

$$g(x) = 2|x - 2| + 3$$

7. נתונה פונקציה $f(x)$ כלשהי.



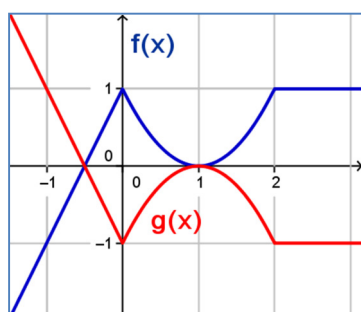
היעזרו ביישום הדינאמי טרנספורמציות, בנו גרפים עבור הפונקציות הבאות:

1. $g(x) = -f(x)$

2. $g(x) = f(-x)$

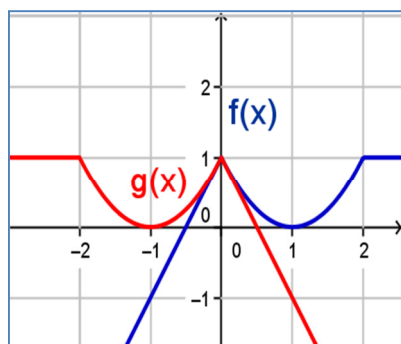
מה הקשר בין הגרפים שקיבלתם? מה המשמעות הגיאומטרית של פעולות אלו?

תשובה



1. הגרף של: $g(x) = -f(x)$

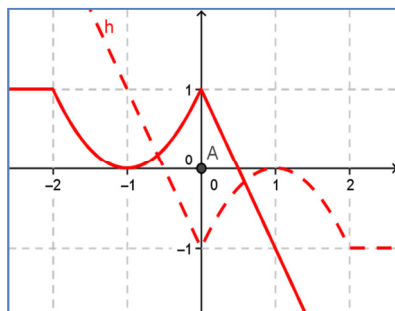
הפונקציה $g(x) = -f(x)$ היא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ סביב ציר x .



2. הגרף של: $g(x) = f(-x)$

הפונקציה $g(x) = f(-x)$ היא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ סביב ציר y .

8. נתונה פונקציה $f(x)$ כלשהי.



האם יתכן כי פונקציה מקיימת את התכונה $f(x) = f(-x)$?
 אם כן, תנו דוגמה ושרטטו את הגרף שלה. תארו את התכונה הגיאומטרית שלה.
 אם לא, הסבירו מדוע.

תשובה:

כן. כל פונקציה זוגית מקיימת את התכונה הזו... והגרפים המתקבלים הם סימטריים ביחס לציר y . למשל:

$$1. f(x) = x^2$$

$$2. f(x) = x^4 + 1$$

$$3. f(x) = 1$$

האם יתכן כי פונקציה מקיימת את התכונה $f(x) = -f(x)$?
 אם כן, תנו דוגמה ושרטטו את הגרף שלה. תארו את התכונה הגיאומטרית שלה.
 אם לא, הסבירו מדוע.

תשובה:

רק הפונקציה $f(x) = 0$ מקיימת את התכונה הזו.

בגלל הסימטריה סביב ציר x אז אם הנקודה $(x, f(x))$ נמצאת על הפונקציה $f(x)$ אז הנקודה $(x, -f(x))$ נמצאת על הפונקציה $-f(x)$, ואם שתי הפונקציות שוות אז מתקיים: $f(x) = -f(x)$ זה מתקיים רק עבור המספר אפס כי הוא המספר היחידי שהוא נגדי לעצמו.

1. קשרים בריבוע

לריבוע מאפיינים שונים, למשל: אורך הצלע, היקף, שטח, אורך אלכסון. ניתן ליצור שישה גרפים שונים המתארים קשרים שונים בריבוע ממאפיינים אלה. בכל גרף משורטט בציר ה-x אחד מהמאפיינים של הריבוע (אורך הצלע, היקף, שטח, אורך אלכסון) ובציר ה-y מאפיין אחר.

היעזרו ביישומון "[קשרים בריבוע](#)", שנו את אורך צלע הריבוע והתבוננו בגרפים שנוצרו. 

א. מצאו עבור כל גרף מהם שני מאפייני הריבוע שקבעו אותו.

תשובה:

גרף 1: ההיקף כפונקציה של אורך הצלע.

גרף 2: השטח כפונקציה של אורך הצלע.

גרף 3: אורך האלכסון כפונקציה של אורך הצלע.

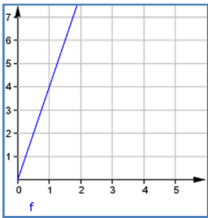
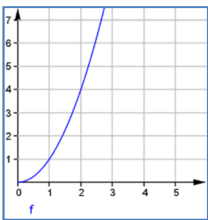
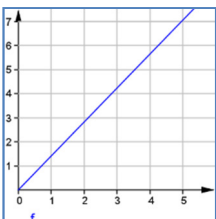
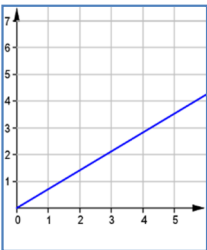
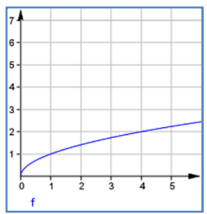
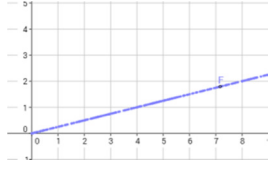
גרף 4: אורך הצלע כפונקציה של אורך האלכסון.

גרף 5: אורך הצלע כפונקציה של השטח.

גרף 6: אורך הצלע כפונקציה של ההיקף.

ב. השלימו את הטבלה הבאה, ומצאו קשרים בין הפונקציות והגרפים שלהם:

תשובה:

הגרף	משתנה x	משתנה תלוי y	נקודות לדוגמה	הפונקציה
1 	אורך צלע הריבוע	היקף הריבוע	(1,4) (2,8)	$f(x)=4x$
2 	אורך צלע הריבוע	שטח הריבוע	(2,4) (4,16)	$f(x) = x^2$
3 	אורך צלע הריבוע	אורך אלכסון הריבוע	$(1, \sqrt{2})$ $(2, \sqrt{8})$	$f(x) = \sqrt{2}x$
4 	אורך אלכסון הריבוע	אורך צלע הריבוע	$(1, \sqrt{2})$ $(3, \frac{3}{\sqrt{2}})$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x$
5 	שטח הריבוע	אורך צלע הריבוע	(1,1) (4,2)	$f(x) = \sqrt{x}$
6 	היקף הריבוע	אורך צלע הריבוע	$(1, \frac{1}{4})$ (4,1)	$f(x) = \frac{x}{4}$

במשימה הקודמת הכרנו זוגות של פונקציות עם היפוך תפקידים כגון: האחת מתארת את הקשר בין אורך הצלע להיקפו, השניה מתארת את הקשר בין היקף הריבוע לאורך צלעו. ראינו

כי בפונקציות אלה, היה חילוף בין תפקידי משתנה x ומשתנה y . אנו קוראים לזוג פונקציות כזה פונקציות הפוכות.

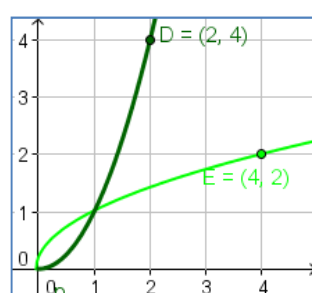
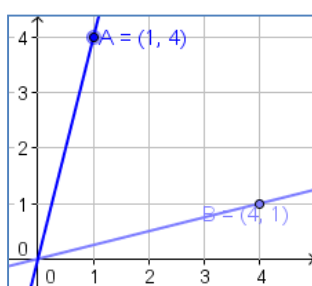
2. בפעילות זו נחקור את הקשר בין זוגות של פונקציות הפוכות (ממשימה 1):



מומלץ להיעזר ביישומון "זוגות של פונקציות הפוכות".

1. עקבו אחר נקודות בשתי הפונקציות (בכל זוג פונקציות בנפרד) ותארו את הקשר בין שיעוריהן.

תשובה:



לכל נקודה על גרף פונקציה נתונה מתאימה נקודה שבה הקוארדינטות מתחלפות ביניהם.

אם הנקודה (a, b) נמצאת על הפונקציה אז הנקודה (b, a) נמצאת על גרף הפונציה ההפוכה

2. השלימו את טבלאות הערכים עבור הפונקציות:

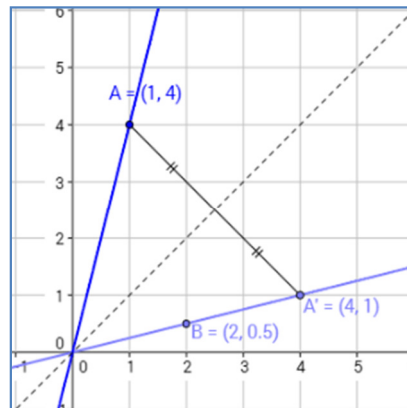
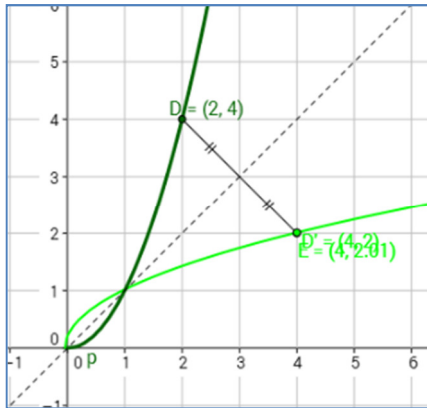
תשובה:

$f_1(x) = 4x$	$(-1, -4)$	$(0, 0)$	$(1, 4)$	$(2, 8)$	$(3, 12)$	$(4, 16)$	$(4.5, 18)$	$(5, 20)$
$g_1(x) = \frac{1}{4}x$	$(-4, -1)$	$(0, 0)$	$(4, 1)$	$(8, 2)$	$(12, 3)$	$(16, 4)$	$(18, 4.5)$	$(20, 5)$

$f_2(x) = x^2$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$	$(4, 16)$	$(4.5, 20.25)$	$(5, 25)$
$g_2(x) = \sqrt{x}$	$(?, ?)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(4, 2)$	$(9, 3)$	$(16, 4)$	$(20.25, 4.5)$	$(25, 5)$
	לא קיימת נקודה מתאימה							

3. הוסיפו למערכת הצירים את הישר $y=x$, (ביישומון סמנו בכפתורים "זוג פונקציות הפוכות").
תארו את הקשר בין שני הגרפים של הפונקציות ההפוכות בעזרת $y=x$.

תשובה:



הגרפים של שתי פונקציות הפוכות הם סימטריים ביחס לישר $y=x$.

4. הסבירו איזו פעולה יש לבצע כדי לקבל גרף אחד מהשני.

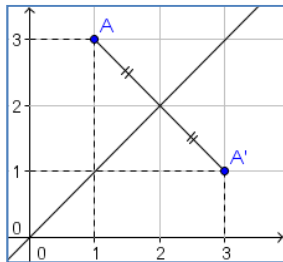
תשובה:

1. מציירים את הישר $y=x$.
2. מכל נקודה על גרף אחד מורידים אנך לישר $y=x$ וממשיכים את האנך באורך שווה ומקבלים את הנקודה על הגרף השני.

פונקציות הפוכות

נקודות סימטריות:

1. שרטטו בגאוגברה את הישר $y=x$.
2. סמנו נקודה כלשהי, ושקפו אותה ביחס לישר $y=x$. (בעזרת הכפתור ).
3. מה הקשר בין שיעורי הנקודות הסימטריות ביחס לישר $y=x$? הוכיחו באופן גיאומטרי, היעזרו בשרטוט.

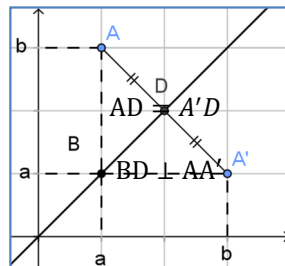


תשובה: 1-3

הקואורדינטות של שתי הנקודות תחלפות ביניהן

A

$$A' = (b, a)$$



הוכחה:

BD צלע משותפת

ולכן: $\triangle ABD \cong \triangle A'BD$ (צ,צ,צ)

$$\rightarrow AB = BA'$$

$$A = (a, b) \text{ אם}$$

אז $B = (a, a)$ נמצאת על הישר $y=x$.

$$AB = b - a$$

$$A' = (a + (b - a), a)$$

$$A' = (b, a) \text{ כלומר:}$$

4. הוכיחו כי הנקודות (a,b) ו- (b,a) הן סימטריות ביחס לישר $y=x$ (כלומר הישר מהווה אנך אמצעי לקטע בין הנקודות).

תשובה:

הוכחה:

$$1. \text{ שיפוע } AA': \frac{b-a}{a-b} = \frac{-(a-b)}{a-b} = -1$$

מתקבל: BD ניצב ל- AA' .

נשים לב שכאשר $a=b$ מתקבל המקרה הטריטוריאלי בה הנקודה (a,a) נמצאת על הישר $y=x$.

$$2. \text{ נקודת האמצע של } AA' \text{ היא: } (\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2}).$$

נקודה זו אכן נמצאת על הישר $y=x$.

מ-1 ו-2 הוכחנו כי הישר $y=x$ חוצה את הקטע AA' וניצב לו ולכן הוא מהווה אנך אמצעי לקטע AA' .

ב. פונקציה הפוכה לישר.

1. שרטטו בגאוגברה את פונקצית הישר $f(x)=4x$.

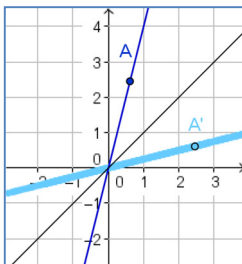
2. סמנו נקודה על $f(x)$ ושקפו אותה ביחס לישר $y=x$, (בעזרת הכפתור .

הזיזו את הנקודה. הפעילו עקבות על נקודת השיקוף. מה קיבלתם? הסבירו מדוע.

3. שקפו את $f(x)$ ביחס לישר $y=x$. (בעזרת הכפתור .

האם קיבלתם פונקציה? אם כן, מצאו את משוואתה $g(x)$.

תשובה: 1-3



התקבלה פונקציה קווית (ישר) שמשוואתה: $g(x) = \frac{1}{4}x$.

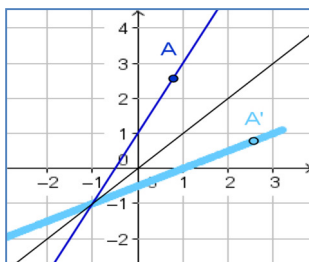
4. חזרו על הפעולה 1-3 עבור פונקציות נוספות כגון:

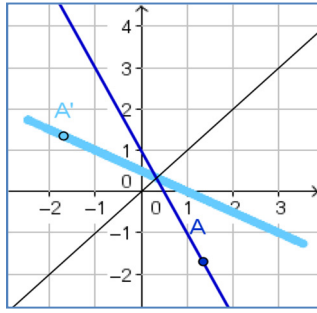
$$f(x)=5, f(x)=-2x+1, f(x)=2x+1$$

תשובה:

הפונקציה: $f(x)=2x+1$

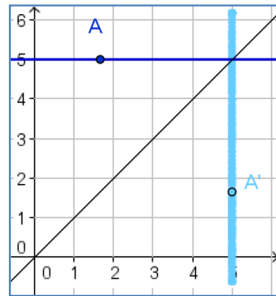
$$\text{הפונקציה ההפוכה: } g(x) = \frac{x-1}{2}$$





הפונקציה : $f(x) = -2x + 1$

הפונקציה ההפוכה: $g(x) = \frac{1-x}{2}$



הפונקציה : $f(x) = 5$

מתקבל הישר $x = 5$ שהוא לא פונקציה.

לא קיימת פונקציה הפוכה.

ג. האם לכל ישר ניתן למצוא פונקציה הפוכה? תנו דוגמאות והסבירו מדוע.

על פי הדוגמאות לעיל, שערנו מהי הפונקציה ההפוכה לישר $f(x) = mx + b$.

תשובה:

לכל הישרים קיימות פונקציות הפוכות חוץ מהישרים המקבילים לציר ה- x .

משוואת הפונקציה ההפוכה של הישר: $f(x) = mx + b$ היא: $g(x) = \frac{x-b}{m}$, $m \neq 0$

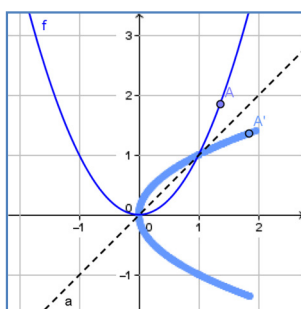
ד. האם קיימת פונקציה הפוכה לפונקציה ריבועית?

1. שרטטו בגאוגברה את הפונקציה $f(x) = x^2$.

2. שקפו את $f(x)$ ביחס לישר $y = x$. האם קיבלתם פונקציה? אם כן, מצאו את משוואתה. אם לא, הסבירו מדוע.

תשובה:

התקבל הגרף הבא:



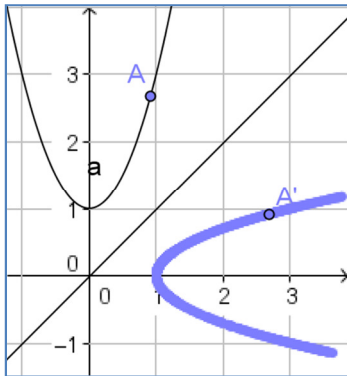
הגרף שהתקבל אינו מייצג פונקציה כי רואים כי לערך מסויים של x מתאימים שני ערכים שונים של y . (הפונקציה $f(x) = x^2$ איננה פונקציה חד-חד ערכית)

3. חזרו על הפעולה עבור פונקציות נוספות כגון: $f(x)=-x^2$, $f(x)=2x^2+1$.

תשובה:

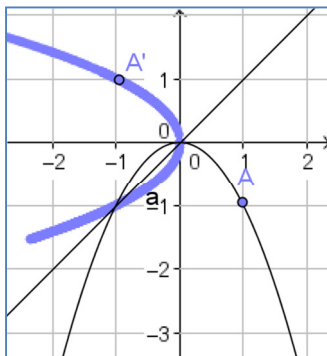
$$f(x) = 2x^2 + 1$$

הגרף שהתקבל אינו מייצג פונקציה כי רואים כי לערך מסוים של x מתאימים שני ערכים שונים של y . (הפונקציה $f(x)=x^2$ איננה פונקציה חד-חד ערכית)

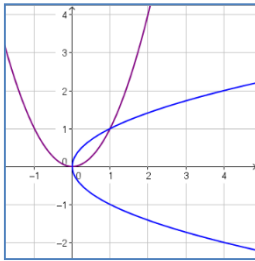


$$f(x) = -x^2$$

הגרף שהתקבל אינו מייצג פונקציה כי רואים כי לערך מסוים של x מתאימים שני ערכים שונים של y . (הפונקציה $f(x)=x^2$ איננה פונקציה חד-חד ערכית)



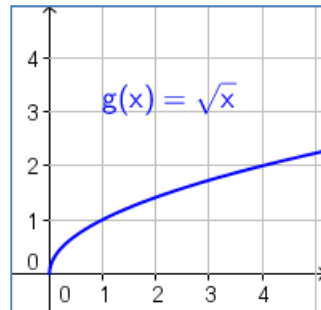
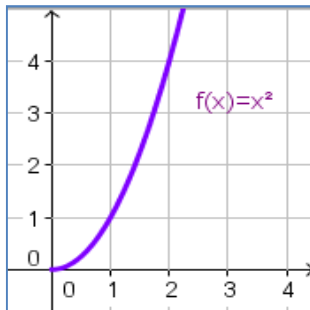
פונקצית השורש



ראינו כי בפונקציה הריבועית ישנם שני ערכי x אשר יש להם אותו ערך y . לדוגמה גם ל- $x=1$ וגם ל- $x=-1$ ערך הפונקציה 1. לכן בנסיון ליצור פונקציה הפוכה נקבל כי לשני ערכי y יש אותו ערך של x . משמע לפונקציה הריבועית אין פונקציה הפוכה.

בכדי לבנות לפונקציה הריבועית פונקציה הפוכה, את פונקצית השורש, יש **להגביל** את התחום כך שבתחום זה תהיה חד-חד ערכית.

מגדירים את פונקצית השורש כפונקציה הפוכה לפונקציה הריבועית בתחום החיובי. כלומר בהנתן $f(x) = x^2$ בתחום $x > 0$, פונקצית השורש $g(x) = \sqrt{x}$ הפוכה לה.



שימו לב כי במשימה "קשרים בריבוע" הכרנו את פונקצית השורש המתארת את הקשר בין שטח הריבוע לאורך צלעו, ההפוכה לפונקציה, המתארת את הקשר בין אורך צלע הריבוע לשטחו. תחום הפונקציה היה מוגבל לערכים חיוביים בלבד. (מדוע?)

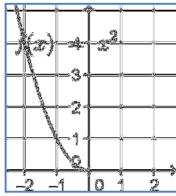
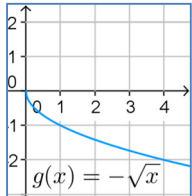
1. השלימו את הטבלה הבאה:

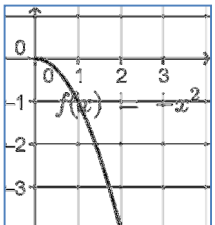
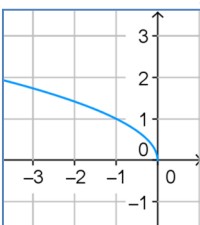
$g(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = x^2$	
$x \geq 0$	כל x	$x \geq 0$ תחום
$g(x) \geq 0$	$f(x) \geq 0$	תחום ערכי הפונקציה

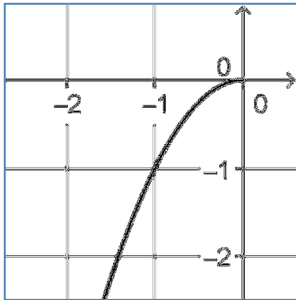
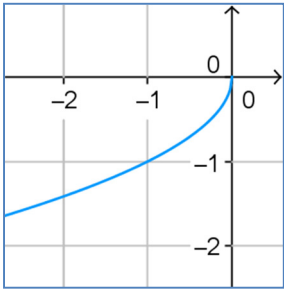
2. הבדלים קטנים שעושים את השינוי:

בטבלה הבאה נבנה פונקציות הפוכות לפונקציה הריבועית, בהן התחום מוגדר באופן שונה.

מומלץ להיעזר ביישומון "פונקציה הפוכה לפונקציה ריבועית".

א	הפונקציה	פונקציה הפוכה
ביטוי אלגברי	$f(x) = x^2$	$g(x) = -\sqrt{x}$
תחום	$x \leq 0$	$x \geq 0$
תחום ערכי הפונקציה	$f(x) \geq 0$	$g(x) \leq 0$
גרף		

ב	הפונקציה	פונקציה הפוכה
ביטוי אלגברי	$f(x) = -x^2$	$g(x) = \sqrt{-x}$
תחום	$x \geq 0$	$x \leq 0$
תחום ערכי הפונקציה	$f(x) \leq 0$	$g(x) \geq 0$
גרף		

ג	הפונקציה	פונקציה הפוכה
ביטוי אלגברי	$f(x) = -x^2$	$g(x) = -\sqrt{-x}$
תחום	$x \leq 0$	$x \leq 0$
תחום ערכי הפונקציה	$f(x) \leq 0$	$g(x) \leq 0$
גרף		

א. כיצד משפיעה הגדרת התחום על פונקציות השורש ההפוכה?

תשובה:

כאשר התחום של הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2$ הוא רק המספרים האי-שליליים אזי הפונקציה ההפוכה היא $g(x) = \sqrt{x}$.

כאשר התחום של הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2$ הוא רק המספרים האי-חיוביים אזי הפונקציה ההפוכה היא $g(x) = -\sqrt{-x}$.

ב. מה דומה ומה שונה בין הפונקציות השונות שקיבלתם?

תשובה:

בכל הפונקציות ההפוכות שקיבלנו מופיעה פונקצית השורש.

הפונקציות נבדלות בערכי הפונקציה המתקבלים, כאשר התחום של הפונקציה הרבועית הוא המספרים האי שליליים אזי ערכי הפונקציה ההפוכה הוא גם המספרים האי שליליים, ואז הפונקציה ההפוכה היא פונקצית השורש, וכאשר התחום הוא המספרים האי חיוביים אזי ערכי הפונקציה ההפוכה הוא גם המספרים האי חיוביים ואז הפונקציה ההפוכה היא מינוס פונקצית השורש.

למעשה, בעצם הסימון $\sqrt{x}$ יש החלטה לבחור את האי שלילי מבין שני השורשים האפשריים.

פעילות מתוך הספר אנליסה: פונקציות הפוכות ונגזרותיהן - בהוצאת הטכניון.

3. נתונות הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = x^2 - 1$ בתחום $x \geq 0$

2. $f(x) = (x - 1)^2$ בתחום $x \geq 0$

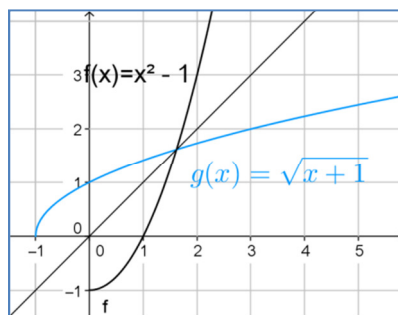
3. $f(x) = (x - 1)^2$

האם ניתן להגדיר פונקציה הפוכה לפונקציות אלו?
שקפו את הפונקציה ביחס לישר $y=x$ ובדקו האם קיבלתם פונקציה.
אם ישנה פונקציה הפוכה, שרטטו את הגרף שלה ורשמו עבורה ביטוי אלגברי.
ואם לא, שנו את התחום וקבעו מהי הפונקציה ההפוכה.

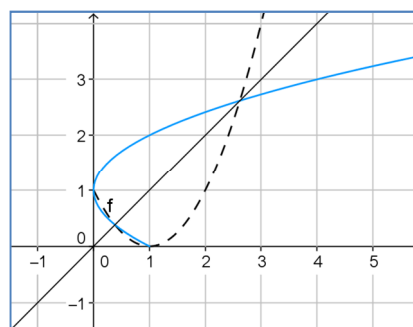
תשובה:

1. קיימת פונקציה הפוכה לפונקציה זו, כי היא פונקציה חד ערכית בתחום הנתון.

הפונקציה ההפוכה היא: $g(x) = \sqrt{x+1}$

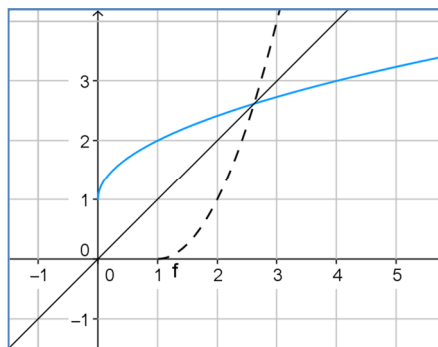


2. לא קיימת פונקציה הפוכה בתחום הנתון כי בתחום הנתון הפונקציה איננה חד ערכית, (כך שלמשל ל-0 ול-2 מתאים ערך אחד שהוא 1).



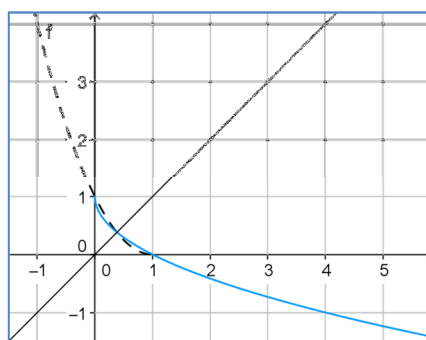
3. על מנת לקבל פונקציה הפוכה יש לשנות את התחום של $f(x)$ ל- $x \geq 1$ או ל- $x \leq -1$.

בתחום $x \geq 1$:



הפונקציה ההפוכה היא: $g(x) = \sqrt{x} + 1$

בתחום $x \leq 1$:



הפונקציה ההפוכה היא: $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

למתעניינים

[דף עבודה אינטראקטיבי](#) לחקירה של פונקציות הפוכות.

הזזות ומתיחות של פונקצית השורש

בחלק זה של היחידה אנו פועלים על הפונקציה הרבועית ובודקים איך זה משפיע על הפונקציה ההפוכה (פונקצית השורש). התנסות כזו מדגישה את היפוך התפקידים של המשתנים בפונקציה ובפונקציה ההפוכה שלה וגם את החשיבות של תחום ההגדרה. בהמשך היחידה אנו מטפלים בטרנספורמציה של פונקצית השורש כדוגמה נוספת להתנהגות של פונקציות תחת הטרנספורמציות השונות.

1. נזכר בהתנהגות משפחת הפונקציות הריבועיות: $f(x) = a(x - p)^2 + k$.

הפרמטר k אחראי על הזזת גרף הפונקציה אנכית (מעלה מטה).
הפרמטר p אחראי על הזזת גרף הפונקציה אופקית (ימינה שמאלה).
הפרמטר a אחראי על מתיחה וכווץ של גרף הפונקציה.

נתבונן בפונקציה הריבועית $f(x) = x^2$ ובפונקציה השורש $g(x) = \sqrt{x}$ ההפוכה לה.

א. נחקור בעזרת היישומון [פונקציה הפוכה לפונקציה ריבועית](#), כיצד הזזות ומתיחות של הפונקציה הריבועית משפיעות על פונקצית השורש ההפוכה. הציגו נקודות סימטריות ביישומון [פונקציה הפוכה לפונקציה ריבועית](#) הזיזו את את הנקודה A על הפרבולה ועקבו אחריה.

תשובה:

שיעורי הנקודות הסימטריות מתחלפות ביניהן.

תהי $A = (a, b)$ נקודה על הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2$, אזי בפונקציה ההפוכה ערך הפונקציה הוא עכשיו ערך- x וערך ה- x של הפונקציה הריבועית הופך להיות ערך פונקצית השורש.
כלומר $A_1 = (b, a)$

ב. הזיזו את הפונקציה הריבועית אנכית.

יש לשים לב לתחום ההגדרה.

1. כיצד זזה פונקצית השורש ההפוכה לה? התוכלו להסביר את התופעה?

תשובה:

פונקציה השורש ההפוכה זזה אופקית.

תהי הנקודה $A = (a, b)$ נקודה על הפונקציה הריבועית: $f(x) = x^2$. עקב ההזזה האנכית רק שיעור ה- y משתנה, ובהופכית זה הופך להיות שיעור ה- x , ולכן ישנה הזזה אופקית.

2. איזו נקודה מתאימה לקודקוד הפרבולה? מה הקשר בין שיעורי הנקודות הללו?

תשובה:

לקודקוד הפרבולה שנמצא על ציר y מתאימה נקודת החיתוך של פונקצית השורש עם ציר x .

נקודת הקודקוד של הפרבולה היא גם נקודת חיתוך פונקצית השורש עם ציר x .

3. על פי הדוגמאות שערו מהי הפונקציה ההפוכה לפונקציה הריבועית $f(x) = x^2 + k$,

תשובה:

$$g(x) = \sqrt{x - k}$$

ג. **היזו** את הפונקציה הריבועית **אופקית**.

שימו לב לתחום ההגדרה.

1. כיצד זוהי פונקצית השורש ההפוכה לה? התוכלו להסביר את התופעה?

תשובה:

פונקציה השורש ההפוכה זוהי אנכית.

תהי הנקודה $A = (a, b)$ נקודה על הפונקציה הריבועית: $f(x) = x^2$. עקב ההזזה האופקית רק

שיעור ה- x משתנה, ובהופכית זה הופך להיות שיעור ה- y , ולכן ישנה הזזה אנכית.

2. איזו נקודה מתאימה לקודקוד הפרבולה? מה הקשר בין שיעורי הנקודות הללו?

תשובה:

לקודקוד הפרבולה שנמצא על ציר x מתאימה נקודת החיתוך של פונקצית השורש עם ציר y .

הקודקוד של הפרבולה הוא $(0, y)$, ונקודת החיתוך של הפונקציה ההפוכה היא בהתאם $(y, 0)$.

3. אם נתון $f(x) = (x - p)^2$, רשמו תבנית לפונקציה ההפוכה.

תשובה:

$$g(x) = \sqrt{x + p}$$

ד. **מתחו** את הפונקציה הריבועית.

שימו לב לתחום ההגדרה.

1. כיצד נמתחה פונקצית השורש ההפוכה לה? התוכלו להסביר את התופעה?

תשובה:

פונקצית השורש נמתחת אופקית כאשר הפונקציה הריבועית נמתחת אנכית.

2. איזו נקודה מתאימה לקודקוד הפרבולה? מה הקשר בין שיעורי הנקודות הללו?

תשובה:

לקודקוד הפרבולה שנמצא על ציר y מתאימה נקודת החיתוך של פונקצית השורש עם ציר x .

נקודת הקודקוד של הפרבולה היא גם נקודת חיתוך פונקצית השורש עם ציר x . שיעורי הנקודות

מתחלפות ביניהן.

3. אם נתון $f(x) = ax^2$, רשמו תבנית לפונקציה ההפוכה.

תשובה:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{a}}$$

ה. רשמו תבנית כללית לפונקצית השורש ההפוכה לפונקציה הריבועית $f(x) = a(x - p)^2 + k$.

תשובה:

$$g(x) = \sqrt{\frac{x - k}{a}} + p$$

הזזות ומתיחות של פונקצית השורש

במשימות הבאות היעזרו בתוכנה לשרטוט פונקציות (כגון [desmos.com](https://www.geogebra.org) או [geogebra.org](https://www.geogebra.org)).

2. נחקור את התנהגות משפחת פונקציות השורש $f(x) = a\sqrt{x-p} + k$.

א. קבעו את $a=1$, ושנו את הפרמטרים p ו- k . הסבירו כיצד הם משפיעים על גרף הפונקציה.

תשובה:

הפרמטר k גורם להזזה אנכית.

הפרמטר p גורם להזזה אופקית.

ב. כיצד משתנה תחום ההגדרה של הפונקציה?

תשובה:

הפרמטר k אינו משפיע על תחום ההגדרה.

הפרמטר p קובע את תחום ההגדרה, $x \geq p$.

ג. מה ניתן לומר על הנקודה (p, k) ?

תשובה:

היא קצה הגרף של הפונקציה.

ד. שנו את ערכי הפרמטר a , ותארו כיצד הוא משפיע על התנהגות גרף הפונקציה. (הבחינו בין ערכים חיוביים לשליליים).

תשובה:

כאשר ערך הפרמטר a חיובי, אזי ככל שהוא גדל הגרף נמתח אנכית.

כאשר ערך הפרמטר a שלילי, אזי ככל שהוא קטן הגרף נמתח אנכית. (הגרף מתהפך)

3. נחקור כיצד משפיע הערך המוחלט של משפחת פונקציות שורש $f(x) = a\sqrt{x-p} + k$.

תארו כיצד נראה הגרף $g(x) = |f(x)| = |a\sqrt{x-p} + k|$. אפיינו מקרים שונים.

א. עבור אילו מקרים מתקיים $f(x) = g(x)$? הסבירו מדוע.

תשובה:

כאשר $f(x)$ נמצאת מעל ציר ה- x , הערך המוחלט של הפונקציה שווה לפונקציה עצמה כי היא הפונקציה חיובית.

ב. עבור אילו מקרים מתקיים $f(x) \geq g(x)$ לכל x ? הסבירו מדוע.

תשובה:

כאשר הגרף של $f(x)$ נמצא כולו על או מתחת לציר ה- x , כי היא אז פונקציה שלילית, ואז הערך המוחלט של הפונקציה הוא פונקציה חיובית, ולכן גדול מהפונקציה לכל x .

ג. עבור אילו מקרים מתקיים $f(x) \leq g(x)$ לכל x ? הסבירו מדוע.

תשובה: מתקיים רק שיוויון בין שתי הפונקציות כאשר $f(x) \geq 0$.

כאשר $f(x) < 0$ פונקציית הערך המוחלט היא חיובית ולכן איננה יכולה להיות קטנה מערך שלילי.

GeoGebra



גאוגברה:

פונקציית השורש: $\text{sqrt}(x)$
פונקציית ערך מוחלט: $\text{abs}(x)$



קביעת פרמטרים על ידי הוספת מחוון (סליידר) . ורק אחר כך יש לרשום בחלון הקלט את הפונקציה כולל הפרמטרים.



desmos.com תוכנה אינטרנטית לשרטוט פונקציות.

רשמו בחלון הקלט את הפונקציה, כולל הפרמטרים a, p, k . שימו לב למקלדת המאפשרת כתיבה מתמטית. אשרו את הוספת הסליידרים (מחווים) אשר יאפשרו לכם לשנות את ערך הפרמטרים.

רשימת יישומונים

4. טיול אופניים - הזזות: [HTML](#), [גאוגברה](#)
5. בבריכת השחיה – מתיחות: [HTML](#), [גאוגברה](#)
6. טרנספורמציות: [HTML](#), [גאוגברה](#)
7. קשרים בריבוע: [HTML](#), [גאוגברה](#)
8. זוגות של פונקציות הפוכות: [HTML](#), [גאוגברה](#)
9. פונקציה הפוכה לפונקציה ריבועית: [HTML](#), [גאוגברה](#)