השפעת נגזרות מסדר $n \geq 3$ על תמונתה הגרפית של פונקציה

עד כה עסקנו בקשרים שבין תכונות של פונקציה לבין תכונות הנגזרת הראשונה והנגזרת השנייה שלה.
האם שילוב נגזרות נוספות בחקירת פונקציה עשוי לגלות תכונות נוספות של הפונקציה? בתשובה לשאלה זו יש שני היבטים: היבט גלובלי והיבט לוקלי. בהיבט גלובלי מתייחסים לגרף כולו ולתכונותיו הוויזואליות, כגון, עלייה, ירידה, קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. בהיבט לוקלי מתייחסים לאיתור ואפיון נקודות מיוחדות, כגון, נקודות קיצון ונקודות פיתול. הנגזרת הראשונה אחראית, בהיבט גלובלי, על עלייה וירידה של פונקציה בתחום, ובהיבט לוקלי – על נקודות קיצון. הנגזרת השנייה אחראית, בהיבט גלובלי, על קעירות פונקציה בתחום, ובהיבט לוקלי – על נקודות פיתול. השאלה הטבעית הראשונה היא: איזה מידע טמון בנגזרת השלישית $f^{(3)}(x)$ בהיבט גלובלי ובהיבט לוקלי? במילים אחרות, מה יכולה לספר הנגזרת השלישית על התמונה הגרפית של פונקציה?

מגרף של נגזרת שלישית לגרף של פונקציה

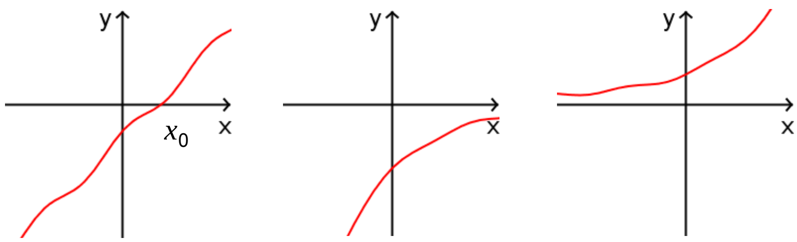
פעילות 1: הנגזרת השלישית של הפונקציה שומרת על סימן קבוע בכל התחום – מה נוכל ללמוד על הפונקציה?

נניח כי $f(x)$ פונקציה רציפה וגזירה שלוש פעמים לפחות בכל הישר הממשי, ונתבונן בשני מקרים אפשריים.

1. הנגזרת השלישית חיובית בכל התחום

נתון כי $f^{(3)}(x)>0$ לכל x. מה ניתן ללמוד על תכונות הפונקציה f?
נחלק את הדיון לשני שלבים: (א) מה ניתן ללמוד על תכונות הנגזרת השנייה f''? (ב) מה ניתן ללמוד מתכונות הנגזרת השנייה על תכונות הפונקציה f? **כדאי לחשוב על שאלות אלה לפני המשך הקריאה.**

א. מהחיוביות של הנגזרת השלישית נוכל ללמוד שהנגזרת השנייה $f''(x)$ עולה בכל התחום. מתכונה זו של $f''(x)$ ניתן להסיק כי ייתכנו שלושה מקרים: (1) $f''>0$ לכל x (איור 1), (2) $f''<0$ לכל x (איור 2), (3) $f''<0$ משמאל לנקודה x_0, $f''>0$ מימין ל- x_0 ו- $f''(x_0)=0$ (איור 3).



איור 3 איור 2 איור 1

ב. כאשר $f''>0$ לכל x כמו באיור 1 הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה בכל התחום. כאשר $f''<0$ לכל x כמו באיור 2 הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל התחום. כאשר $f''(x)$ מחליפה את סימנה ב- x_0 משלילי לחיובי כמו באיור 3 הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה משמאל ל- x_0 וקעורה כלפי מעלה מימין ל- x_0. ב- x_0 יש לפונקציה נקודת פיתול. נקודה זו היא נקודת הפיתול היחידה של הפונקציה.
אין לנו מידע לגבי סימן הנגזרת הראשונה ולכן איננו יודעים אם הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת.

איור 4

במקרה של פיתול (מקרה 3) קיימים שני מצבים אפשריים: פיתול תוך כדי ירידה כמו באיור 4א, ופיתול תוך כדי עלייה כמו באיור 4ב. בשני המקרים המעבר הוא מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה.

2. הנגזרת השלישית שלילית בכל התחום

באותה הנחה ש- $f(x)$ פונקציה רציפה וגזירה שלוש פעמים לפחות בכל הישר הממשי, נתחו:
מה ניתן ללמוד על תכונות הפונקציה f בהינתן התנאי: $f^{(3)}(x)<0$ לכל x?

ברוח הניתוח שעשינו ניתן להוכיח שני משפטים המובאים בהמשך.

השפעת סימן קבוע של הנגזרת השלישית על מספר נקודות הפיתול של פונקציה ואופיין

משפט

אם $f(x)$ פונקציה גזירה שלוש פעמים לפחות בתחום קשיר D (קטע, קרן), והנגזרת השלישית שומרת על סימן קבוע ב- D, אז ל- $f(x)$ יש לכל היותר נקודת פיתול אחת. אם $f'''(x)>0$ בכל נקודה x בתחום D, אז בנקודת הפיתול משתנה סוג הקעירות (משמאל לימין) מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה, ואם $f'''(x)<0$ הקעירות משתנה מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה.

לפי המשפט, לפונקציה אשר לנגזרת שלישית שלה יש סימן קבוע בכל התחום, יש נקודת פיתול אחת לכל היותר. כך, לפונקציה e^x אין נקודות פיתול ולפונקציה x^3-3x^2 יש נקודת פיתול יחידה $x=1$.

הערה

טענות המשפט תקפות גם כאשר $f'''(x)>0$ או $f'''(x)<0$ בכל הנקודות בתחום, למעט מספר נקודות מבודדות בהן $f'''(x)=0$. למשל, לפונקציה $f(x)=x^5$ הנגזרת השלישית $f'''(x)=60x^2$ חיובית לכל x למעט $x=0$. בכל התחום $-\infty<x<\infty$ לפונקציה יש נקודת פיתול אחת $x=0$.

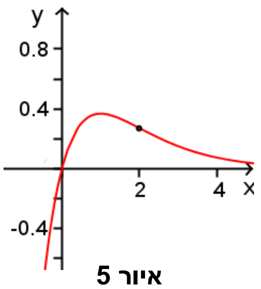
מבחן הנגזרת השלישית לנקודת פיתול

משפט

אם $f(x)$ גזירה ברציפות שלוש פעמים לפחות בסביבת הנקודה $x=x_0$ ומתקיים: $f''(x_0)=0$ ו- $f'''(x_0)\neq 0$, אזי הנקודה $x=x_0$ היא נקודת פיתול של $f(x)$. אם $f'''(x_0)>0$, אז בנקודת הפיתול משתנה סוג הקעירות (משמאל לימין) מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה, ואם $f'''(x_0)<0$ הקעירות משתנה מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה.

דוגמה

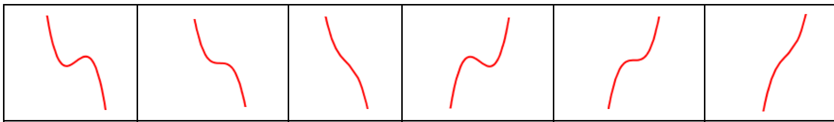
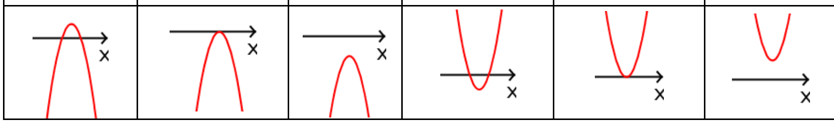
אם $f(x)=xe^{-x}$, אז: $f'(x)=(1-x)e^{-x}, f''(x)=(x-2)e^{-x}, f'''(x)=(3-x)e^{-x}$,
ומתקיים: $f''(2)=0, f'''(2)=(3-2)e^{-2}=e^{-2}>0$.
על פי המשפט לעיל, הנקודה $x=2$ היא נקודת פיתול של הפונקציה $f(x)=xe^{-x}$. היות ו- $f'''(2)>0$, הפונקציה בנקודה $x=2$ מחליפה קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה.
הגרף באיור 5 תואם מסקנה זו.



איור 5

פעילות 2: עוד נקודת מבט על פונקציות פולינום ממעלה שלישית

ראינו (עמוד 211), שכיוון שנגזרת של פונקציה ממעלה שלישית היא פונקציה ממעלה שנייה, קיימות 6 צורות אופייניות של פונקציה ממעלה שלישית. טבלה 1 מציגה את הגרפים האופייניים של פונקציות ממעלה שלישית, ואת הגרפים האופייניים של הנגזרות המתאימות.

גרף סכמתי של פונקציה ממעלה שלישית	
גרף סכמתי של הנגזרת	

טבלה 1

לכל הפונקציות בטבלה 1 יש נקודת פיתול אחת. האם **לכל** פונקציה ממעלה שלישית יש בדיוק נקודת פיתול אחת?

התשובה חיובית. נקודת הפיתול של פונקציה היא נקודת קיצון של הנגזרת שלה. הפונקציה קעורה כלפי מטה בתחום בו הנגזרת יורדת, וקעורה כלפי מעלה בתחום בו הנגזרת עולה.

בשלושת המקרים, בהם לנגזרת נקודת מינימום, הפונקציה קעורה כלפי מטה משמאל לנקודת המינימום, וקעורה כלפי מעלה מימין לה. בשלושת המקרים בהם לנגזרת נקודת מקסימום, הפונקציה קעורה כלפי מעלה משמאל לנקודת המקסימום וקעורה כלפי מטה מימין לה.

ניתן להסביר את התופעה גם בדרך אלגברית. אם $f(x)$ פונקציה ממעלה שלישית אז הנגזרת השנייה היא פונקציה ליניארית לא קבועה המשנה סימן בדיוק פעם אחת.

פעילות 3: מה קורה בנקודה בה הנגזרת השלישית משנה סימן?

נניח כי פונקציה $f(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$ וגזירה בסביבתה, למעט, אולי, בנקודה עצמה. ידוע כי אם הנגזרת הראשונה $f'(x)$ מחליפה את סימנה בנקודה $x=x_0$, אז נקודה זו היא נקודת קיצון של $f(x)$. אם פונקציה גזירה פעמיים והנגזרת השנייה $f''(x)$ מחליפה את סימנה בנקודה $x=x_0$, אז נקודה זו היא נקודת פיתול של $f(x)$. באופן טבעי עולה שאלה: אם פונקציה גזירה שלוש פעמים והנגזרת השלישית $f'''(x)$ מחליפה סימן בנקודה $x=x_0$, מהו האופי של נקודה זו? על שאלה זו עונה המשפט הבא.

משפט

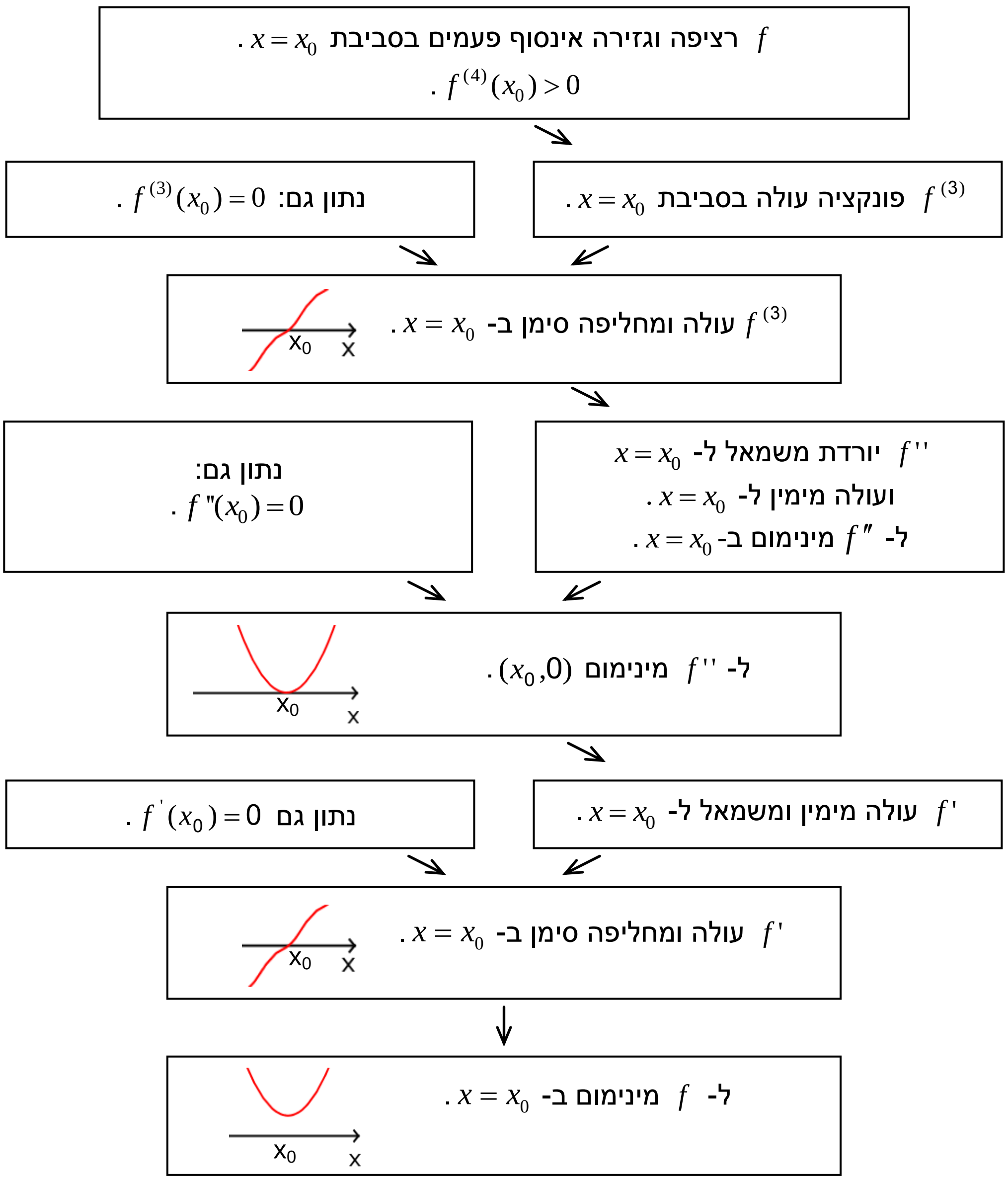
תהי $f(x)$ גזירה שלוש פעמים בנקודה $x=x_0$ ובסביבתה. אם בנקודה $x=x_0$ הנגזרת השלישית $f'''(x)$ מחליפה את סימנה, אז הפונקציה $f(x)$ שומרת על כיוון קעירותה בסביבת נקודה זו, כלפי מטה או כלפי מעלה.

הוכחה

לפי תנאי המשפט הפונקציה $f(x)$ ונגזרותיה $f'(x)$, $f''(x)$ רציפות בנקודה $x=x_0$ ובסביבתה. היות והנגזרת השלישית $f'''(x)$ מחליפה את סימנה בנקודה $x=x_0$, הנגזרת השנייה $f''(x)$ עולה/יורדת משמאל לנקודה זו, ויורדת/עולה מימין לה, במובן החזק, כך שהנקודה $x=x_0$ היא נקודת קיצון של $f''(x)$. במצב זה ל-$f''(x)$ יש סימן קבוע בסביבת הנקודה $x=x_0$, למעט, אולי, הנקודה עצמה, אשר בה $f''(x)$ יכולה להתאפס. תכונה זו של $f''(x)$ גוררת כי $f(x)$ קעורה בסביבת הנקודה $x=x_0$ בכיוון קבוע, כלפי מעלה או כלפי מטה.

פעילות 4: האם הנגזרות מסדר $n\geq 4$ של פונקציה משפיעות על צורת הגרף שלה?

$f(x)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבת $x=x_0$, שלוש נגזרותיה הראשונות מתאפסות ב- $x=x_0$ והנגזרת הרביעית חיובית בנקודה זו. מה אפשר ללמוד על הפונקציה? השיקולים מפורטים באיור 6.



איור 6

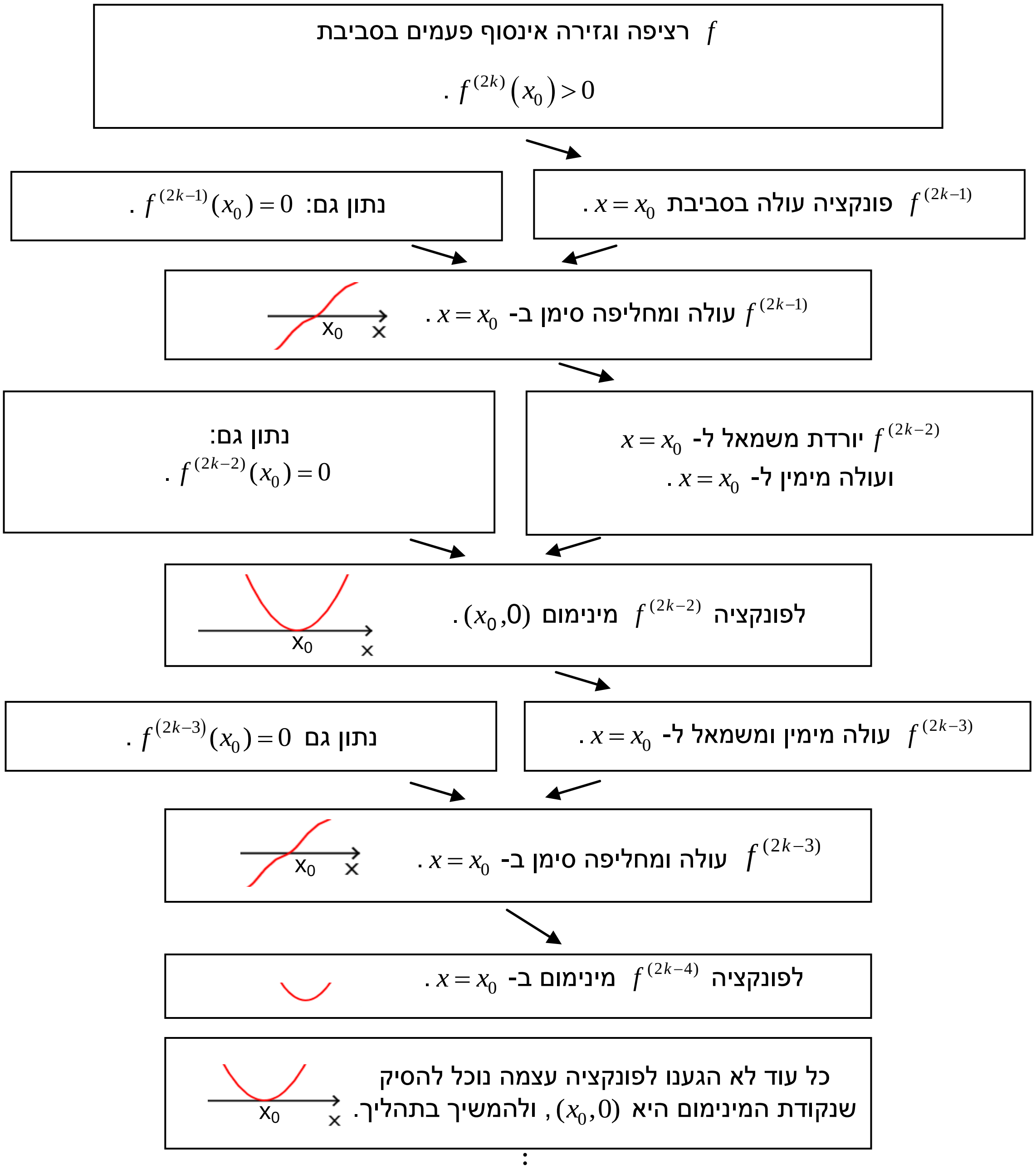
שאלות

א. מה תרם לנו המידע ששלוש הנגזרות הראשונות של הפונקציה מתאפסות ב- $x=x_0$?

ב. אילו הנגזרת הרביעית הייתה שלילית (כל שאר הנתונים נשמרים), מה יכולנו ללמוד על התנהגות הפונקציה ב- $x=x_0$? על מנת לענות על השאלה ניתן לבנות תרשים שיקולים בדומה לאיור 6.

ג. $f\left(x\right)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים ב- $x=x_0$. שבע נגזרותיה הראשונות מתאפסות ב- $x=x_0$ והנגזרת **השמינית** חיובית בנקודה זו. מה אפשר ללמוד על התנהגות הפונקציה ב- $x=x_0$?

איור 7 הוא הכללה של איור 6 למקרה שבו הנגזרת הראשונה שאינה מתאפסת היא מסדר זוגי כלשהו $n=2k$.



איור 7

אותם השיקולים יובילו אותנו לגלות שכל הנגזרות מסדר זוגי הן בעלות מינימום ב- $x=x_0$. אחת מהן, נגזרת מסדר 0, היא הפונקציה המקורית f. מכאן שלפונקציה $f(x)$ יש מינימום ב- $x=x_0$.

באותה דרך ההנחה ש- $f^{(2k)}(x_0)<0$ תביא למסקנה שלפונקציה $f(x)$ יש מקסימום ב- $x=x_0$.

ד. הפונקציה $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בסביבת $x=x_0$. ארבע נגזרותיה העוקבות החל מהנגזרת השנייה מתאפסות ב- $x=x_0$, והנגזרת **החמישית** שונה מ- 0 בנקודה זו. מה אפשר ללמוד על התנהגות הפונקציה ב- $x=x_0$?

תשובה

הפונקציה $f^{(5)}(x)$ היא הנגזרת הרביעית של f'. אם היא חיובית בנקודה $x=x_0$. אז היא מקיימת, ביחס ל פונקציה f', את כל התנאים שצוינו בתחילת פעילות 4. על-פי השיקולים המפורטים באיור 6 נוכל להסיק של- f' יש מינימום ב- $x=x_0$. נקודת קיצון של הנגזרת היא נקודת פיתול של הפונקציה. מכאן נובע של- f יש נקודת פיתול ב- $x=x_0$. כיוון שהנגזרת עוברת מירידה לעלייה, הפונקציה משנה את קעירותה מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה.

באופן דומה נוכל להראות שאם הנגזרת החמישית $f^{(5)}(x)$ שלילית בנקודה $x=x_0$, אז ל- f יש נקודת פיתול ב- $x=x_0$, שבה הפונקציה משנה את קעירותה מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה.

ניתן להכליל את המסקנות שהתקבלו בתשובה לעיל לנגזרת $f^{(2k+1)}(x)$ מסדר אי-זוגי כלשהו.

כעת נוכל לסכם את כל המסקנות שקיבלנו קודם לגבי השפעת נגזרות מסדר כלשהו על התנהגות פונקציה בסביבת נקודה במשפט הבא.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה אשר גזירה אינסוף פעמים בנקודה $x=x_0$ ובסביבתה, ולא כל הנגזרות של $f(x)$ בנקודה זו שוות ל- 0. יהי $k\geq 1$ מספר טבעי כלשהו.

א. אם בנקודה $x=x_0$ מתקיים: $f'(x_0)=0$, ובסדרת הנגזרות $f''(x_0), f'''(x_0), f^{(4)}(x_0),...$ הנגזרת הראשונה השונה מ- 0 היא נגזרת מסדר זוגי $n=2k$, אז הנקודה $x=x_0$ היא נקודת קיצון של $f(x)$.

ב. אם $f^{(2k)}(x_0)>0$, אז הקיצון הוא מינימום, ואם $f^{(2k)}(x_0)<0$, אז הוא מקסימום.

ג. אם בנקודה $x=x_0$ מתקיים: $f''(x_0)=0$ ובסדרת הנגזרות $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), f^{(5)}(x_0)...$ הנגזרת הראשונה השונה מ- 0 היא נגזרת מסדר אי-זוגי $n=2k+1$, אז הנקודה $x=x_0$ היא נקודת פיתול של $f(x)$.
אם $f^{(2k+1)}(x_0)>0$ הפונקציה קעורה כלפי מטה משמאל לנקודה $x=x_0$, וקעורה כלפי מעלה מימין לה. ולהפך, אם $f^{(2k+1)}(x_0)<0$ הפונקציה קעורה כלפי מעלה משמאל לנקודה $x=x_0$, וקעורה כלפי מטה – מימין לה.

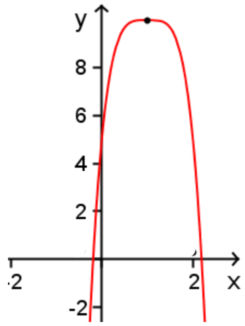
הערות

1. יש לשים לב שבטענה ב של המשפט, בניגוד לטענה א, אין דרישה ש- $f'(x_0)=0$. ואכן בנקודת פיתול הנגזרת הראשונה לא חייבת להתאפס.
2. במקרה $k=1$ טענה א הופכת למבחן הנגזרת השנייה עבור נקודת קיצון (עמוד 223) , וטענה ב הופכת למבחן הנגזרת השלישית לנקודת פיתול (עמוד 225).

דוגמאות למציאת ואפיון נקודות מיוחדות של פונקציה בעזרת נגזרות מסדר גבוה

דוגמה 1

לפונקציה $f(x)=10-5(x-1)^4$ בנקודה $x=1$ מתאפסות שלוש נגזרות עוקבות, והנגזרת הרביעית שלילית. על-פי טענה א של המשפט ($k=2$) נקודה זו היא נקודת מקסימום של הפונקציה (איור 8).



איור 8

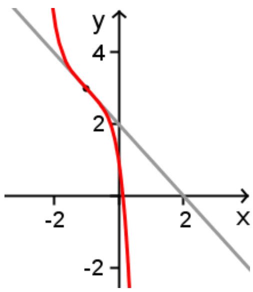
דוגמה 2

הפונקציה $f(x)=2-x-(x+1)^5$ בנקודה $x=-1$ מקיימת:

$$f'(-1)=-1,\ f''(-1)=f'''(-1)=f^{(4)}(-1)=0,\ f^{(5)}(-1)=-5!$$

על סמך טענה ב של המשפט ($k=2$), הנקודה $x=-1$ היא נקודת פיתול של $f(x)$.

היות והנגזרת החמישית שלילית בנקודה זו, הפונקציה קעורה כלפי מעלה משמאל לנקודה $x=x_0$, וקעורה כלפי מטה – מימין לה (איור 9).



איור 9

הערה

הנגזרת הראשונה בנקודת פיתול היא $f'(-1)=-1\neq 0$, ולכן הגרף בנקודה $(-1,3)$ מתפתל סביב ישר משופע בעל שיפוע -1 .