

חקירה איכותית של פונקציות פולינום "רגע לפני הנגזרת..."

פרק זה מפנה את הזרקור לכלים המאפשרים לנו להסיק תכונות רבות של פונקציות עוד לפני הכנסת הכלים של החשבון הדיפרנציאלי.

מטרת הכלים המוצגים בפרק זה היא לאפשר למורה לראות בדמיונו את סקיצות הגרפים של הפונקציות הנחקרות, בשלב מוקדם של החקירה, ולבחור, בעת תכנון השיעור, פונקציות שתכונותיהן מתאימות למטרות השיעור.

פעילויות דומות לאלו המוצגות בפרק זה יכולות לתת בידי התלמידים כלים והרגלים לדמיון את הפונקציות הנחקרות, להעלות השערות לפני חקירת הפונקציות, וכך לייחס יותר משמעות לעבודתם.

בפרק זה נסיק, ללא שימוש בנגזרת, תכונות של פונקציות פולינום. בהמשך, יעשה שימוש בכלים של פרק זה לחקירת פונקציות נוספות.

הגדרות

יהיו $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים קבועים ו- $a_n \neq 0$, כאשר n מספר טבעי או $n = 0$. הפונקציה:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

של משתנה ממשי x נקראת **פונקציית פולינום** (או **פונקציה פולינומאלית**) ממעלה n .

המספרים $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ הם מקדמי הפולינום. פונקציית פולינום ממעלה $n = 0$ היא פונקציה קבועה; ממעלה $n = 1$ היא פונקציה ליניארית; וממעלה $n = 2$ היא פונקציה ריבועית.

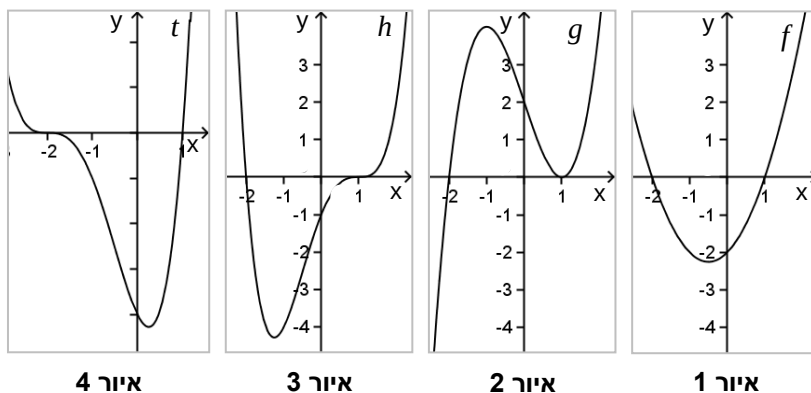
הפונקציה הקבועה $f(x) = 0$ היא פולינום ללא מעלה.

המשוואה $f(x) = 0$ נקראת **משוואת פולינום** אם $f(x)$ היא פונקציית פולינום.

פעילות 1: נקודות אפס של פונקציות פולינום ומה שביניהן – משימה מקדימה

פתרו את שלוש המשימות שלפניכם ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי.

נסו לזהות ולנסח מהם הכלים העומדים לרשות התלמידים בפתרון משימות כאלה, בטרם נחשפו לכלים של החשבון הדיפרנציאלי.



1. באיורים 1 - 4 שלפניכם מופיעים גרפים של הפונקציות:

$$f(x) = (x+2)(x-1)$$

$$g(x) = (x+2)(x-1)^2$$

$$h(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^3$$

$$t(x) = \frac{1}{2}(x+2)^3(x-1)$$

איור 4

איור 3

איור 2

איור 1

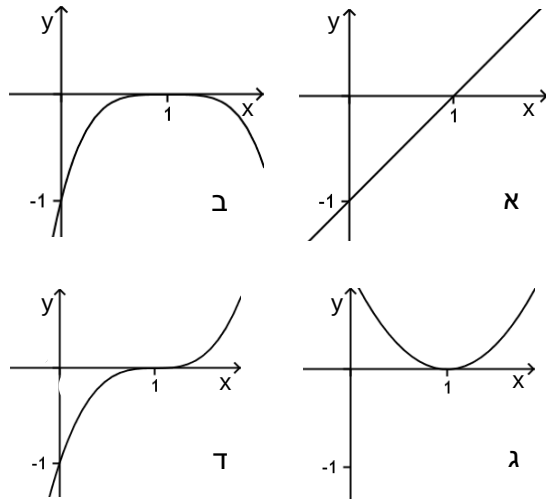
א. מה משותף לכל הפונקציות?

ב. הסבירו מדוע הפונקציה $k(x) = (x+2)^3(x-1)^2$ מקבלת ערכים חיוביים באותם תחומים חלקיים כמו הפונקציה $g(x) = (x+2)(x-1)^2$.

ג. רשמו שתי פונקציות נוספות שמקבלות ערכים חיוביים באותם תחומים חלקיים כמו הפונקציה f . (פתרון מידי הוא הכפלת הפונקציה במקדם חיובי, אך קיימות, כמובן, פונקציות רבות נוספות).

ד. זהו תכונות משותפות לפונקציות f , t ו- h . ציינו הבדל בולט לעין בהתנהגות הגרפים של הפונקציות האלה בנקודות האפס שלהן.

2. נתבונן בגרפים של הפונקציות (איורים 5 – 5ד):



איור 5

$$f(x) = x - 1$$

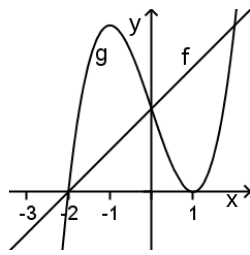
$$g(x) = (x - 1)^2$$

$$h(x) = (x - 1)^3$$

$$k(x) = -(x - 1)^4$$

■ זהו איזה גרף שייך לכל פונקציה.

■ ארבעת הגרפים חותכים את ציר ה- x בנקודה $x=1$. שתיים מן הפונקציות מחליפות סימן בנקודת האפס ואילו האחרות אינן מחליפות סימן בנקודה זו. הסבירו מדוע.



איור 6

3. איור 6 מציג במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x + 2 \text{ ו- } g(x) = (x + 2)(x - 1)^2.$$

א. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של כל אחת מן הפונקציות.

ב. הפונקציה $g(x) = (x + 2)(x - 1)^2$ התקבלה

מהפונקציה $f(x) = x + 2$ על-ידי כפל ב- $(x - 1)^2$.

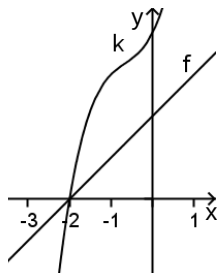
כיצד השפיע הכפל ב- $(x - 1)^2$ על תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה g ?

ג. הפונקציה k (איור 7) התקבלה מהפונקציה f על-ידי

כפל ב- $x^2 + 1$.

האם הכפל ב- $x^2 + 1$ משפיע על תחומי החיוביות

והשליליות של הפונקציה? אם לא, מדוע?



איור 7

פתרונות

1. א. למשל: שלוש הפונקציות הן פונקציות פולינום. לשלושתן אותן נקודות אפס, $x = -2$ ו- $x = 1$.
- ב. הפונקציות נבדלות בחזקה של הגורם $x + 2$. בפונקציה g הוא מופיע ללא חזקה ובפונקציה k הוא מופיע בחזקה שלישית. כיוון שהעלאה בחזקה שלישית שומרת על הסימן, לשתי הפונקציות אותם תחומי חיוביות ושליליות.
- ג. למשל: $m(x) = (x + 2)^3(x - 1)$; $n(x) = (x + 2)^3(x - 1)^{17}$.
- ד. לפונקציות f , t ו- h יש אותן נקודות אפס: $x = 1$ ו- $x = -2$. בולט לעין שבעוד שהגרף של הפונקציה f עובר דרך ציר x "בצורה פשוטה", בשתי הפונקציות האחרות גרף הפונקציה נראה מתפתל סביב ציר x באחת מנקודות האפס. ניתן להוכיח, באמצעות הנגזרת, כי בנקודת אפס של פונקציית פולינום, בה מתאפס גורם ליניארי בחזקה אי-זוגית גדולה מ-1, יש לפונקציה נקודת פיתול. (ר' עמוד 300)

2. שיקולים אפשריים: f היא פונקציה ליניארית ולכן מתאים לה גרף א. g מקבלת ערכים חיוביים בכל נקודה שאיננה נקודת אפס ולכן מתאים לה גרף ג. h היא פונקציית פולינום ממעלה שלישית. פונקציה זו היא היחידה מבין הפונקציות הנתונות, מלבד הפונקציה הליניארית, שיכולה לעלות בכל תחומה, ולכן מתאים לה גרף ד. הפונקציה k מקבלת ערכים שליליים בכל נקודה שאיננה נקודת אפס, ולכן מתאים לה גרף ב. שיקול אפשרי אחר הוא להתייחס אל הפונקציות כאל הזזות אופקיות של פונקציות מהמשפחה $y = x^n$ או מהמשפחה $y = -x^n$.

הפונקציות שאינן מחליפות סימן בנקודת האפס הן הפונקציות g ו- k שבהן הגורם $(x - 1)$ מופיע בריבוי זוגי. הביטוי $(x - 1)^{2k}$, כאשר $k = 1, 2, 3, \dots$, מקבל ערכים אי-שליליים בלבד, ולכן בנקודות בהן $x \neq 1$ סימן הפונקציה $a(x - 1)^{2k}$ נקבע על-ידי סימן המקדם a . לעומת זאת, הסימן של פונקציה מהצורה $a(x - 1)^{2k-1}$, כאשר $k = 1, 2, 3, \dots$, הוא הסימן של a עבור $x > 1$, והסימן הנגדי כאשר $x < 1$. הפונקציה מחליפה סימן בנקודה בה $x = 1$.

3. א. הפונקציה f חיובית כאשר $x > -2$, ושלילית כאשר $x < -2$. הפונקציה g חיובית כאשר $-2 < x < 1$ וכאשר $x > 1$, והיא שלילית כאשר $x < -2$.
- ב. הביטוי $(x - 1)^2$ מתאפס כאשר $x = 1$, וחיובי עבור כל ערך אחר של x . הכפלת הפונקציה f בביטוי זה הוסיפה נקודת אפס - $x = 1$, ולא שינתה את סימן הפונקציה בשום נקודה אחרת. כתוצאה מכך, במעבר מ- f ל- g , תחום השליליות של הפונקציה לא השתנה, ואילו במקום תחום החיוביות $x > -2$ של הפונקציה $f = x + 2$, יש לפונקציה $g(x) = (x + 2)(x - 1)^2$ שני תחומי חיוביות נפרדים, $-2 < x < 1$ ו- $x > 1$.

- ג. הביטוי $x^2 + 1$ מקבל ערכים חיוביים בלבד. לכן הכפלת הפונקציה f בביטוי זה לא שינתה את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציה. שתי הפונקציות f, k חיוביות כאשר $x > -2$ ושליליות כאשר $x < -2$.

הערות

שלוש המשימות נועדו להדגיש מספר עקרונות העוזרים במציאת תחומי חיוביות ושיליות של פונקציות פולינום, ובסרטוט סקיצה של גרף הפונקציה, ללא שימוש בנגזרת. להלן העקרונות.

1. פונקציות פולינום הן פונקציות רציפות המוגדרות בכל הישר הממשי, ולכן סימן הפונקציה לא משתנה בתחומים שנקבעים על-ידי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x . במילים אחרות: כל שינוי בחיוביות ושיליות של פונקציית פולינום יכול להתרחש רק בנקודת אפס של הפונקציה.

2. על פי המשפט היסודי של האלגברה כל פונקציית פולינום בתחום המספרים הממשיים ניתנת להצגה כמכפלת חזקות של גורמים ליניאריים ו/או גורמים ריבועיים בלתי פריקים. מעריך החזקה שבסיסה הוא גורם ליניארי או גורם ריבועי בלתי פריק, נקרא **ריבוי הגורם**. למשל, לפונקציית פולינום $(x-1)^4(x^2+1)^3$ יש גורם ליניארי $(x-1)$ עם ריבוי 4, וגורם ריבועי בלתי פריק (x^2+1) עם ריבוי 3. לפונקציה $(x^2-1)^3(x-1)^4(x^2+x+1)^5$ יש גורם ליניארי $(x-1)$ עם ריבוי 7, גורם ליניארי $(x+1)$ עם ריבוי 3, וגורם ריבועי בלתי פריק x^2+x+1 עם ריבוי 5. (ר' עמוד 600)

3. בכל אחת מנקודות האפס של פונקציית פולינום, מתאפס אחד הגורמים הליניאריים שלה. אם לפונקציה אין גורמים ליניאריים, אין לה נקודות אפס. גורמים ריבועיים שאינם ניתנים לפירוק לגורמים ליניאריים אינם מתאפסים. הסימן שלהם קבוע לכל x .

4. לפונקציות מהצורה $(x-a)^{2k}$ כאשר a מספר ממשי ו- k מספר טבעי כלשהו, יש נקודת קיצון (מינימום) אחת, שבה $x=a$, והן חיוביות בכל נקודה אחרת. כשכופלים פונקציה כזאת בפונקציה אחרת - g , יכולה להתווסף לנקודות האפס של הפונקציה g נקודת אפס $x=a$, אך בכל נקודה אחרת סימני הפונקציה החדשה הם כסימני הפונקציה g .

5. בנקודת אפס של פונקציית פולינום, שבה הגורם הליניארי המתאפס מופיע בריבוי זוגי, סימן הפונקציה זהה משני עברי נקודת האפס. נקודה זו היא נקודת קיצון (מקסימום או מינימום) מקומי של הפונקציה. כדאי לשוב ולעסוק בתכונה זו בשעה שעוסקים בנגזרת הראשונה ומבחני נקודות קיצון.

6. בנקודת אפס, שבה הגורם הליניארי המתאפס מופיע בריבוי אי-זוגי, הפונקציה מחליפה סימן בנקודת האפס.

7. מתוך הדוגמאות שהוצגו ודוגמאות דומות ניתן **להעלות השערה** (שעדיין אפשר רק לתארה באופן ויזואלי מבלי להשתמש במושג נקודת פיתול), כי בנקודת אפס של פונקציית פולינום שבה הגורם הליניארי המתאפס מופיע בריבוי אי-זוגי גדול מ-1 יש לפונקציה נקודת פיתול.

כדאי לשוב ולעסוק בתכונה זו בשעה שעוסקים בנגזרת השנייה, נקודות פיתול וקעירות הפונקציה.

8. הכפלת הפונקציה בביטוי שהוא חיובי תמיד, אינה משנה את סימני הפונקציה. הכפלת הפונקציה בביטוי שהוא שלילי תמיד, מחליפה את כל הסימנים שלה.

דרכים למציאת תחומי חיוביות ושליליות של פונקציית פולינום

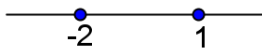
נציע כאן שלוש דרכים למציאת תחומי חיוביות ושליליות של פונקציית פולינום: (א) על-פי סימני הגורמים; (ב) על-ידי הצבה בפונקציה של ערך x מייצג מכל אחד מן התחומים החלקיים של הפונקציה; (ג) על-פי ההתנהגות הגלובלית של הפונקציה, והריבוי של כל אחד מן הגורמים.

מציאת תחומי חיוביות ושליליות של הפונקציה על-פי סימני הגורמים

פונקציות פולינום הן פונקציות רציפות המוגדרות בכל הישר הממשי. לכן כל שינוי בחיוביות ובשליליות של הפונקציה מתרחש בנקודות אפס שלה. כדי למצוא תחומי חיוביות ושליליות של פונקציית פולינום נמצא תחילה את נקודות האפס שלה. נוח לעשות זאת כאשר פונקציית פולינום מוצגת כמכפלה של גורמים ליניאריים וגורמים ריבועיים בלתי פריקים. הצגה כזאת תמיד אפשרית על-פי המשפט היסודי של האלגברה (ר' עמוד 600). כל גורם שאינו ליניארי או ריבועי ניתן לפירוק נוסף. למשל, $x^4 + 1 = (x^2 + 1 + x\sqrt{2})(x^2 + 1 - x\sqrt{2})$.

כל נקודות האפס של פונקציית פולינום מחלקות את ציר ה- x לתחומים חלקיים. לאחר מציאת נקודות האפס, נבדוק, בכל אחד מהתחומים, את סימני הגורמים ולפי זה נקבע את סימן הפונקציה בכל התחום.

דוגמה א: מציאת תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x) = -2(x+2)(x-1)$



נקודות האפס של הפונקציה, $x = -2$ ו- $x = 1$ קובעות על ציר ה- x שלושה תחומים חלקיים: $x < -2$; $-2 < x < 1$; $1 < x$.

בשיטה זו בודקים, בכל אחד מהתחומים, את סימנם של כל הגורמים, ולפי סימני הגורמים קובעים את סימן המכפלה.

נוח לארגן את האינפורמציה בטבלה שבה כל אחד מהגורמים מיוצג בשורה.

התחום			ייצוג גרפי	הגורם
$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x$		
-	-	-		-2
-	+	+		$(x + 2)$
-	-	+		$(x - 1)$
-	+	-		המכפלה $-2(x-1)(x+2)$

טבלה 1

בתחום $x < -2$ שלושת הגורמים שליליים ולכן בתחום זה המכפלה שלילית.

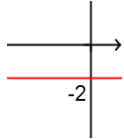
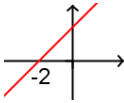
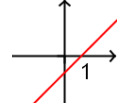
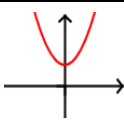
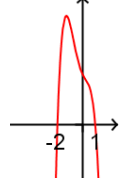
בתחום $-2 < x < 1$ אחד הגורמים חיובי ושניים שליליים ולכן בתחום זה המכפלה חיובית.

בתחום $1 < x$ שני הגורמים חיוביים ואחד שלילי ולכן בתחום זה המכפלה שלילית.

סימני הפונקציה מאפשרים סרטוט גרף סכמתי.

דוגמה ב: מציאת תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x) = -2(x+2)(x-1)(x^2+1)$

פונקציה זו התקבלה מן הפונקציה הקודמת על-ידי הכפלתה בגורם הריבועי הבלתי פריק x^2+1 , שהוא חיובי לכל ערך של x . גורם ריבועי שאינו פריק לגורמים לינאריים אינו מתאפס לשום ערך של x , ולכן אינו משנה את סימנו. טבלה 2 התקבלה מטבלה 1 על-ידי הוספת שורה שמייצגת את הגורם x^2+1 . כיוון שגורם זה חיובי לכל x , תחומי החיוביות והשליליות נשארו כמו בדוגמה הקודמת.

התחום			ייצוג גרפי	הגורם
$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x$		
-	-	-		-2
-	+	+		$(x+2)$
-	-	+		$(x-1)$
+	+	+		(x^2+1)
-	+	-		המכפלה $-2(x-1)(x+2)(x^2+1)$

טבלה 2

מציאת תחומי חיוביות ושליליות על-פי נקודות מייצגות

כיוון שפונקציית פולינום היא פונקציה רציפה, היא מחליפה סימן רק בנקודות אפס. לכן די בבדיקת סימן הפונקציה בנקודה מייצגת אחת בכל תחום חלקי, כדי לדעת את סימן הפונקציה בתחום זה. נציב בתוך הפונקציה ערך x מייצג מכל אחד מן התחומים החלקיים של הפונקציה, ועל-ידי כך נקבע את סימנה בתחום זה.

דוגמה ג: מציאת תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x) = 0.5(x+2)(x-1)^2(x-3)$

נקודות האפס קובעות על ציר x ארבעה תחומים חלקיים:

$$x < -2 ; -2 < x < 1 ; 1 < x < 3 ; 3 < x$$

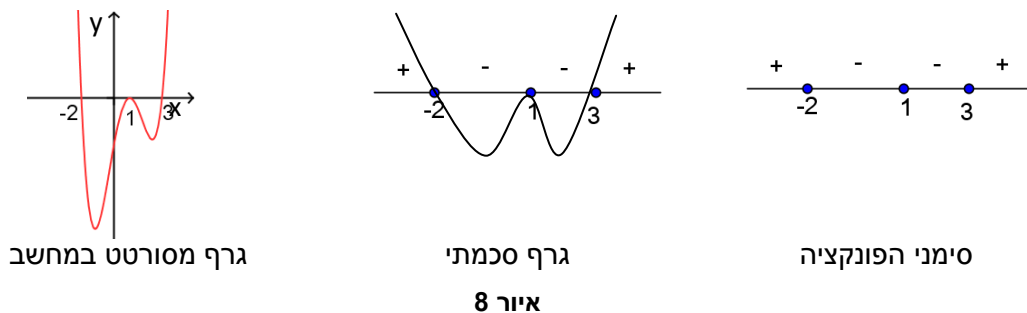
נציב בפונקציה ערך x מייצג מכל תחום חלקי (טבלה 3).

תחום חלקי	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x$
x	-3	0	2	4
$f(x) = 0.5(x+2)(x-1)^2(x-3)$	48	-3	-2	27
הסימן של $f(x)$ בתחום	+	-	-	+

טבלה 3

מסקנה: הפונקציה חיובית בתחומים $x < -2$ ו- $3 < x$ ושלילית בתחומים $-2 < x < 1$ ו- $1 < x < 3$.

באיור 8 ניתן לראות את הגרף הסכמתי לצד גרף שסורטט במחשב.



מציאת תחומי חיוביות ושליליות על-פי מידת הריבוי של הגורמים הלינאריים

גם בשיטה זו נקבע תחילה את התחומים החלקיים באמצעות כל נקודות האפס של הפונקציה. כדי לקבוע את סימן הפונקציה בכל אחד מן התחומים החלקיים, נזהה את סימן הפונקציה באחד התחומים החלקיים, באחת מן השיטות הקודמות, או על-פי שיקולים אחרים הקשורים להתנהגות הגלובלית של הפונקציה (ר' עמוד 205).

בהמשך נתבונן בנקודות האפס של הפונקציה. כל אחת מנקודות האפס היא נקודת התאפסות של אחד הגורמים הלינאריים של הפונקציה. נזכור: גורם לינארי שמופיע בריבוי זוגי אינו משפיע על סימני הפונקציה בנקודות שאינן נקודות אפס. לכן, אם הפונקציה חיובית משמאל לנקודת האפס הנקבעת על-ידי גורם זה, היא חיובית גם מימינה ולהיפך.

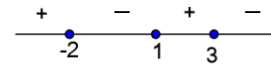
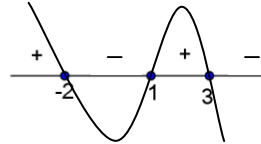
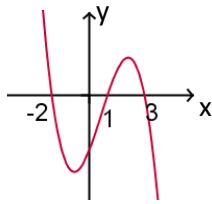
גורם לינארי שמופיע בריבוי אי-זוגי מביא להחלפת סימן הפונקציה בנקודת האפס. אם הפונקציה חיובית משמאל לנקודת האפס הנקבעת על-ידי גורם זה, היא תהיה שלילית מימין לה, ולהיפך.

דוגמה ד: מציאת תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x) = -0.5(x+2)(x-1)(x-3)$.

נקודות האפס קובעות על ציר x ארבעה תחומים חלקיים: $x < -2$; $-2 < x < 1$; $1 < x < 3$; $3 < x$.

כיוון שכל אחד מהגורמים של הפונקציה מופיע בריבוי 1 (אי-זוגי), הפונקציה מחליפה סימן בכל נקודת אפס. הצבת $x=100$ מגלה כי בקטע הימני ביותר הפונקציה שלילית.¹

איור 9 מציג גרף המסורטט בהתאם לתחומי החיוביות והשליליות לצד גרף מסורטט במחשב.



גרף מסורטט במחשב

סימני הפונקציה

איור 9

דוגמה ה: מציאת תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x) = 0.5(x+2)(x-1)^2(x-3)$.

(פונקציה זו הוצגה גם בדוגמה ג.)

נקודות האפס קובעות על ציר x ארבעה תחומים חלקיים: $x < -2$; $-2 < x < 1$; $1 < x < 3$; $3 < x$.

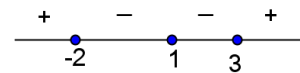
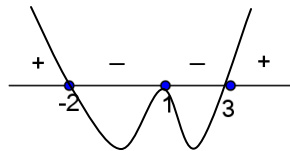
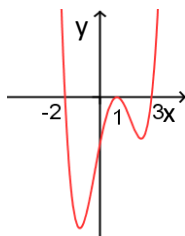
הצבת $x=10$ מגלה כי הפונקציה חיובית בתחום $x > 3$.

הגורם $(x-3)$ הקובע את נקודת האפס $x=3$ מופיע בריבוי 1 (אי-זוגי), ולכן בנקודה זו הפונקציה מחליפה סימן.

הגורם $(x-1)$ הקובע את נקודת האפס $x=1$ מופיע בריבוי 2 (זוגי), ולכן בנקודה זו הפונקציה לא מחליפה סימן.

הגורם $(x+2)$ הקובע את נקודת האפס $x=-2$ מופיע בריבוי 1 (אי-זוגי), ולכן בנקודה זו הפונקציה מחליפה סימן.

איור 10 מציג גרף המסורטט בהתאם לתחומי החיוביות והשליליות לצד גרף מסורטט במחשב.



גרף מסורטט במחשב

גרף סכמתי

סימני הפונקציה

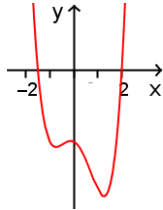
איור 10

¹ ניתן לדעת שהפונקציה שלילית בקטע $x > 3$ גם על-פי ההתנהגות הגלובלית של הפונקציה. (ר' עמוד 205).

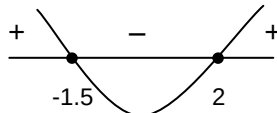
דוגמה ו: מציאת תחומי חיוביות ושלייליות של הפונקציה $g(x) = (x-2)(x+1.5)(x^2+1)$.

לפונקציה זו שתי נקודות אפס: $x = 2$ ו- $x = -1.5$. כל נקודת אפס נקבעת על-ידי גורם ליניארי בריבוי 1 (אי-זוגי). לכן הפונקציה משנה סימן בכל אחת מנקודות האפס.

מבדיקת סימני הפונקציה מקבלים שהפונקציה חיובית בתחומים $x > 2$ ו- $x < -1.5$, ושליילית בתחום $-1.5 < x < 2$.

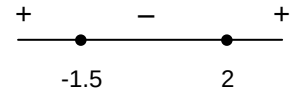


גרף מסורטט במחשב



גרף סכמתי

איור 11



סימני הפונקציה

נשים לב כי סרטוט הגרף במחשב (איור 11) מגלה שקיימות שלוש נקודות קיצון בין נקודות האפס, דבר שלא יכולנו לגלות על סמך בדיקת סימני הפונקציה בלבד.

תרגילים

1. מצאו תחומי חיוביות ושלייליות של הפונקציות הבאות, וסרטטו סקיצות של הגרפים שלהן.

א. $y = (x-2)^5$ ב. $y = x^2(x-2)^5$ ג. $y = x(x-2)(x+6)$

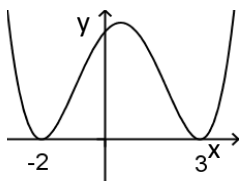
ד. $y = -x^2(x-2)^7$ ה. $y = (x+1)x^2(x-2)^5$ ו. $y = (x^2+1)x^2(x-2)^7$

2. לכל אחת מן הפונקציות בסעיף הקודם ציינו לפחות עיקרון/מרכיב ידע אחד, שמתאים להדגים בעזרתה.

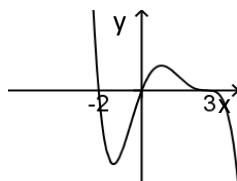
3. איזה מן הגרפים א-ו (איור 12) יכול להתאים לפונקציה מהצורה $y = a(x-3)^k(x+2)^n$.

אם הגרף אינו מתאים לייצג פונקציה כזו - הסבירו מדוע.

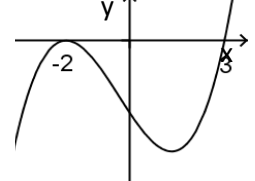
אם הגרף יכול לייצג פונקציה כזו - מה ניתן לומר על הפרמטרים a, k, n ?



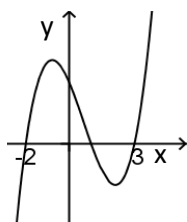
א



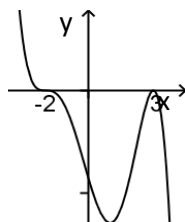
ב



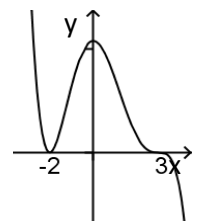
ג



ד



ה

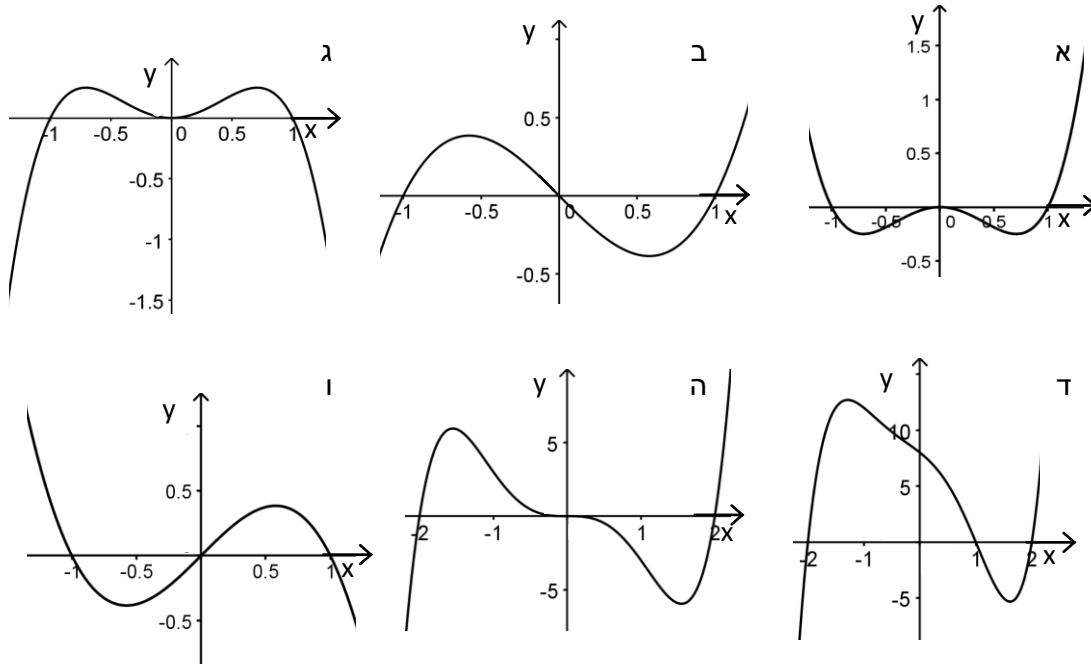


ו

איור 12

4. התאימו לפונקציות שלפניכם גרפים מבין הגרפים באיור 13 (לא לכל פונקציה מוצג גרף מתאים).

א. $f(x) = x^2(x^2 - 1)$ ב. $n(x) = x(x^2 - 1)$ ג. $h(x) = x(1 - x^2)$
 ד. $k(x) = x^2(1 - x^2)$ ה. $p(x) = x^3(x - 1)$ ו. $g(x) = (x^2 - 4)(x^3 + x - 2)$
 ז. $m(x) = x^3(x^2 - 4)$



איור 13

חקירת פונקציות דו-ריבועיות כדוגמה לחקירת פונקציות ללא שימוש בנגזרת

הגדרה

פונקציה דו-ריבועית היא פונקציה המיוצגת על-ידי הביטוי האלגברי $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$.

מקור השם פונקציה דו-ריבועית בכך שאם נחליף את x^2 במשתנה חדש, t , נקבל פונקציה ריבועית $f(t) = at^2 + bt + c$.

מטרת הפעילות הנוכחית היא להדגים חקירה של פונקציות דו-ריבועיות, שהן גם פונקציות פולינום ממעלה רביעית, תוך הפעלת שיקולים שונים הקשורים לתכונות הפונקציה, וללא שימוש בנגזרת.

לצד ההזדמנות לחקור פונקציות ללא שימוש בנגזרת, הטיפול בפונקציות דו-ריבועיות מאפשר לעסוק בטכניקה האלגברית של פירוק משוואה דו-ריבועית בהקשר שבו טכניקה זו נחוצה.

פונקציות דו-ריבועיות – שאלות חקירה

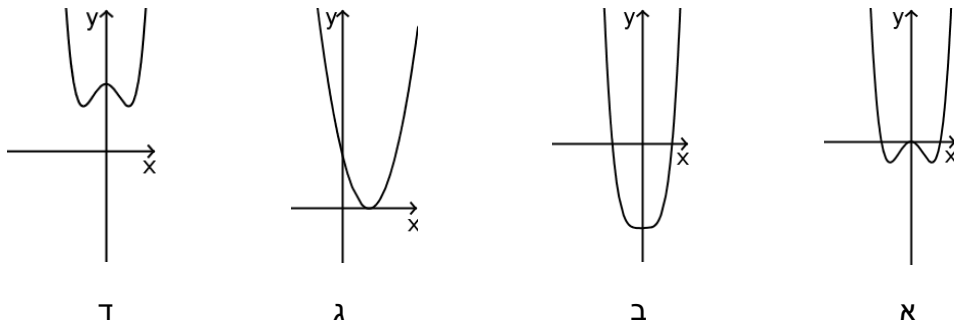
1. סרטטו או העלו בדמיונכם את הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$(א) y = x^2 \quad (ב) y = x^2 + 2 \quad (ג) y = x^2 - 1 \quad (ד) y = x^2 + 1 \quad (ה) y = x^2 - 4$$

2. על סמך תכונות הפונקציות המופיעות בסעיף הקודם בלבד, נסו לסרטט סקיצות של הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$(א) y = (x^2 + 2)(x^2 + 1) \quad (ב) y = x^2(x^2 - 1) \quad (ג) y = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$$

3. הסבירו מדוע אף אחד מן הגרפים באיור 14 אינו יכול להתאים לפונקציה $y = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$.
נסו למצוא הסברים שאינם מבוססים על הצבת ערכים בפונקציה.



איור 14

תשובות אפשריות לשאלה 3

גרפים א ו- ב אינם יכולים להתאים לפונקציה $y = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$ כיוון שפונקציה זו חיובית בכל תחומה.

גרף ג אינו יכול להתאים לפונקציה, כיוון שפונקציה דו-ריבועית היא פונקציה זוגית והגרף מתאים לפונקציה שאינה זוגית.

כדי להראות, ללא שימוש בנגזרת, שגם גרף ד אינו יכול לתאר את הפונקציה, נוכיח כי הפונקציה עולה בכל התחום $x > 0$.

הוכחה

נזכור: פונקציה f עולה בתחום נתון אם לכל x_1 ו- x_2 בתחום, שמקיימים $x_2 > x_1$, מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$.

נבחר שני ערכי x המקיימים $0 < x_1 < x_2$, ונוכיח כי $f(x_1) < f(x_2)$:

הפונקציה $y = x^2 + 2$ עולה בתחום $x > 0 \Leftrightarrow (x_1^2 + 2) < (x_2^2 + 2)$.

הפונקציה $y = x^2 + 1$ עולה בתחום $x > 0 \Leftrightarrow (x_1^2 + 1) < (x_2^2 + 1)$.

ולכן:

$$f(x_1) = (x_1^2 + 2)(x_1^2 + 1) < (x_2^2 + 2)(x_2^2 + 1) = f(x_2)$$

הוכחנו שהפונקציה $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$ עולה בכל התחום $x > 0$, ולכן גרף ד אינו יכול להתאים לה.

שאלה: מדוע לא ניתן לומר, באמצעות שיקול דומה, שהפונקציות ב ו- ג בשאלה 2 עולות בכל התחום $x > 0$?

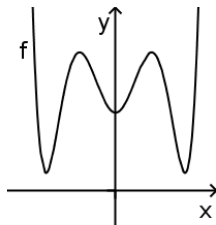
תשובה: השיקול $A > B$ ו- $A \cdot C > B \cdot D \Leftrightarrow C > D$ תקף רק כאשר A, B, C ו- D חיוביים.

4. לכל אחד מן התיאורים שלפניכם מצאו, אם ניתן, פונקציה דו-ריבועית המתאימה לתיאור. אם לא קיימת פונקציה דו-ריבועית כזו, הסבירו מדוע היא אינה קיימת.

- פונקציה דו-ריבועית שלגרף שלה יש 5 נקודות חיתוך עם ציר x .
- פונקציה דו-ריבועית שהגרף שלה חותך את ציר x בנקודות: $(-1,0); (0,0); (1,0)$.
- פונקציה דו-ריבועית שנקודות המינימום שלה הן: $(3,7)$ ו- $(-3,9)$.
- פונקציה דו-ריבועית שאין לה נקודות קיצון.

5. פונקציה דו-ריבועית – הצעה לחקירה מסתעפת

- הביאו דוגמה לפונקציה דו-ריבועית בעלת 4 נקודות אפס.
- הביאו דוגמה לשתי פונקציות נוספות בעלות אותן נקודות אפס.
- רשמו משפחה של פונקציות דו-ריבועיות אשר הפונקציות שרשמתם בסעיפים הקודמים שייכות לה.
- הביאו דוגמה לפונקציה ממשפחה זו שיש לה שתי נקודות מינימום, ופונקציה ממשפחה זו שיש לה שתי נקודות מקסימום. הסבירו כיצד ניתן לדעת, מבלי לסרטט את גרף הפונקציה באמצעות תוכנה כלשהי, שאכן יש לפונקציה שתי נקודות מינימום/מקסימום.



איור 15

ה. הסבירו מדוע הפונקציה f , שהגרף שלה מופיע באיור 15, אינה יכולה להיות פונקציה דו-ריבועית?
 רמז: מה ניתן לומר על פונקציה שהגרף שלה מתקבל מגרף זה על-ידי הזזה אופקית?

6. (1) $f(x)$ היא פונקציה דו-ריבועית. האם הפונקציות הבאות גם הן דו-ריבועיות?

- $f(2x)$
 - $2f(x)$
 - פונקציה המתקבלת מ- f על-ידי הזזה אופקית של גרף הפונקציה.
 - פונקציה המתקבלת מ- f על-ידי הזזה אנכית של גרף הפונקציה.
- (2) מצאו 3 פעולות ליניאריות נוספות על f שמהן מתקבלת פונקציה דו-ריבועית.

פתרונות לשאלות 4 - 5

4. א. לא קיימת פונקציה המתאימה לתיאור, כי פונקציה דו-ריבועית היא פונקציית פולינום ממעלה רביעית, ולכן יש לה לכל היותר 4 נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. $f(x) = x^4 - x^2$.

ג. לא קיימת פונקציה דו-ריבועית המתאימה לתיאור, כי פונקציה דו-ריבועית היא פונקציה זוגית ולכן מקיימת $f(-3) = f(3)$.

ד. לא קיימת פונקציה דו-ריבועית המתאימה לתיאור. פונקציה-דו ריבועית היא פונקציה זוגית שאיננה פונקציה קבועה, ואין לה קטעים שבהם הפונקציה קבועה. לכל פונקציה דו-ריבועית קיים קטע $0 \leq x < \delta$, בו הפונקציה עולה או יורדת. לכן הנקודה בה $x = 0$ היא תמיד נקודת מינימום או נקודת מקסימום (מקומי) של פונקציה דו-ריבועית.

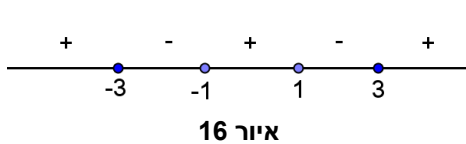
5. א. למשל: $y = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$.

ב. למשל: (1) $y = 0.2(x^2 - 1)(x^2 - 9)$ (2) $y = -8(x^2 - 1)(x^2 - 9)$.

ג. $y = m(x^2 - 1)(x^2 - 9)$.

ד. לפונקציה (1) מסעיף ב יש שתי נקודות מינימום.

נתבונן בפונקציה לאחר פירוקה לגורמים ליניאריים: $y = 0.2(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$.

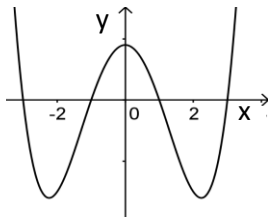


כל אחד מן הגורמים הליניאריים מופיע בריבוי 1, ולכן הפונקציה מחליפה סימן בכל נקודות האפס שלה.

איור 16 מציג את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה. כיוון שהפונקציה רציפה, בין כל שתי נקודות חיתוך עם ציר x קיימת לפחות נקודת קיצון אחת.

מכאן שבשני התחומים בהם הפונקציה שלילית קיימת נקודת מינימום. כלומר, לפונקציה יש שתי נקודות מינימום לפחות.

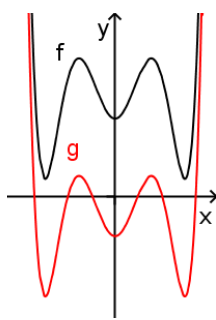
גרף הפונקציה $y = 0.2(x^2 - 1)(x^2 - 9)$ מוצג באיור 17.



משיקולים דומים נוכל להראות כי לפונקציה $y = -8(x^2 - 1)(x^2 - 9)$ יש שתי נקודות מקסימום.

בפתרון של סעיף ה מופיעים שיקולים בעזרתם אפשר לדעת שבפונקציה דו-ריבועית לא ייתכנו יותר מאשר שתי נקודות מינימום.

ה. פונקציה דו-ריבועית היא פונקציית פולינום ממעלה רביעית. נסביר מדוע גרף הפונקציה f אינו יכול להיות גרף של פונקציית פולינום ממעלה רביעית. לשם כך נתבונן באיור 18 בו מסורטטים במערכת צירים אחת גרף הפונקציה f , וגרף הפונקציה g שהתקבל ממנו על-ידי הזזה אנכית כלפי מטה. הפונקציות f ו- g נבדלות זו מזו בקבוע, ולכן הן פונקציות פולינום מאותה המעלה.



אילו f הייתה פונקציית פולינום ממעלה רביעית, גם g הייתה פונקציית פולינום ממעלה רביעית. אבל לגרף של g יש 6 נקודות חיתוך עם ציר ה- x , ואילו לפונקציית פולינום ממעלה רביעית יש, על-פי המשפט היסודי של האלגברה (ר' עמוד 600) לכל היותר 4 נקודות אפס.

כיוון ש- g איננה פונקציית פולינום ממעלה רביעית, גם f אינה פונקציית פולינום ממעלה רביעית, ולכן איננה פונקציה דו-ריבועית.

6. (1) נרשום $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$.

א. $f(2x) = a(2x)^4 + b(2x)^2 + c$. נפתח את הסוגריים ונקבל פונקציה דו-ריבועית.

ב. $2f(x) = 2ax^4 + 2bx^2 + 2c$. זו פונקציה דו-ריבועית.

ג. אם נזיז את הגרף של פונקציה (1) ב- k ימינה ($k < 0$) או שמאלה ($k > 0$) נגיע לתבנית $f(x) = a(x+k)^4 + b(x+k)^2 + c$. תבנית זו, לאחר פתיחת סוגריים, בהכרח תכיל איבר עם x^3 . לכן הפונקציה המתקבלת מהזזה אופקית של הגרף של פונקציה דו-ריבועית אינה דו-ריבועית.

ד. הזזה אנכית של גרף הפונקציה מוסיפה קבוע לתבנית הפונקציה. נסמן את הקבוע ב- k . הפונקציה החדשה היא $f(x) + k = ax^4 + bx^2 + c + k$. זו פונקציה דו-ריבועית.

(2) דוגמאות ל- 3 פעולות נוספות על פונקציה דו-ריבועית $f(x)$ אשר מביאות לפונקציה דו-ריבועית:

א. מתיחה/כיווץ אופקי של גרף הפונקציה $(f(x) \rightarrow f(kx))$.

ב. מתיחה/כיווץ אנכי של גרף הפונקציה $(f(x) \rightarrow kf(x))$, (k מספר חיובי ושונה מ-1).

ג. שיקוף של פונקציה דו-ריבועית ביחס לציר ה- x . $(f(x) \rightarrow -f(x))$.

על הצגה של פונקציה דו-ריבועית כמכפלה של פונקציות ריבועיות

מציאת נקודות אפס של פונקציה דו-ריבועית כרוך בפתרון משוואה דו-ריבועית. פתרון המשוואה גם מאפשר לרשום את הפונקציה כמכפלה של פונקציות לינאריות ו/או ריבועיות: אם למשוואה הדו-ריבועית יש ארבעה פתרונות, ניתן לרשום את הפונקציה כמכפלה של 4 פונקציות לינאריות. כאשר מספר הפתרונות קטן יותר, ניתן לרשום את הפונקציה כמכפלה של פונקציות ריבועיות או כמכפלה של פונקציות ריבועיות ולינאריות.

בסעיף זה נראה כי גם כאשר לפונקציה הדו-ריבועית אין נקודות אפס, ניתן להציג אותה כמכפלה של שתי פונקציות ריבועיות.

תהי נתונה פונקציה דו-ריבועית $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, כאשר a, b, c מספרים ממשיים ו- $a \neq 0$.

נראה כי ניתן להציג אותה כמכפלה של שתי פונקציות ריבועיות.

$$\text{היות ו- } f(x) = a \left(x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a} \right),$$

מספיק להוכיח טענה זו לפונקציה מהצורה $y = x^4 + Bx^2 + C$ כאשר B, C מספרים ממשיים כלשהם.

נוכיח את הטענה בדרך קונסטרוקטיבית על-ידי הדגמת תהליך הפירוק לגורמים, והסבר מדוע תהליך זה תמיד אפשרי. נבחין בין שני מקרים.

מקרה א: $B^2 - 4C \geq 0$. במקרה זה התהליך דומה לפירוק טרינום ריבועי.

דוגמה	שלבי התהליך
$y = x^4 + 3x^2 + 2$	
$= t^2 + 3t + 2$	נרשום את הפונקציה כפונקציה ריבועית של משתנה $t = x^2$.
$= (t + 2)(t + 1)$	נפרק פונקציה זו לשני גורמים ליניאריים.
$= (x^2 + 2)(x^2 + 1)$	נציב בפירוק $t = x^2$

מקרה ב: $B^2 - 4C < 0$.

דוגמה	שלבי התהליך
$y = x^4 + x^2 + 1$	
$= (x^4 + 1) + x^2$	נפריד את המחובר המופיע בחזקת 2, ונכניס את השניים האחרים לסוגריים.
$= (x^4 + 2x^2 + 1) + x^2 - 2x^2$	בסוגריים נוסיף איבר המשלים את הביטוי שבסוגריים לריבוע שלם, ונחסר איבר זה מחוץ לסוגריים.
$= (x^2 + 1)^2 - x^2$	נארגן את כל הביטוי כהפרש ריבועים.
$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$	נפרק הפרש זה לגורמים על-פי הנוסחה להפרש ריבועים.

טבלה 4

הערות

1. קל לראות כי הפירוק במקרה א אפשרי, שכן התנאי $B^2 - 4C \geq 0$ פירושו שהדטרמיננטה של המשוואה הריבועית במשתנה t , $t^2 + Bt + C = 0$, חיובית, ולכן יש לה שני פתרונות ממשיים t_1 ו- t_2 , ואז מתקיים $t^2 + Bt + C = (t - t_1)(t - t_2)$.

כדי להראות שהפירוק במקרה ב אפשרי תמיד, נבצע בביטוי $x^4 + Bx^2 + C$ שינויים אלגבריים זהותיים כדלקמן:

$$\begin{aligned}
 y &= x^4 + Bx^2 + C = (x^4 + C) + Bx^2 = (x^2 + \sqrt{C})^2 - (2\sqrt{C} - B)x^2 \\
 &= (x^2 + \sqrt{C})^2 - (\sqrt{2\sqrt{C} - B} \cdot x)^2 = (x^2 + \sqrt{2\sqrt{C} - B} \cdot x + \sqrt{C})(x^2 - \sqrt{2\sqrt{C} - B} \cdot x + \sqrt{C})
 \end{aligned}$$

נציין כי התנאי $B^2 - 4C < 0$ מבטיח ש- $C > 0$ וגם $2\sqrt{C} - B > 0$. לכן כל אחד מהשורשים $\sqrt{C}$ ו- $\sqrt{2\sqrt{C} - B}$ הוא מספר ממשי, והתקבל פירוק של פונקציה דו-ריבועית לשתי פונקציות ריבועיות.

2. באמצעות המשפט היסודי של האלגברה (ר' עמוד 600) ניתן להראות שכל פונקציית פולינום ממעלה רביעית, גם אם אינה פונקציה דו-ריבועית, ניתן לרשום כמכפלה של שתי פונקציות ריבועיות.

תרגיל

לפניכם רשימה של פונקציות דו-ריבועיות.

א. רשמו את הפונקציות כמכפלה של פונקציות ריבועיות.

ב. אם אפשר, רשמו את הפונקציות כמכפלה של ארבע פונקציות ליניאריות, ו/או כמכפלה של פונקציה ריבועית ושתי פונקציות ליניאריות.

$y = x^4 + 3x^2 - 4$	5.	$y = x^4 - 3x^2 + 4$	3.	$y = x^4 - 10x^2 + 9$	1.
$y = x^4 + 1$	6.	$y = x^4 - 3x^2 - 4$	4.	$y = x^4 + 10x^2 + 9$	2.

פתרון

$$1. \quad y = (x^2 - 9)(x^2 - 1) = (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$$

$$2. \quad y = (x^2 + 9)(x^2 + 1)$$

$$3. \quad y = (x^2 + \sqrt{7}x + 2)(x^2 - \sqrt{7}x + 2)$$

$$4. \quad y = (x^2 - 4)(x^2 + 1) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$$

$$5. \quad y = (x^2 + 4)(x^2 - 1) = (x^2 + 2)(x - 1)(x + 1)$$

$$6. \quad y = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$