חקירת פונקציות פולינום

ההיכרות עם חקירה של פונקציות פולינום מפגישה את התלמידים לראשונה עם האפשרות לסרטט, תוך שימוש בנגזרת, גרפים של פונקציות לא מוכרות להם, באופן המשקף נאמנה תכונות רבות של הפונקציות.

מלבד השימוש במושג הנגזרת שזה עתה נרכש, מושג מופשט ושונה מכל מה שהכירו עד כה במסגרת לימודי המתמטיקה, העיסוק בחקירת פונקציות דורש מהתלמידים מיומנות רבה של: ארגון נתונים, טכניקה אלגברית, פירוש התוצאות שקיבלו, והצגתן בצורה מסודרת.

הפרק מציג מגוון אפשרויות לארגן את המידע בטבלאות ולפרש אותו, אפשרויות היכולות להתאים לתלמידים שונים ולשלבים שונים בהוראה, וכן דרכים שונות לבניית משימות לתלמידים.

לצד חקירת פונקציות ומשפחות של פונקציות מוקדש דיון מיוחד להתנהגות גלובלית של פונקציות פולינום, ולצורות אופייניות של הגרפים שלהן.

פעילות 1: חקירת פונקציית פולינום פשוטה בדרכים שונות

חקירת פונקציות דורשת, בנוסף להבנת העקרונות המונחים בבסיס החקירה, גם איסוף וארגון של אינפורמציה רבה. הפעילות הנוכחית מציגה שלוש דרכים לאיסוף החומר ולהצגת המסקנות העולות מן החקירה. הפונקציות המדגימות את תהליך החקירה מתאימות למפגש ראשון של תלמידים עם חקירת פונקציות : הטכניקה האלגברית הכרוכה בתהליך החקירה פשוטה. הפונקציה הראשונה מדגימה מקרה שבו כל נקודה חשודה כקיצון היא אכן נקודת קיצון. הפונקציה השנייה מדגימה מקרה בו נקודה חשודה כקיצון מתגלה כנקודת פיתול.

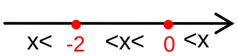
מקרה 1: כל הנקודות החשודות הן נקודות קיצון
מצאו את נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה הפונקציה $f(x)=x^3+3x^2$.

נציג שלוש דרכים לחקירת הפונקציה ולתיעוד החקירה. לכל אחת מהאפשריות יתרונות משלה. בהמשך נציג דרך נוספת העושה שימוש בנגזרת השנייה.

שלוש הדרכים נעזרות בנגזרת הפונקציה בכדי למצוא נקודות העשויות להיות נקודות קיצון (נקודות "חשודות לנקודות קיצון").

נגזור, אם כן, את הפונקציה $f(x)=x^3+3x^2$, ונקבל: $f'(x)=3x^2+6x$.

על-ידי השוואת הנגזרת לאפס, הנגזרת מתאפסת כאשר $x_1=-2$ וכאשר $x_2=0$. נדגיש כי התאפסות הנגזרת אינה מבטיחה קיום של נקודות קיצון, ולא מנדבת מידע על סוגן (מינימום/מקסימום). בכדי לחשוף מידע זה, נשים לב שנקודות האפס של הנגזרת מחלקות את ציר ה- x לשלושה תחומים (איור 1).



איור 1

בכדי לבחון האם נקודות האפס של הנגזרת שמצאנו הן אכן נקודות קיצון ולקבוע את סוגן, נחקור את התנהגות הפונקציה בכל אחד מהתחומים הללו. נציין כי היות והנגזרת שומרת על סימן קבוע בכל תחום שאינו מכיל בתוכו נקודת אפס שלה, הפונקציה המקורית שומרת על המגמה - עלייה/ירידה - בכל תחום כזה. מכאן נוכל להמשיך באחת משלוש הדרכים הבאות.

דרך א: הצגת ערכי הנגזרת בטבלה $f'(x)=3x^2+6x$

x	-4	-2	-1	0	1
y'	24	0	-3	0	9
y	↗ עלייה		↘ ירידה		↗ עלייה

נחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקיצון ונסיק:

$f(0)=0$ מינימום מקומי.

$f(-2)=4$ מקסימום מקומי.

תחומי עלייה: $x<-3$, $0<x$

תחום עלייה: $-3<x<0$

דרך ב: הצגת ערכי הפונקציה בטבלה $f(x)=x^3+3x^2$

x	-4	-2	-1	0	1
y	-16	4	2	-1	4
y	↗ עלייה		↘ ירידה		↗ עלייה

נסיק:

$f(0)=0$ מינימום מקומי.

$f(-2)=4$ מקסימום מקומי.

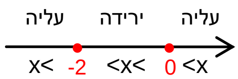
תחומי עלייה: $x<-3$, $0<x$

תחום עלייה: $-3<x<0$

דרך ג: שיקולים איכותניים

נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה הנגזרת שהוא פרבולה בעלת מינימום.

על-פי סימני הנגזרת (הפונקציה הריבועית) נקבע את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה הנתונה:



נחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקיצון ונסיק:

$f(0)=0$ מינימום מקומי.

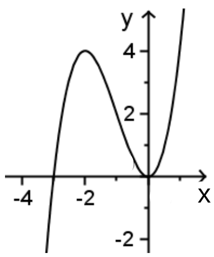
$f(-2)=4$ מקסימום מקומי.

תחומי עלייה: $x<-3$, $0<x$

תחום עלייה: $-3<x<0$

מציאת נקודות האפס של הנגזרת לא מבטיחה, כאמור, קיום של נקודות קיצון. אולם, היות ופונקציית פולינום גזירה בכל נקודה, כן מובטח ש**אף נקודה אחרת אינה יכולה להיות נקודת קיצון**.

גרף הפונקציה $y=x^3+3x^2$ מוצג באיור 2.



איור 2

לכל אחת משלוש הדרכים שהוצגו לעיל יתרונות וחסרונות. אין תשובה אחת לשאלה איזו דרך עדיפה, והאם יש להציג לתלמידים יותר מאשר דרך פתרון אחת. בדרך כלל, בכיתות חלשות מתאים להציג דרך אחת, ובכיתות חזקות חשוב להציג דרכים אחדות, כך ניתן להציג את החקירה בכמה אופנים תוך קישור המידע המתקבל והצלבתו.

שימו לב כי בכל אחת מהדרכים, סרטוט ציר המספרים וסימון תחומים חלקיים מקל על התלמידים, מאפשר להם לבדוק שאכן הם התייחסו לכל תחום חלקי, וגם מקל על הכתיבה הפורמלית של תחומי העלייה והירידה. כמו כן, ריכוז הנתונים בטבלאות עוזר לתלמידים לארגן את החקירה ולתעד אותה.

יתרונות דרך א: היתרון הגדול של דרך זו היא בפשטותה. שכן בפונקציות פולינומיאליות הצבה בנגזרת פשוטה מהצבה בפונקציה. יתרון נוסף כרוך בהפעלת שיקולים המתבססים על הקשר בין סימן הנגזרת לעלייה וירידה של הפונקציה. שיקולים אלה חיוניים כדי לבסס אצל התלמידים את הבנת מושג הנגזרת, ואת הבנת הקשרים בין הנגזרת לבין הפונקציה.

יתרונות דרך ב: הטבלה המשמשת לחקירת התנהגות הפונקציה כבר מכילה את ערך הפונקציה בנקודות הקיצון, ויכולה לשמש לסרטוט גרף הפונקציה עם ערכים מדויקים. בהמשך, כאשר נדון בפונקציות שאינן פולינומיאליות, נגלה כי הצבה בפונקציה היא פעמים רבות נוחה יותר מהצבה בנגזרת.

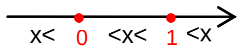
יתרונות דרך ג: שיקולים איכותניים עשויים לחסוך עבודה אלגברית רבה. הפעלת שיקולים אלו דורשת הבנה מעמיקה של התלמידים, ומתאימה לשלבים המאוחרים יותר של הלמידה.

מקרה 2: אחת מהנקודות החשודות מתגלה כנקודת פיתול

מצאו נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של הפונקציה $\boldsymbol{f(x)=3x^4-4x^3}$.

מטרת חקירה זו היא להדגים פונקציות אשר יש להן נקודות אפס של הנגזרת שאינן נקודות קיצון. בפעילות הקודמת הדגשנו כי התאפסותה של הנגזרת בנקודה אינה מבטיחה קיום של קיצון (מקסימום או מינימום) באותה הנקודה. מכך, אך טבעי הוא להביא כעת דוגמה לפונקציה אשר לנגזרתה יש נקודת איפוס, שאיננה נקודת קיצון של הפונקציה.

נגזור תחילה את הפונקציה: $f(x)=3x^4-4x^3$. ונקבל: $f'(x)=12x^3-12x^2$. נקודות האפס של הנגזרת $x=0, x=1$ מחלקות את ציר ה- x לשלושה קטעים (איור 3).



איור 3

כעת נחקור ונבדוק האם נקודות אלו הן אכן נקודות קיצון. נדגים שוב את השימוש ב- 3 הדרכים שהוצגו בסעיף הקודם.

דרך א: הצגת ערכי הנגזרת בטבלה $\boldsymbol{f'(x)=12x^3-12x^2}$

x	-1	0	0.5	1	2
y'	-24	0	-1.5	0	48
y	ירידה		ירידה		עלייה

על-פי סימני הנגזרת ניתן לראות כי הפונקציה יורדת עד לנקודה לנקודה $x=0$ וממשיכה לרדת גם בתחום $0<x<1$. נסיק כי לפונקציה אין נקודת קיצון ב- $x=0$. הנקודה $x=1$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

תחום עלייה: $1<x$.

תחום ירידה: $x<1$.

דרך ב: הצגת ערכי הפונקציה $\boldsymbol{f(x)=3x^4-4x^3}$ **בטבלה**

x	-1	0	0.5	1	2
y	7	0	-0.31	-1	16
y	ירידה		ירידה		עלייה

על-פי ערכי הפונקציה ניתן לראות כי הפונקציה יורדת עד אשר $x=0$, וממשיכה לרדת גם בתחום $0<x<1$. מכך, מגיעים למסקנה כי לפונקציה אין נקודת קיצון ב- $x=0$. כאשר $x=1$ יש לפונקציה מינימום בנקודה $(1,-1)$.

תחום עלייה: $1<x$.

תחום ירידה: $x<1$.

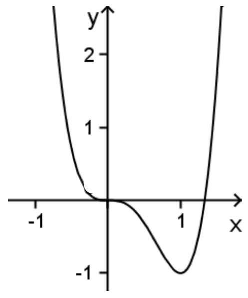
דרך ג: שיקולים איכותניים $\boldsymbol{f(x)=3x^4-4x^3}$

על-ידי הוצאת גורם משותף והפיכת הנגזרת למכפלה, ניתן לראות כי היא מתאפסת כאשר $x=0, x=1$. כמו כן, ניתן לראות כי המכפלה מקבלת ערכים שליליים כאשר $x<0$ וגם כאשר $0<x<1$. מכאן שהנקודה $x=0$ איננה נקודת קיצון של הפונקציה $f(x)$. בנקודה $x=1$ הנגזרת מחליפה סימן, משלילי לחיובי, כלומר, עוברת מירידה לעלייה. מכאן שהנקודה $x=1$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

תחום עלייה: $1<x$.

תחום ירידה: $x<1$.

שלוש דרכי החקירה הובילו אותנו למסקנה כי בנקודה $x=0$ הפונקציה אינה מקבלת ערך קיצון, בעוד שכאשר $x=1$ יש לפונקציה מינימום. גרף הפונקציה $y=3x^4-4x^3$ מוצג באיור 4.



איור 4

פעילות 2: מה ניתן לדעת על הפונקציה ללא שימוש בנגזרת?

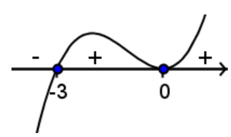
כפי שראינו, נגזרת הפונקציה היא כלי מרכזי בחקירת פונקציות. אולם, גם בלעדיה ניתן לקבל על הפונקציה מידע רב. מומלץ לחזור אל דרכי החקירה שהוצגו בפרק "רגע לפני הנגזרת", ולהעלות את השאלה מה ניתן לדעת על גרף הפונקציה ללא שימוש בנגזרת, לפני החקירה באמצעות הנגזרת או אחריה.

בפעילות הנוכחית נתבונן בשתי הפונקציות שנחקרו בפעילות הקודמת ונבדוק מה ניתן לדעת על הגרפים שלהן ללא שימוש בנגזרת.

משימה: חקרו את הפונקציות הבאות: $f(x)=x^3+3x^2$ ו- $g(x)=3x^4-4x^3$ ללא שימוש בנגזרת.

<table>
<tr><th>הפונקציה $f(x)=x^3+3x^2$</th><th>הפונקציה $g(x)=3x^4-4x^3$</th></tr>
<tr><td>
נקודות האפס של הפונקציה הן: $x=-3, x=0$.

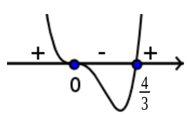
ללא שום מידע נוסף נוכל להסיק שלפונקציה יש נקודת קיצון בין שתי נקודות האפס שלה.

נמצא תחומי חיוביות ושליליות באחת הדרכים שהוצגו בפרק "רגע לפני הנגזרת".


כעת נוכל להסיק בוודאות שיש לפונקציה נקודת מינימום (0,0), ושיש לה נקודת מקסימום בתחום $-3<x<0$.

לא נוכל לדעת שאין לפונקציה נקודות קיצון נוספות, כי לא נוכל להסיק בוודאות מהם תחומי העלייה/ הירידה שלה. כמו כן לא נוכל לדעת את מספר נקודות הפיתול שלה, כי לא נוכל להסיק בוודאות מהם תחומי הקעירות שלה, כלפי מעלה וכלפי מטה.
</td><td>
נקודות האפס של הפונקציה: $x=0, x=\frac{4}{3}$.

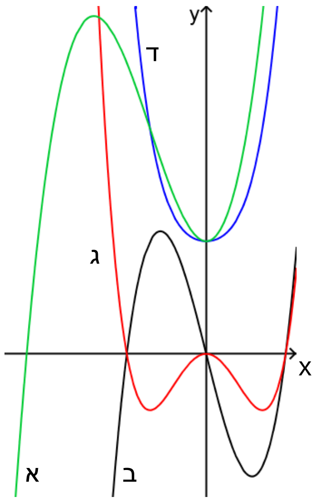
ללא שום מידע נוסף נוכל להסיק שלפונקציה יש נקודת קיצון בין שתי נקודות האפס שלה.

נמצא תחומי חיוביות ושליליות באחת הדרכים שהוצגו בפרק "רגע לפני הנגזרת".


כעת נוכל להסיק בוודאות שיש לפונקציה נקודת מינימום בתחום $0<x<\frac{4}{3}$.

לא נוכל לדעת שאין לפונקציה נקודות קיצון נוספות, כי לא נוכל להסיק בוודאות מהם תחומי העלייה/ הירידה שלה. כמו כן לא נוכל לקבוע ש- $(0,0)$ היא נקודת הפיתול של הפונקציה, כי לא נוכל להסיק בוודאות מהם תחומי הקעירות שלה, כלפי מעלה וכלפי מטה.
</td></tr>
</table>

פעילות 3: שיקולי זוגיות ואי-זוגיות בחקירת פונקציות



איור 5

באיור 5 מופיעים הגרפים של הפונקציות הבאות:

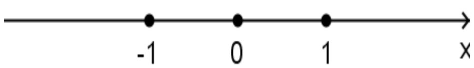
$f(x)=2x(x^2-2)$ $\qquad g(x)=x^4-2x^2$

$h(x)=x^4+x^2+2$ $\qquad p(x)=x^3+3x^2+2$

1. זהו איזה גרף מתאים לכל פונקציה.
2. זהו את הפונקציות הזוגיות ואת הפונקציות האי-זוגיות מבין הפונקציות הנתונות.
3. חקרו את הפונקציות f ו- g.

- בבניית משימות מסוג זה והתאמתן לתלמידי הכיתה נשאל את עצמנו:
  - האם אנחנו רוצים שהתלמידים ידעו לזהות את הפונקציות לפני החקירה או אחריה?
  - האם נציג מספרים/ שנתות על הצירים?
  - האם נציג את הפונקציות במערכת צירים אחת?
  - האם נבחר את אותו חלון להצגת כל הפונקציות?
- בפעילות זו הפונקציות נבחרו כך שלכל שתי פונקציות אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y, ולשתי פונקציות יש אותן נקודות חיתוך עם ציר ה- x, וזאת כדי לעודד את התלמידים לשקול שיקולים שאינם קשורים לנקודות החיתוך עם הצירים.
- כדי להצדיק את ההבחנה שהפונקציה זוגית (או אי-זוגית) יש להתבסס על ההגדרה או על הכללות מוכרות לתלמידים (אם יש כאלה). למשל, הפונקציה $g(x)=x^4-2x^2$ זוגית כיוון שהיא סכום של שתי פונקציות זוגיות - פונקציות חזקה עם מעריך זוגי. הסבר אחר: $g(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=g(x)$.

כיוון שהפונקציה $g(x)=x^4-2x^2$ זוגית, ניתן לחקור את התנהגותה בקרן האי-שלילית של ציר ה- x, ולהסיק את התנהגות הפונקציה על כל ציר המספרים, משיקולי סימטריה. נגזרת הפונקציה: $g'(x)=4x^3-4x$. נקודות האפס של הנגזרת: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, מחלקות את ציר ה- x לשלושה תחומים חלקיים.



זוגיות הפונקציה מאפשרת לקצר את תהליך החקירה באופן הבא:

⇦ נבנה טבלה ונחשב את ערכי הפונקציה רק עבור מספרים אי- שליליים (טבלה 1).

⇦ נרשום את ערכי הפונקציה $g(x)=x^4-2x^2$ בנקודות סימטריות, בהתבסס על זוגיות הפונקציה (טבלה 2).

⇦ נשלים את החקירה.

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
g(x)			↓	0	-0.44	-1	8

טבלה 1

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
g(x)	8	-1	-0.44	0	-0.44	-1	8
	↘	↗	↗	↘		↘	↗

טבלה 2

פעילות 4: חקירת פונקציות בשירות האלגברה

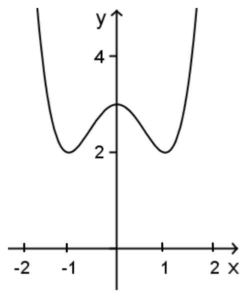
פעילות זו מדגימה שאלות שניתן לענות עליהן באמצעות גרף הפונקציה, כשהכלים האלגבריים לא קיימים, לא יעילים, או מוציאים את העוקץ מהשאלה. משימות כאלה מקשרות בין נושאים במתמטיקה. מתאים לשבץ שאלות מסוג זה בהמשך לחקירת פונקציה, כדי להדגים מידע נוסף שניתן להפיק מהפונקציה שנחקרה.

משימה מס' 1

הראו כי האי-שוויון $x^4-2x^2+3>0$ נכון לכל x.

פתרון: חקירת הפונקציה $y=x^4-2x^2+3$ מראה שערך הפונקציה בשתי נקודות המינימום המוחלט חיובי, ולכן הגרף נמצא כולו מעל ציר ה- x.

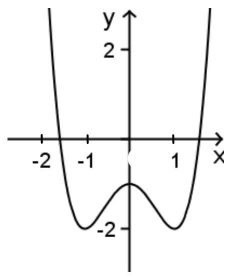
מהגרף ניתן לראות כי האי- שוויון $x^4-2x^2+3>0$ נכון לכל x.



משימה מס' 2

כמה פתרונות למשוואה $x^4-2x^2-2=0$?

פתרון: גרף הפונקציה $y=x^4-2x^2-2$ מתקבל על-ידי הזזת גרף הפונקציה $g(x)=x^4-2x^2$ (פעילות 3) ב- 2 יחידות כלפי מטה. מהגרף ניתן לראות כי למשוואה ישנם שני פתרונות (נשים לב כי נתבקשנו למצוא את מספר הפתרונות ולא את הפתרונות עצמם).

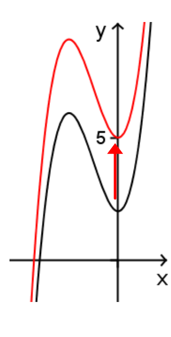


דרך נוספת לפתור את השאלה היא לבדוק כמה פעמים חותך הישר $x=2$ את גרף הפונקציה $g(x)=x^4-2x^2$.

משימה מס' 3

הראו שלמשוואה $x^3+3x^2+5=0$ יש פתרון יחיד המתקבל עבור $x<0$.

פתרון: לאחר שסרטטנו את גרף הפונקציה $p(x)=x^3+3x^2+2$ (גרף א באיור 5) נוכל, על-ידי הזזתו 3 יחידות כלפי מעלה, לקבל את גרף הפונקציה $y=x^3+3x+5$. נוכל להסיק שגרף הפונקציה חותך פעם אחת את ציר ה- x, בנקודה שבה $x<0$

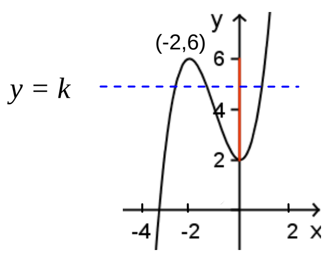


משימה מס' 4

עבור אילו ערכים של k יש למשוואה $x^3+3x^2+2=k$ בדיוק 3 פתרונות?

נשים לב כי ניתן לפרש את השאלה באופן הבא: עבור אילו ערכי k הישר $y=k$ חותך שלוש פעמים את גרף הפונקציה $p(x)=x^3+3x^2+2$ (גרף א באיור 5).

ערכי k המתאימים לדרישה הם: $2<k<6$. כל ישר $y=k$ עם k כנ"ל, חותך את גרף הפונקציה פעם אחת בתחום הירידה ופעם בכל תחום עלייה.



פעילות 5: דרכים שונות לשלב פרמטרים בחקירת פונקציות

בפעילות הנוכחית, נביא סקירה של הדרכים בהן ניתן לשלב פרמטרים בתוך שאלות של חקירת פונקציות. על-ידי שילוב פרמטרים נוכל לשדרג פעילויות קיימות ולהתאימן לרמת הכיתה. לשם כך, נתבונן תחילה בשלוש משימות המכילות פרמטרים ונעמוד על מאפייניהן.

שלוש המשימות הבאות עוסקות בחקירה של משפחת הפונקציות $y = x^3 - 3bx$.

משימה מס' 1	**משימה מס' 2**	**משימה מס' 3**
לפונקציה $y = x^3 - 3bx$ יש נקודת קיצון כאשר $x = 1$. א. מצאו את ערכו של הפרמטר b. ב. חקרו את הפונקציה עם ערך b אשר מצאתם, וסרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.	לפניכם שלוש פונקציות: (1) $y = x^3 - 3x$ (2) $y = x^3 + 3x$ (3) $y = x^3 - x$ א. רשמו לפחות שתי תכונות משותפות לכל הפונקציות. ב. רשמו משפחה של פונקציות שכוללת את שלוש הפונקציות. ג. האם התכונות שציינתם משותפות לכל הפונקציות במשפחה? הוכיחו.	נתונה משפחת הפונקציות $y = x^3 - 3bx$, כאשר הפרמטר b הוא מספר ממשי כלשהו. חקרו את משפחת הפונקציות (במידת הצורך רשמו את תשובתכם באמצעות הפרמטר), וסרטטו את סקיצות הגרפים של פונקציות מהמשפחה, תוך הבחנה בין מקרים שונים בהתאם לערך הפרמטר b.

במשימה מס' 1 המידע הנתון מאפשר לדעת שנגזרת הפונקציה מתאפסת כאשר $x = 1$. ערך הפרמטר $b = 1$ מתקבל על-ידי הצבת $x = 1$ ו- $y' = 0$ ב- $y' = 3x^2 - 3b$. לאחר שמצאנו את ערכו של b, נוכל להמשיך בחקירה כפי שעשינו זאת עד כה.

משימה מס' 2 מכוונת לזיהוי משפחת הפונקציות מהצורה: $y = x^3 + mx$, ולזיהוי תכונות משותפות של פונקציות השייכות אליה. נשים לב שמשפחה זו היא משפחת הפונקציות $y = x^3 - 3bx$ המופיעה במשימות האחרות.

משימה מס' 3 מכוונת לחקירת משפחת פונקציות תוך שימוש בפרמטרים בכל מהלך החקירה. במשימה זו מתבקשים התלמידים לסרטט סקיצות של גרפים אחדים המאפיינים את משפחת הפונקציות.

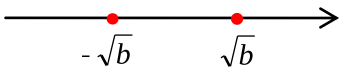
אבני דרך בפתרון של משימה מס' 3

נגזור את הפונקציה $y=x^3-3bx$ ונקבל: $y'=3x^2-3b$. מכאן: $y'=0 \Rightarrow x^2=b$. נבחין בין שלושת המקרים הבאים: $b>0$, $b=0$ ו- $b<0$.

כאשר $b=0$ מתקבלת הפונקציה: $y=x^3$. המשך החקירה שלה זהה לחקירות שעשינו עד כה.

כאשר $b<0$ למשוואה $x^2=b$ אין פתרון. מכך, בתת-המשפחה $y=x^3-3bx$ עם $b<0$, לפונקציות אין נקודת קיצון. פונקציות אלה עולות בכל תחומן.

כאשר $b>0$ נקודות האפס של הנגזרת, $x_1=-\sqrt{b}$ ו- $x_2=\sqrt{b}$ מחלקות את ציר ה- x לשלושה תחומים חלקיים (איור 6):



איור 6

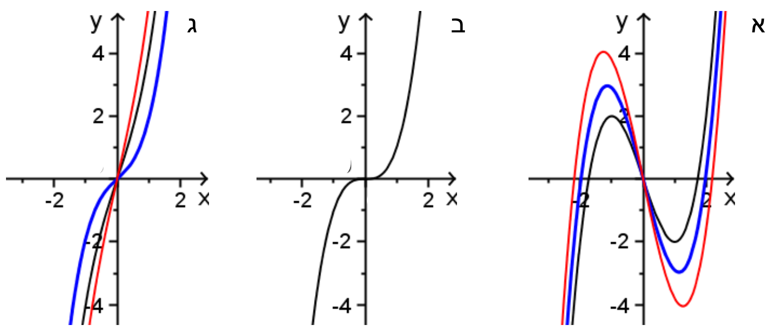
נבנה טבלת ערכים (טבלה 3) שבה נציב את ערכי **הנגזרת** בנקודות מייצגות.
להצבה בנגזרת שני יתרונות: א.תבנית הנגזרת פשוטה יותר. ב. בדרך כלל קל יותר לבדוק האם הערך של נגזרת המיוצג בעזרת פרמטר הוא חיובי או שלילי, מאשר להשוות בין שני ערכי פונקציה המיוצגים על-ידי פרמטר.

x	$-2\sqrt{b}$	$-\sqrt{b}$	0	$\sqrt{b}$	$2\sqrt{b}$
$y'=3x^2-3b$	$9b$	0	$-3b$	0	$9b$
סימן הנגזרת	$+$	0	$-$	0	$+$
התנהגות הפונקציה	↗		↘		↗

טבלה 3

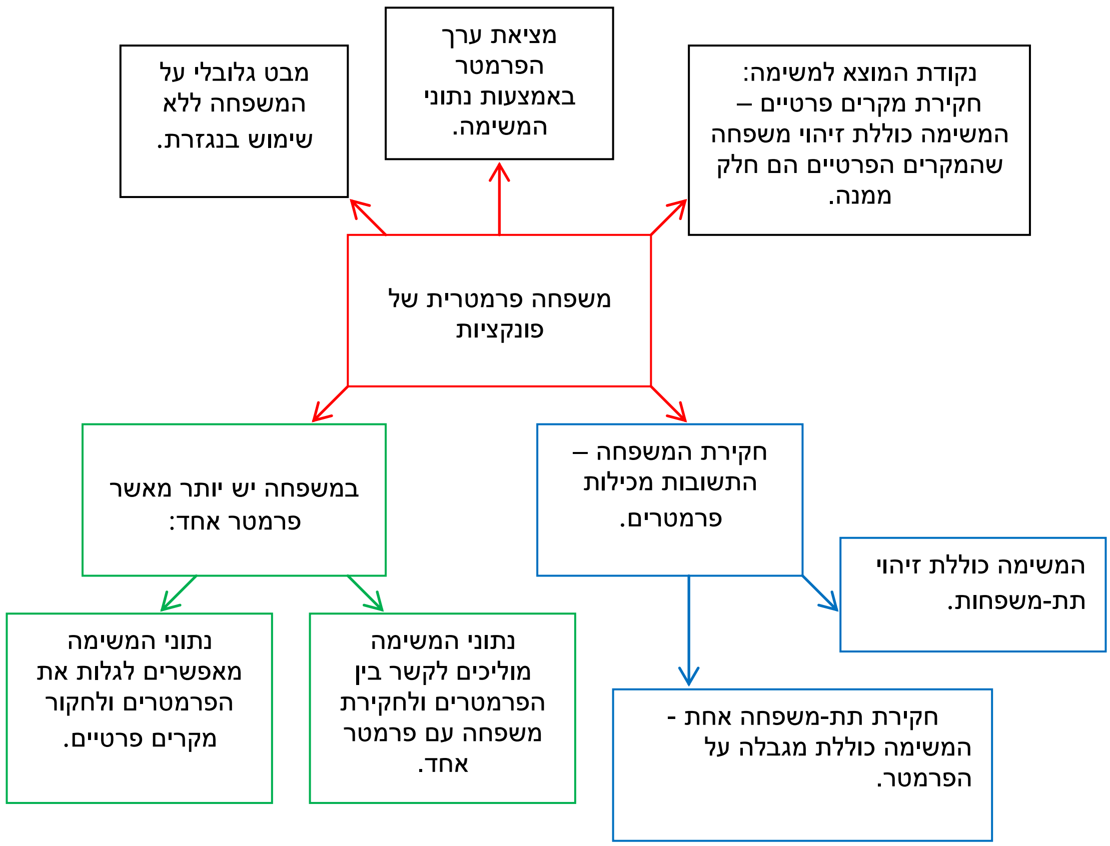
מהטבלה נובע כי לכל פונקציה בתת-משפחה $y=x^3-3bx$ עם $b>0$ יש שתי נקודות קיצון: נקודת מקסימום $x=-\sqrt{b}$, ונקודת מינימום $x=\sqrt{b}$.

איור 7 מציג גרפים אופייניים של פונקציות מהמשפחה $y=x^3-3bx$, כאשר הפרמטר b הוא מספר ממשי כלשהו.



איור 7: גרפים של פונקציות מהמשפחה $y=x^3-3bx$. א. $b>0$ ב. $b=0$ ג. $b<0$

למרות ששלוש המשימות עוסקות באותה משפחת פונקציות, הן שונות מאוד במהותן ובסוג האתגר שהן מציגות לתלמידים. איור 8 מציג מגוון אפשרויות לשילוב פרמטרים במשימות של חקירת פונקציות.



איור 8

פעילות 6: חקירת פונקציה בתחום שהוא קטע סגור

בפעילות הנוכחית נציג מקרים של חקירת פונקציות פולינומיאליות בתחום סגור. לפעמים מעניין אותנו לחפש נקודות קיצון של פונקציה המוגדרת בקבוצה חלקית של המספרים הממשיים. אחד היישומים של חקירת פונקציה בתחום שאינו הישר הממשי כולו הוא בפתרון בעיות ערך קיצון מציאותיות. בפעילות הנוכחית נתרכז במציאת הנקודות של קיצון מוחלט בתחום שהוא קטע סגור.

נשים לב כי נקודה פנימית של תחום עלייה לא יכולה להיות נקודת קיצון מוחלט. על גרף הפונקציה קיימות מימין נקודות גבוהות יותר ומשמאל נקודות נמוכות יותר. באופן דומה גם נקודה פנימית של תחום ירידה לא יכולה להיות נקודת קיצון מוחלט. לכן נקודת קיצון מוחלט יכולה להיות, במקרה הכללי, או נקודה בקצה התחום או נקודה שבה הנגזרת מתאפסת, או נקודה שבה הנגזרת אינה מוגדרת.

לכן בפונקציה שגזירה בכל תחומה, נחפש נקודות קיצון מוחלט בקצה התחום ובנקודות האפס של הנגזרת.

בעת בחירת התרגילים של מציאת מקסימום/מינימום מוחלט של פונקציה נתונה בקטע סגור, חשוב לזמן לתלמידים סיטואציות בהן:

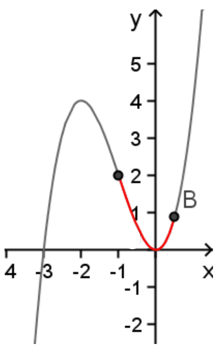
- יהיה צריך לפסול נקודות חשודות שהן מחוץ לתחום, ולעתים את כל נקודות האפס של הנגזרת.
- הערך של הפונקציה בקצות התחום בהם הנגזרת אינה מתאפסת, יהיה גדול יותר/ קטן יותר מערך הפונקציה בנקודות מקסימום/מינימום מקומי בהן הנגזרת מתאפסת.
- הערך המקסימלי/המינימלי של הפונקציה יתקבל ביותר מאשר נקודה אחת, וכתוצאה מכך תתקבל יותר מנקודת מקסימום /מינימום מוחלט אחת.

להלן כמה הצעות לפעילות ברוח זו:

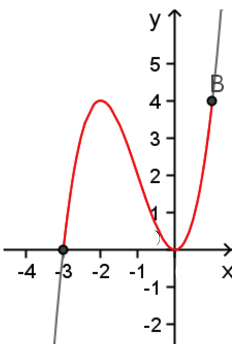
1. מצאו נקודות מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט של הפונקציה $y=x^3+3x^2$ בתחום $-1\le x\le 0.5$.

2. מצאו נקודות מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט של הפונקציה הנ"ל בתחום $-3\le x\le 1$.

3. באיורים 9 ו- 10 מופיע גרף הפונקציה $y=x^3+3x^2$ בתחומים המתאימים לשני הסעיפים הקודמים של הפעילות. ציינו שיקולים דידקטיים בבחירת התחום בכל אחד מן הסעיפים הקודמים.



איור 9



איור 10

4. בחרו קטע סגור כך שתתקבלנה: שתי נקודות מינימום מוחלט ונקודת מקסימום מוחלט אחת, של הפונקציה $y=x^3+3x^2$ בקטע זה.

5. בחרו קטע סגור כך שהמינימום המוחלט של הפונקציה $y=x^3+3x^2$ יתקבל בקצה הימני של הקטע.

6. בחרו קטע סגור כך שלפונקציה $y=x^3+3x^2$ בקטע זה תתקבל נקודת מקסימום יחידה שהיא נקודת מקסימום פנימית.

7. בחרו קטע סגור כך ש שלפונקציה $y=x^3+3x^2$ בקטע זה, יתקבלו בדיוק שלוש נקודות חשודות כקיצון מוחלט, שכולן אכן יתבררו כנקודות קיצון מוחלט.

ההתנהגות הגלובלית של פונקציות פולינום[1] - פונקציות פולינום מבעד לטלסקופ

הגרף של פונקציות פולינום עבור ערכים גדולים של $|x|$.

כאשר ערכו המוחלט של x הולך וגדל ללא הגבלה, ההתנהגות של פונקציית פולינום וצורת הגרף שלה דומות לאלה של הפונקציה שתבניתה היא המחובר עם החזקה הגדולה ביותר בתבנית הפולינום. הפעילות הבאה חוקרת תכונה זו של פונקציות פולינום ומסבירה אותה.

מומלץ מאוד לעסוק בנושא זה בסביבת מחשב, כבעבודת חקר המלווה בדיון המתבסס על תמונות של מסכי מחשב (ר' איור 11 בהמשך). אם לא ניתן ליצור תמונות כאלה, מומלץ להשתמש במקרן לצורך הדיון.

פעילות 7: פרבולות מבעד לטלסקופ

כאשר מתבוננים בגופים שבשמיים באמצעות טלסקופ, רואים אותם קרוב אלינו, אבל קשה לנו להבחין בוודאות בפרטים, וגם גופים שרחוקים מאוד זה מזה נראים לנו קרובים.
בדומה, כאשר מתבוננים בגרפים של פונקציות על צג המחשב בתחומים רחבים מאוד, הפרטים הקטנים מטשטשים, ואובייקטים שונים נראים קרובים ואף מתלכדים זה עם זה. הדימוי "הסתכלות מבעד לטלסקופ" מתייחס להתבוננות בגרף של פונקציה בתחום רחב מאוד.

1. סרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=x^2+2x-3$.
   לשתי הפונקציות יש צורה כללית דומה, שתיהן פרבולות עם נקודת מינימום, אך הן שונות זו מזו בפרטים כמו נקודת המינימום, תחומי העלייה והירידה, ומספר נקודות החיתוך עם ציר ה- x.
   כל ההבדלים האלה נראים היטב בחלון $-5<x<5$, $-10<y<10$ (ר' איור 11).
   נדמיין עכשיו שאנחנו מסתכלים בגרפים מרחוק, מקצה החדר, מקצה הרחוב, או אולי מהירח.
   לשם כך נשנה את הסקלות, ונראה איך משתנה התמונה בכל הגדלה.
   התבוננו בגרף בחלונות הבאים:
   א. $-5<y<100$ $-20<x<20$ ב. $-5<y<500$ $-50<x<50$
   ג. $-5<y<50000$ $-200<x<200$

   ככל שהגדלנו את התחום, שני הגרפים נדמו כמתקרבים זה לזה עד שכמעט לא ניתן להבחין ביניהם.
   האומנם שני הגרפים מתלכדים או שמא רק נראה הדבר כך?

2. נקו את חלון הפונקציות או פתחו חלון חדש, וחזרו לברירת המחדל של מערכת הצירים. סרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות $f(x)=-2x^2,\ g(x)=-2x^2+2x+4$.
   מה דומה ומה שונה בין שתי הפונקציות?
   חזרו על תהליך ההגדלה ההדרגתית של התחומים על הצירים. האם גם הפעם שני הגרפים נראים מתלכדים?

   בתוכנות אחדות ניתן לשנות את קנה המידה של הצירים בעזרת גלגלת העכבר.

3. שערו כיצד ייראה כל גרף של פונקציה ריבועית, $y=ax^2+bx+c$ "מבעד לטלסקופ"? במה תלויה צורת הגרף?

[1] מעובד מתוך פרל (1996)

פעילות 8: פונקציות פולינום מבעד לטלסקופ

1. סרטטו במחשב את גרף הפונקציה $g(x)=x^3-3x+2$. מצאו את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון.

2. הוסיפו את גרף הפונקציה $f(x)=x^3$, האם הגרפים דומים?

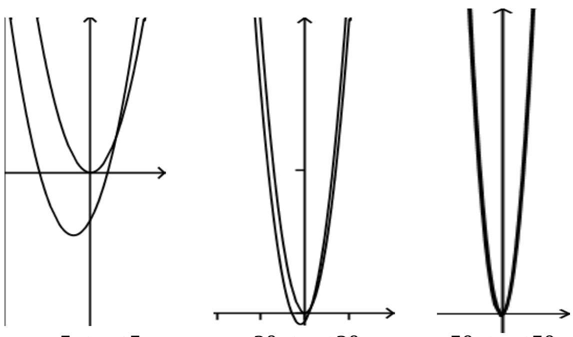
3. הגדילו את תחום הפונקציה. האם עכשיו הגרפים דומים?

4. סרטטו במחשב את גרף הפונקציה $g(x)=-x^4-2x^3+3x^2+4x$.

5. איזו השערה עולה מן התהליך לגבי הצורה הכללית של פונקציית פולינום? מה קובע את התנהגות הפונקציה עבור ערכים גדולים של $|x|$?

מבחר הערות, הארות ופתרונות לשאלות שבפעילויות 7 - 8

נתבונן בגרפים של הפונקציות $g(x)=x^2+2x-3$ ו- $f(x)=x^2$, בשלושה חלונות המתקבלים זה מזה על-ידי הגדלת החלק של תחום הפונקציה שבו אנו מתבוננים (איור 11).



איור 11

אחרי ההגדלה השנייה כבר כמעט לא ניתן להבחין בין הגרפים.

כדי לבדוק אם הגרפים אכן מתקרבים זה לזה נחשוב על ערכי פונקציית ההפרש של שתי הפונקציות הנתונות $h(x)=g(x)-f(x)=2x-3$. ברור כי ערכי $|h(x)|$ גדלים כאשר ערכי $|x|$ גדלים. פירושו של דבר שהגרפים $y=f(x), y=g(x)$ **מתרחקים** זה מזה.

מדוע, אם כך, הגרפים של הפונקציות $y=f(x)$ ו- $y=g(x)$ נראים דומים זה לזה ככל שמגדילים את תחום הפונקציה הנראה בגרף?

התשובה נעוצה בכך שכאשר ערכי $|x|$ הולכים וגדלים, **היחס** $\frac{f(x)}{g(x)}$ בין ערכי הפונקציות הולך ומתקרב ל- 1.

אם $a_n\ne 0$, פונקציית הפולינום $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+x_0$ והפונקציה a_nx^n (האיבר הראשי והמוביל של הפולינום) מתנהגות באופן דומה, כאשר ערכי $|x|$ הולכים וגדלים, כיוון שלא רק המנה שלהן שואפת ל- 1, אלא גם

מנת הנגזרות שלהן שואפת ל- 1, ולכן, למשל, אם הנגזרת של אחת מהן חיובית עבור x כלשהו גם הנגזרת של הפונקציה השנייה בהכרח חיובית עבור אותו x.

נציין עוד, כי יש סיבה טכנית לרושם מוטעה של "התלכדות" של גרפים שונים, כאשר הולכים ומגדילים תחומים על הצירים בחלון המחשב. היות ושטח החלון אינו משתנה, הגדלת התחומים על הצירים פירושה הקטנת קני-המידה עליהם. לכן בתהליך הרחבת התחומים נקודות שונות מתקרבות על-פני החלון עד כדי כך שהן נראות כמתלכדות.

לאוסף תכונות של פולינום אשר באות לביטוי בתחום שהולך ומתרחב ללא הגבלה נקרא: "תכונות ההתנהגות הגלובלית של פולינום". על-פי התנהגות גלובלית של פונקציית פולינום אפשר להסיק מסקנות רבות עליה, מבלי לבצע חקירה מלאה, ומבלי לסרטט את הגרף שלה במחשב. בשאלות הבאות ניעזר בהיכרותנו עם התנהגות גלובלית של פולינומים, כדי להגיע לתשובות.

פעילות 9: הסקת תכונות של פונקציות פולינום על-פי התנהגותן הגלובלית

1. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה שלישית יש נקודת קיצון אחת בלבד?
   אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?

2. נתון כי לפונקציה $y=-2x^3+4x^2-1$ יש שתי נקודות קיצון. האחת כאשר $x=0$, והשנייה כאשר $x=\frac{4}{3}$. איזו נקודה היא נקודת מינימום ואיזו - נקודת מקסימום?

3. לפונקציה $y=x^3-4x^2+3$ יש שתי נקודות קיצון. האחת ב- $x=0$ והשנייה ב- $x=\frac{8}{3}$. איזו נקודה היא נקודת מינימום ואיזו - נקודת מקסימום? מדוע?

4. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה רביעית יהיו שתי נקודות קיצון בלבד?
   אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?

5. האם ייתכן כי לפונקציה ממעלה רביעית יהיו שלוש נקודות קיצון?
   אם כן - הביאו דוגמה. אם לא - מדוע לא?

6. להלן מספר טענות, קבעו אם הן נכונות או לא ונמקו:
   א. למשוואה ממעלה שלישית יש לפחות פתרון אחד.
   ב. לכל פונקציה ממעלה רביעית יש שלוש נקודות קיצון.
   ג. למשוואה ממעלה רביעית יש לפחות פתרון אחד.
   ד. לכל משוואה ממעלה אי-זוגית יש לפחות פתרון אחד.
   ה. למשוואה ממעלה זוגית יש תמיד פתרון.
   ו. לפונקציה ממעלה זוגית יש מספר אי-זוגי של נקודות קיצון.

תשובות

1. לא ייתכן. אילו הייתה לפונקציה ממעלה שלישית, שהיא פונקציה רציפה בכל תחום הגדרתה, נקודת קיצון אחת, היה לה תחום עלייה אחד ותחום ירידה אחד. מההתנהגות הגלובלית של פונקציה ממעלה שלישית נובע, שאם היא עולה בקצה השמאלי של תחום ההגדרה היא עולה גם בקצהו הימני, ואם היא יורדת בקצה השמאלי של תחום ההגדרה היא יורדת גם בקצהו הימני.

2. ההתנהגות הגלובלית של הפונקציה הנתונה היא כשל הפונקציה $y=-2x^3$, שהיא יורדת בשני הקצוות של תחום ההגדרה. לכן יש לה מינימום כאשר $x=0$ ומקסימום כאשר $x=\frac{4}{3}$.

3. ההתנהגות הגלובלית של הפונקציה הנתונה היא כשל הפונקציה $y=x^3$, שהיא עולה בשני קצות תחום ההגדרה. לכן יש לה מקסימום כאשר $x=0$ ומינימום כאשר $x=\frac{8}{3}$.

4. לא ייתכן. ההתנהגות הגלובלית של הפונקציה הנתונה היא כשל הפונקציה $y=ax^4$. אם הפונקציה עולה בקצה השמאלי אז היא יורדת בקצה הימני ולהיפך. מעבר של פונקציה רציפה מעלייה לירידה וחזרה מירידה לעלייה (או להיפך) מתבטא בשתי נקודות קיצון. כדי שהמגמה של הפונקציה בקצה הימני תהיה שונה מזו שבקצה השמאלי מספר נקודות הקיצון צריך להיות אי-זוגי. ניתן להכליל תשובה זו לכל פונקציה ממעלה זוגית.

5. כן. לפונקציה $y=x^4$ יש נקודת קיצון אחת. לפונקציה $y=x^4-x^2$ יש 3 נקודות קיצון.

6. א. נכון. מכאן שלכל פונקציה ממעלה שלישית יש לפחות נקודת אפס אחת. כיוון שכל משוואה ממעלה שלישית אפשר לרשום כ- $f(x)=0$, כאשר $f(x)$ פונקציה ממעלה שלישית, לכל פונקציה ממעלה שלישית יש לפחות פתרון אחד.

ב. לא נכון. למשל, לפונקציה $y=x^4$ יש נקודת קיצון אחת.

ג. לא נכון, למשל, למשוואה $x^4+1=0$ אין פתרון.

ד. נכון. ההסבר דומה להסבר של סעיף א.

ה. לא נכון. למשל, למשוואה $x^4+1=0$ אין פתרון.

ו. נכון. ראו הסבר לשאלה 4.

פעילות 10: פונקציות ממעלה שלישית בתמונה משפחתית

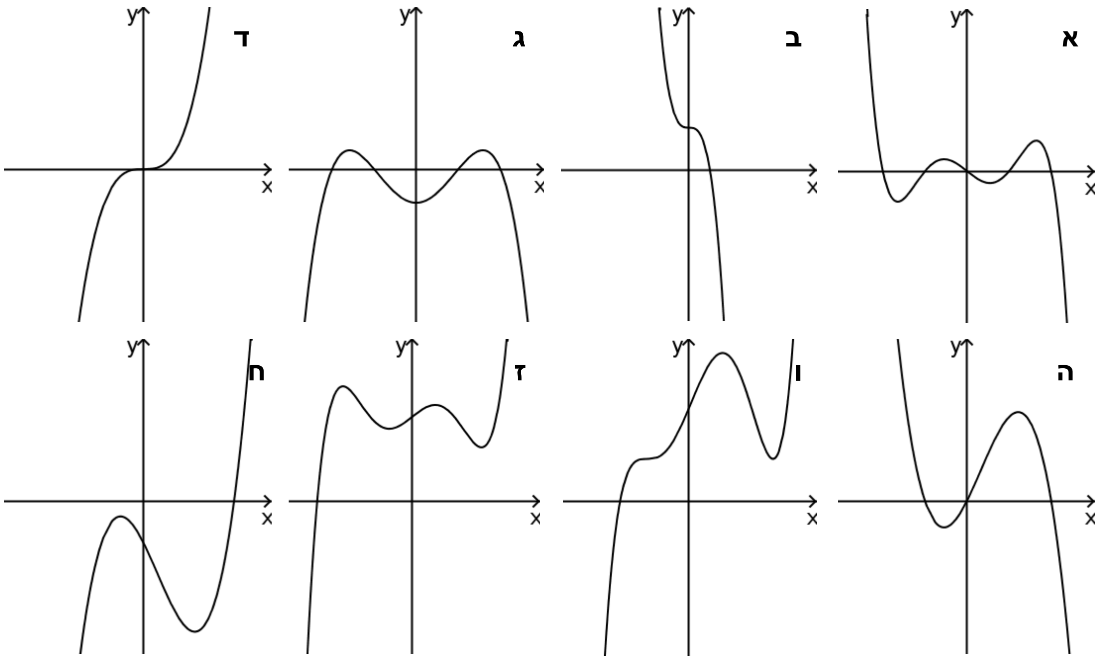
ניתוח כל הגרפים האפשריים של פונקציות מהמשפחה $y=ax^3+bx^2+cx+d$

ראינו כי ההתנהגות הגלובלית של הפונקציה $y=ax^3+bx^2+cx+d$ מושפעת מהמקדם a. אם $a>0$ אז הפונקציה עולה בתחום של ערכי x חיוביים די גדולים, וגם בתחום של ערכי x שליליים ודי גדולים בערכם המוחלט. בשפה חופשית ובהסתכלות משמאל לימין, כאשר $a>0$ הפונקציה $y=ax^3+bx^2+cx+d$ מתחילה בעלייה ומסתיימת בעלייה, וכאשר $a<0$ הפונקציה $y=ax^3+bx^2+cx+d$ מתחילה בירידה ומסתיימת בירידה.

על-פי המשפט היסודי של האלגברה לפונקציה ממעלה שלישית יש לכל היותר שלוש נקודות אפס על ציר ה- x.

בבואנו לבחון אם גרף נתון יכול להיות גרף של פונקציה ממעלה שלישית, נזכור גם כי הנגזרת של פונקציה ממעלה שלישית היא פונקציה ממעלה שנייה.

לפני שנסקור את כל הצורות האפשריות לגרף של פונקציה ממעלה שלישית, התבוננו בגרפים שבאיור 12. לכל אחד מן הגרפים קבעו אם הוא יכול להיות גרף של פונקציה מהמשפחה $y=ax^3+bx^2+cx+d$.



איור 12

תשובות

גרף ג אינו יכול להיות גרף של פונקציה ממעלה שלישית כיוון שהוא מתחיל בעלייה ומסתיים בירידה.

גרף א אינו יכול להיות גרף של פונקציה ממעלה שלישית כיוון שיש לו 5 נקודות חיתוך עם ציר ה- x, ואילו לגרף של פונקציה ממעלה שלישית יש לכל היותר 3 נקודות חיתוך עם ציר ה- x.

יותר קשה לזהות שהגרפים ו ו- ז אינם יכולים להיות גרפים של פונקציה ממעלה שלישית.

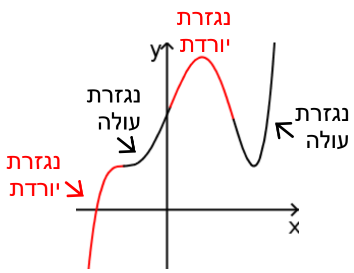
לגרף ז יש 4 נקודות קיצון שבהן הנגזרת מתאפסת, בעוד שלנגזרת של פונקציה ממעלה שלישית יש לכל היותר שתי נקודות אפס.

הסיבה שבגללה גרף ו אינו יכול להיות גרף של פונקציה ממעלה שלישית קשורה לנקודת הפיתול של הפונקציה, מושג שבשלב זה עדיין אינו מוכר לתלמידים. הדיון כאן הוא הקדמה לקראת הפרק הבא.

איור 13 מציג את תחומי הקעירות כלפי מעלה והקעירות כלפי מטה של הפונקציה. ניתן לראות כי לפונקציה זו שלוש נקודות פיתול, שהן נקודות אפס של הנגזרת השנייה. הנגזרת השנייה של פונקציה ממעלה שלישית היא פונקציה ליניארית, ומכאן שיש לה לכל היותר נקודת אפס אחת.

ניתן להסיק שגרף ו אינו מתאים לפונקציה ממעלה שלישית גם ללא

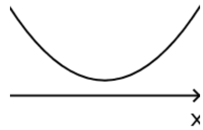
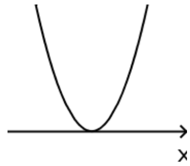
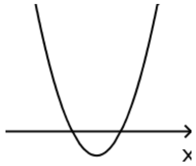
התייחסות לנקודות פיתול ו/ או לנגזרת השנייה.
כפי שרואים באיור 13, הנגזרת (שיפוע) של הפונקציה שבגרף ו יורדת ועולה לסירוגין בארבעה תחומים חלקיים. הנגזרת של פונקציה ממעלה שלישית היא פונקציה ממעלה שנייה (פונקציה ריבועית) ויש לה תחום עלייה אחד ותחום ירידה אחד. לכן, הגרף ו אינו גרף של פונקציה ממעלה שלישית.



איור 13

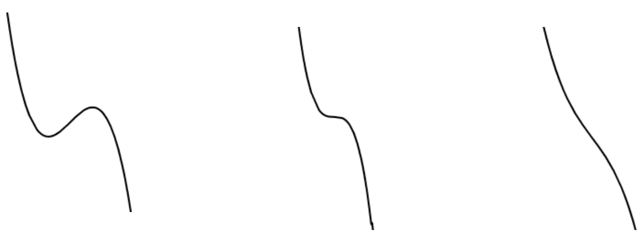
אכן, מבין כל הגרפים שהוצגו באיור 12 רק הגרפים ב, ד, ה ו- ח הם גרפים של פונקציות ממעלה שלישית.

נסקור עתה את כל הצורות האפשריות של פונקציה ממעלה שלישית $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ עם מקדם מוביל a חיובי.
נגזרת של פונקציה ממעלה שלישית $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ עם מקדם מוביל a חיובי היא פונקציה ממעלה שנייה בעלת מקדם חיובי, ולכן הגרף שלה הוא פרבולה בעלת מינימום.
טבלה 4 להלן מציגה, לכל אחד משלושת המצבים האפשריים של פרבולה בעלת מינימום, את מאפייני הפונקציה $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ שניתן להסיק מתכונות הנגזרת.

תיאור הפרבולה המייצגת את הנגזרת	 פרבולה ללא חיתוך עם ציר ה- x .	 פרבולה בעלת נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- x (נקודת ההשקה).	 פרבולה בעלת שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .
תכונות הנגזרת	לנגזרת אין נקודות אפס והיא חיובית בכל נקודה.	הנגזרת מתאפסת בנקודה אחת על ציר ה- x , וחיובית בכל נקודה אחרת.	הנגזרת מתאפסת בשתי נקודות על ציר ה-x , שלילית בכל נקודה ביניהן וחיובית בשאר הנקודות.
תכונות הפונקציה $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	הפונקציה עולה בכל התחום.	הפונקציה עולה בכל התחום. נקודת האפס של הנגזרת היא נקודת פיתול של הפונקציה.	הפונקציה עולה בתחומים החלקיים בהם הנגזרת חיובית ויורדת בתחום החלקי בו הנגזרת שלילית.
גרף אופייני של פונקציה ממעלה שלישית			

טבלה 4

בדומה, שלושת הגרפים האופייניים של פונקציה ממעלה שלישית עם מקדם מוביל שלילי מוצגים באיור 14:



איור 14

הקוראים מוזמנים לבנות טבלה, דומה לטבלה 4, שמקשרת בין שלושת המצבים האפשריים של פרבולה בעלת מקסימום, לבין שלושת הגרפים האופייניים של פונקציה ממעלה שלישית עם מקדם מוביל שלילי.

מקבץ נוסף של פעילויות הקשורות לחקירת פונקציות פולינום, מופיע בפרק הבא לאחר הדיון במושגים: נגזרת שנייה, קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה.