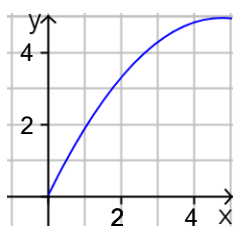


הנגזרת השנייה ושימושיה

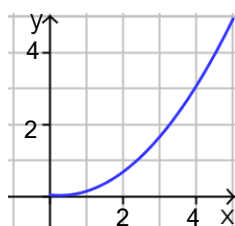
קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה

נפתח בפעילות שמטרתה: להבליט את ההבדלים בין סוגי הקעירות של הפונקציה, ליצור אצל התלמידים צורך להעשרת אוצר המילים המשמש לתיאור תכונות של פונקציות, ולהציג את המושגים נגזרת שנייה, קעירות כלפי מעלה, קעירות כלפי מטה. בנוסף, הפעילות מאפשרת להרחיב ולהעמיק את הדיון בקשר בין פונקציה לנגזרת.

מצאו את ההבדלים¹



איור 2



איור 1

לפניכם גרפים של שתי פונקציות. מצאו כמה שיותר תכונות משותפות לגרפים של שתי הפונקציות, וכמה שיותר הבדלים ביניהם.

התכונות המשותפות לפונקציות:

לשתי הפונקציות אותו תחום ואותה קבוצת תמונות. לגרפים של שתי הפונקציות יש שתי נקודות משותפות: $(0,0)$ ו- $(5,5)$. הפונקציות חיוביות בכל נקודה בתחומן, למעט $x=0$. שתי הפונקציות חד-חד ערכיות (אין תמונה המתאימה ליותר ממקור אחד). שתיהן עולות. אין להן נקודות קיצון פנימיות. בכל הנקודות הפנימיות של התחום השיפועים של הפונקציות חיוביים, כלומר, נגזרתיהן חיוביות.

ההבדלים בין שני הגרפים מצגים בטבלה 1.

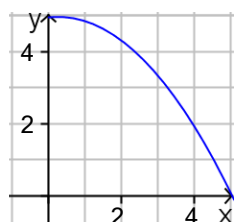
באיור 1:	באיור 2:
1. הגרף הולך ונעשה יותר תלול.	1. הגרף הולך ונעשה יותר מתון.
2. השיפוע הולך וגדל כאשר x גדל.	2. השיפוע הולך וקטן כאשר x גדל.
3. הנגזרת הראשונה היא פונקציה עולה.	3. הנגזרת הראשונה היא פונקציה יורדת.
4. כל מיתר שמחבר שתי נקודות על גרף הפונקציה נמצא מעל גרף הפונקציה (למעט נקודות הקצה הנמצאות על הגרף).	4. כל מיתר שמחבר שתי נקודות על גרף הפונקציה נמצא מתחת גרף הפונקציה (למעט נקודות הקצה הנמצאות על הגרף).
5. הגרף נמצא מעל לכל משיק לגרף הפונקציה, למעט נקודת ההשקה.	5. הגרף נמצא מתחת לכל משיק לגרף הפונקציה, למעט נקודת ההשקה.

טבלה 1

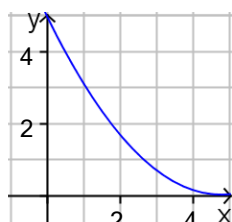
¹ מעובד מתוך רון וזסלבסקי. מצאו את ההבדלים. בקישור: <http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/open3.pdf>

בשלב זה נוצר צורך במתן שם לתכונות המאפיינות את ההבדלים בין שני הגרפים, כלומר, נוצר צורך במושגים חדשים: קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. נגדיר את המושגים האלה בהמשך.

מצאו את ההבדלים - המשך



איור 4



איור 3

התבוננו בגרפים של פונקציות באיורים 3 ו-4. השוו אותם עם הפונקציות המוצגות על-ידי הגרפים באיורים 1 ו-2 במשימה הקודמת. לאיזו פונקציה, 3 או 4, יש מאפיינים דומים למאפייני הפונקציה באיור 1, ואיזו יש מאפיינים הדומים למאפייני הפונקציה באיור 2?

גם במקרה זה מדובר בשתי פונקציות המוגדרות באותו תחום ובעלות אותה קבוצת תמונות. שתיהן חיוביות ויורדות, ושתייהן בעלות נגזרות שליליות בכל נקודה פנימית של תחום ההגדרה.

נתמקד **בהבדלים** בין שני הגרפים, ונבדוק מאפיינים דומים לאלה של הגרפים באיורים 1 ו-2.

באיור 4:	באיור 3:
1. הגרף הולך ונעשה יותר תלול.	1. הגרף הולך ונעשה יותר מתון.
2. שיפוע הגרף הולך וקטן (שלילי המתרחק מ-0) כאשר x גדל.	2. שיפוע הגרף הולך וגדל (שלילי המתקרב ל-0) כאשר x גדל.
3. הנגזרת הראשונה היא פונקציה יורדת.	3. הנגזרת הראשונה היא פונקציה עולה.
4. כל מיתר שמחבר שתי נקודות על גרף הפונקציה נמצא מתחת גרף הפונקציה (למעט נקודות הקצה הנמצאות על הגרף).	4. כל מיתר שמחבר שתי נקודות על גרף הפונקציה נמצא מעל גרף הפונקציה (למעט נקודות הקצה הנמצאות על הגרף).
5. הגרף נמצא מתחת לכל משיק לגרף הפונקציה, מחוץ לנקודת ההשקה.	5. הגרף נמצא מעל לכל משיק לגרף הפונקציה, מחוץ לנקודת ההשקה.

טבלה 2

אם נתבונן בפונקציות המוצגות באיורים 1 ו-3 נראה שיש להן מאפיינים דומים מבחינת השתנות השיפועים (הולכים וגדלים), והתנהגות הנגזרת הראשונה (פונקציה עולה). מבחינה ויזואלית הגרפים של שתי הפונקציות הללו נראים כ"נפתחים כלפי מעלה". במקרה זה נאמר שהפונקציות **קעורות כלפי מעלה**.

גם לפונקציות המוצגות באיורים 2 ו-4 יש מאפיינים דומים: בשתייהן שיפועי הגרף הולכים וקטנים, והנגזרת הראשונה היא פונקציה יורדת. מבחינה ויזואלית הגרפים האלה נראים כ"נפתחים כלפי מטה". במקרה זה נאמר שהפונקציות **קעורות כלפי מטה**.

הערות דידיקטיות

- בדרך כלל, אוצר המילים של התלמידים מאפשר לתאר את המשותף לשתי הפונקציות ביתר קלות מאשר את ההבדלים ביניהן.
 - למרות שבתכונות המשותפות אין חידוש של ממש, כדאי לעסוק גם בהן, ולקראת הצגת המונחים החדשים לשאול את התלמידים מה היה להם קל יותר לתאר - את הדומה או את השונה.
- קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה הן אפיונים חשובים של התנהגות פונקציות. נגדיר מושגים אלה תחילה **עבור קבוצה מיוחדת של פונקציות - פונקציות גזירות בתחום קשיר** (קטע אחד, קרן אחת, או הישר כולו). כשמצטמצמים לקבוצה זו ניתן לאפיין את הקעירות לסוגיה באמצעות עלייה וירידה של הנגזרת הראשונה, ובהמשך גם באמצעות הנגזרת השנייה.
- בהמשך נביא הגדרות נוספות** למושג קעירות כלפי מעלה או מטה, המתאימות גם לפונקציות שאינן גזירות, ונדון בקשרים בין ההגדרות הללו.

קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה – יסודות מתמטיים

הגדרה

פונקציה $f(x)$ גזירה בתחום קשיר על ציר המספרים הממשיים (קטע, קרן, הישר כולו) נקראת **קעורה כלפי מעלה** בבתחום זה, אם הנגזרת הראשונה $f'(x)$ היא פונקציה עולה במובן החזק. הפונקציה נקראת **קעורה כלפי מטה** בתחום זה, אם הנגזרת הראשונה $f'(x)$ היא פונקציה יורדת במובן החזק.

הערות

- ניתן לדמות גרף של פונקציה קעורה כלפי מטה כקערה הפוכה המונחת לייבוש, וגרף של פונקציה קעורה כלפי מעלה כקערה שניתן למלא אותה.
- בהמשך, הטענה "פונקציה קעורה כלפי מעלה/מטה בתחום" כוללת בתוכה את ההנחה כי התחום עליו מדובר הוא תחום קשיר. על ציר המספרים הממשיים יש רק שלושה סוגים של תחומים כאלה: קטע סגור, קרן (a, ∞) או $(-\infty, b)$, או $[a, \infty)$, או $(-\infty, b]$ וכל הישר $(-\infty, \infty)$. לתחום שאינו קשיר, למשל לתחום $(-\infty, \infty) - \{0\}$, המושג קעירות פונקציה אינו רלוונטי.

הגדרה

אם $f(x)$ קעורה כלפי מעלה **בכל תחום הגדרתה** היא נקראת **פונקציה קעורה כלפי מעלה**.
אם $f(x)$ קעורה כלפי מטה **בכל תחום הגדרתה** היא נקראת **פונקציה קעורה כלפי מטה**.

בהגדרה לעיל, כאשר אומרים ש- $f(x)$ היא פונקציה קעורה כלפי מעלה/מטה ללא ציון של תחום, פירושו: הפונקציה קעורה כלפי מעלה/מטה בכל תחום הגדרתה.

למשל, הפונקציה $f(x) = 2^x$ היא פונקציה קעורה כלפי מעלה, כי היא בעלת תכונה זו בתחום הגדרתה $-\infty < x < \infty$ (נגזרתה $f'(x) = 2^x \ln 2$ עולה ממש בתחום זה).

הערה: פונקציה ליניארית $f(x) = ax + b$ אינה קעורה כלפי מעלה או כלפי מטה (הנגזרת שלה $f'(x) = a$ היא פונקציה קבועה אשר אינה עולה ואינה יורדת במובן החזק).
טבלה 3 מסכמת את קשרים בין הפונקציה לנגזרת. ההנחה היא כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה בתחום קשיר (קטע, קרן, ישר).

תכונות של הפונקציה $f(x)$	תכונות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$
$f(x)$ עולה	$f'(x)$ חיובית
$f(x)$ יורדת	$f'(x)$ שלילית
$f(x)$ קעורה כלפי מעלה	$f'(x)$ עולה
$f(x)$ קעורה כלפי מטה	$f'(x)$ יורדת

טבלה 3

החצים החד-כיווניים מסמנים שהכיוון ההפוך אינו בהכרח נכון. למשל, ייתכן ש- $f(x)$ עולה אבל $f'(x)$ בנקודה מסוימת אינה חיובית אלא מתאפסת.

החצים הדו-כיווניים מתייחסים, לפי ההגדרה לעיל, לפונקציה $f(x)$ גזירה בתחום קשיר.

בהקשר זה חשוב לציין שגם שני הקשרים הראשונים הנקבעים על-ידי החצים החד-כיווניים אינם תקפים כאשר תחום הפונקציה אינו קשיר. למשל, לפונקציה $y = \frac{1}{x}$ הנגזרת $y' = -\frac{1}{x^2}$ שלילית בכל תחום הגדרתה ($x \neq 0$), אבל הפונקציה אינה יורדת בתחום זה.

הערה דידקטית: ההחלטה להגדיר את המושגים של קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה באמצעות הנגזרת, מצמצמת את יישומם לפונקציות גזירות בלבד. החלטה זו נעוצה בשיקולים דידקטיים. הדיון בקעירות הפונקציה באמצעות הנגזרת, תומך בהעמקת ההבנה של הקשרים בין הפונקציה לנגזרת. המושגים החדשים – קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה מספקים מידע חדש אודות התנהגות הפונקציה, ומאפשרים לתאר קשרים נוספים בין הפונקציה לבין הנגזרת. בהמשך נציע הגדרות המתאימות גם לפונקציות שאינן מקיימות את תנאי הגזירות.

על מנת להסיק על תחומי קעירות כלפי מעלה/מטה של $f(x)$ מספיק לדעת באילו תחומים הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ עולה/יורדת. תנאי מספיק לכך הוא חיוביות/שליליות של הנגזרת של הפונקציה $f'(x)$, כלומר, $(f'(x))'$. העלייה והירידה של הפונקציה הנגזרת קשורות אם כן במושג חדש – הנגזרת השנייה.

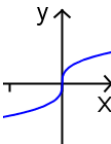
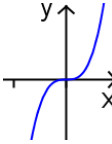
הנגזרת של הפונקציה הנגזרת של $f(x)$, נקראת **הנגזרת השנייה** של $f(x)$, והיא מסומנת $f''(x)$:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

אם בנקודה x קיימת לפונקציה $f(x)$ נגזרת שנייה $f''(x)$, אומרים שבנקודה זו פונקציה $f(x)$ **גזירה פעמיים**.

לנגזרת שנייה קוראים גם נגזרת מסדר 2. היא פותחת את הסדרה האינסופית של הנגזרות מסדר $n > 1$, אשר תוצגנה בפרק הבא.

דוגמה: הפונקציות $f(x) = x^3$ ו- $g(x) = \sqrt[3]{x}$

 $g(x) = \sqrt[3]{x}$	 $f(x) = x^3$
מוגדרת ורציפה לכל $x \in \mathbb{R}$. מתאפסת ב- $x = 0$. חיובית עבור $x > 0$ ושלילית עבור $x < 0$. הנגזרת הראשונה: $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ אינה מוגדרת ב- $x = 0$. המשיק ל- $g(x)$ בנקודה זו חסר שיפוע ומתלכד עם ציר ה- y. $g'(x)$ חיובית עבור $x < 0$ ועבור $x > 0$ ולכן $g(x)$ עולה בכל התחום $-\infty < x < \infty$. הנגזרת השנייה: $g''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ חיובית עבור $x < 0$ ושלילית עבור $x > 0$, ולכן $g(x)$ קעורה כלפי מעלה בתחום $-\infty < x < 0$, וקעורה כלפי מטה, בתחום $0 < x < \infty$.	מוגדרת ורציפה לכל $x \in \mathbb{R}$. מתאפסת ב- $x = 0$. חיובית עבור $x > 0$ ושלילית עבור $x < 0$. הנגזרת הראשונה: $f'(x) = 3x^2$ מתאפסת ב- $x = 0$. המשיק ל- $f(x)$ בנקודה זו מתלכד עם ציר ה- x. $f'(x)$ חיובית עבור $x < 0$ ו- $x > 0$ ולכן $f(x)$ עולה בכל התחום $-\infty < x < \infty$. הנגזרת השנייה: $f''(x) = 6x$ שלילית עבור $x < 0$ וחיובית עבור $x > 0$. לכן $f(x)$ קעורה כלפי מטה בתחום $-\infty < x < 0$, וקעורה כלפי מעלה בתחום $0 < x < \infty$.

טבלה 4

תנאים מספיקים לקעירות פונקציה בתחום קשיר במונחי נגזרת שנייה

משפט

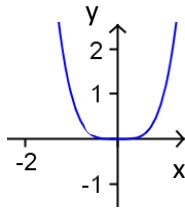
תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בתחום קשיר D (קטע, קרן או הישר כולו).

אם $f''(x) > 0$ לכל $x \in D$, הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה בתחום D .

אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in D$, הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בתחום D .

משפט זה נובע מידיית מהגדרות הקעירות של פונקציה, ומהמשפט על תנאי עלייה וירידה של פונקציה בתחום קשיר.

הערה



איור 5

חשוב לציין שהתנאים במשפט לעיל הם תנאים מספיקים אך לא הכרחיים לקעירות של פונקציה $f(x)$ כלפי מעלה או כלפי מטה. ייתכן שפונקציה תהיה קעורה כלפי מעלה (מטה) בתחום D אבל יהיו נקודה או מספר נקודות בתחום שבהן $f''(x)$ לא תהיה חיובית (שלילית).

למשל, הפונקציה $f(x) = x^4$ קעורה כלפי מעלה בכל התחום $-\infty < x < \infty$ (איור 5). אבל הנגזרת השנייה: $f''(x) = 12x^2$ מתאפסת בנקודה $x = 0$.

הגדרות נוספות של קעירות של פונקציה

בסעיף זה נציג שתי הגדרות נוספות למושג הקעירות (כלפי מעלה או כלפי מטה) ובהמשך נדון בקשר בין כל ההגדרות של מושגים אלה שהוצגו בפרק זה.

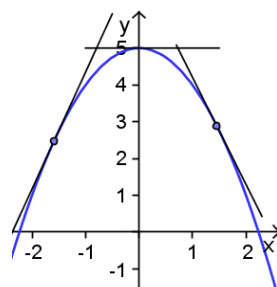
הגדרה באמצעות משיקים

אם פונקציה $f(x)$ **גזירה** בתחום קשיר (קטע אחד, קרן אחת או הישר כולו), בהגדרות הקעירות שלה ניתן להשתמש במשיקים.

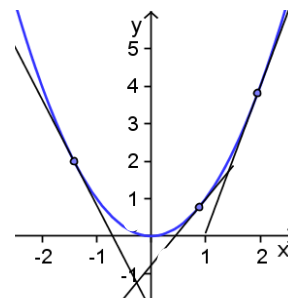
פונקציה $f(x)$, אשר **גזירה** בתחום קשיר (קטע, קרן, ישר) נקראת **קעורה כלפי מעלה** בתחום זה אם הגרף של $f(x)$ בתחום זה נמצא כולו מעל לכל ישר המשיק לגרף, למעט נקודת ההשקה (שהיא משותפת למשיק ולגרף).

הפונקציה $f(x)$, אשר **גזירה** בתחום קשיר (קטע, קרן, ישר) נקראת **קעורה כלפי מטה** בתחום זה אם הגרף של $f(x)$ בתחום זה נמצא כולו מתחת לכל ישר המשיק לגרף, למעט נקודת ההשקה (שהיא משותפת למשיק ולגרף).

איורים 6, 7 מדגימים את ההגדרות לעיל באופן ויזואלי.



איור 7



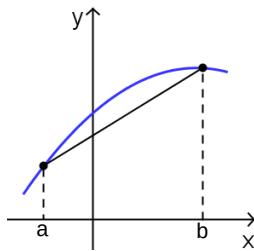
איור 6

הגדרה באמצעות מיתרים

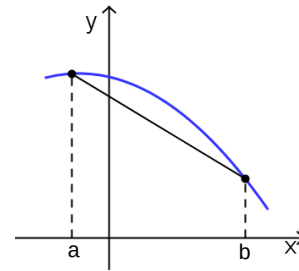
קיימות הגדרות נוספות למושג קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה, חוץ מאלה שהוצגו עד כה, נביא הגדרה באמצעות מיתרים ונדון מהם היתרונות ומהם החסרונות של הגדרה זו לעומת הקודמות.

הגדרות

פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום קשיר נקראת **קעורה כלפי מטה** בתחום זה, אם הגרף שלה בכל קטע (a,b) בתחום נמצא **מעל** למיתר המחבר את קצות הגרף בקטע זה.

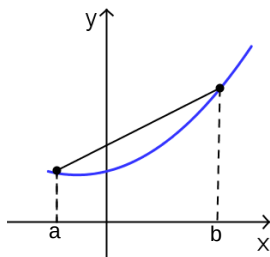


איור 9

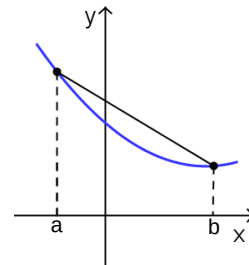


איור 8

פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום קשיר נקראת **קעורה כלפי מעלה** בתחום זה, אם הגרף שלה בכל קטע (a,b) בתחום נמצא **מתחת** למיתר המחבר את קצות הגרף בקטע זה.



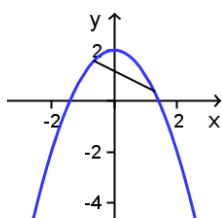
איור 11



איור 10

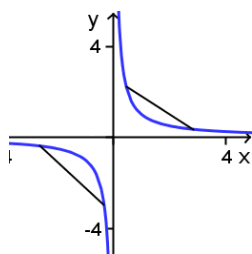
כיוון שהגדרה באמצעות מיתרים אינה מבוססת על מושג הנגזרת היא רחבה יותר, ומתאימה גם לפונקציות שאינן גזירות, אלא רק מוגדרות ורציפות בתחום קשיר. הגדרה זו פשוטה ואינטואיטיבית מאוד. ההתייחסות לפונקציה אינה אנליטית אלא גרפית / גאומטרית בלבד. יחד עם זאת הגדרה זו אינה נותנת בידינו כלי שימושי למציאת תחומי קעירות כלפי מעלה או מטה של פונקציה, ולסרטוט של גרף הפונקציה.

דוגמאות ליישום ההגדרות באמצעות מיתרים



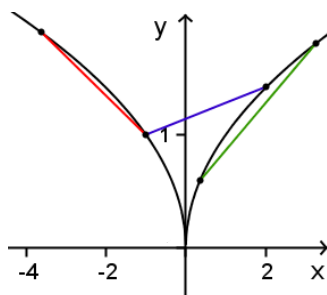
איור 12

1. הפונקציה $f(x) = 2 - x^2$ (איור 12), מוגדרת בתחום $-\infty < x < \infty$ וקעורה כלפי מטה בכל התחום על-פי כל ההגדרות.



איור 13

2. הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x}$ (איור 13), מוגדרת בתחום $x \neq 0$ שאינו קשיר, ולכן ההגדרה בעזרת המיתרים, כמו ההגדרות האחרות, אינה ישימה בתחום ההגדרה כולו. בכל אחד מהתחומים החלקיים: $x > 0$ ו- $x < 0$ הפונקציה קעורה: כלפי מעלה בתחום $x > 0$ וכלפי מטה בתחום $x < 0$.

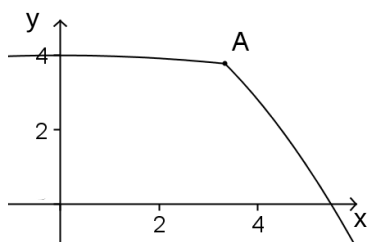


איור 14

3. הפונקציה $f(x) = \sqrt{|x|}$ (איור 14), מוגדרת ורציפה על כל הישר הממשי. היא גזירה בכל נקודה, למעט $x = 0$. בכל אחד מהתחומים החלקיים $x < 0$ ו- $x > 0$ הפונקציה גזירה בכל נקודה וקעורה כלפי מטה לפי כל ההגדרות שהוזכרו לעיל. בתחום $-\infty < x < \infty$ קיימת נקודה שבה הפונקציה אינה גזירה. בתחום זה תקפה רק הגדרת הקעירות באמצעות מיתרים. לפי הגדרה באמצעות מיתרים, בתחום $-\infty < x < \infty$ הפונקציה $f(x) = \sqrt{|x|}$ אינה קעורה לא כלפי מעלה ולא כלפי מטה. באיור 14 ניתן לראות שלפונקציה $f(x) = \sqrt{|x|}$ יש גם מיתר מתחת לגרף הפונקציה וגם מיתר מעל לגרף הפונקציה.

4. הפונקציה (איור 15):

$$f(x) = \begin{cases} -0.02x^2 + 4 & x < 3\frac{1}{3} \\ -0.2x^2 + 6 & x \geq 3\frac{1}{3} \end{cases}$$



איור 15

מוגדרת על כל הישר הממשי, אבל היא אינה גזירה בנקודה A שבה $x = 3\frac{1}{3}$. בכל אחד מהתחומים החלקיים $x < 3\frac{1}{3}$ ו- $x > 3\frac{1}{3}$ הפונקציה רציפה, גזירה, וקעורה כלפי מטה, על-פי כל אחת מההגדרות.

כמו בדוגמה הקודמת, לא ניתן ליישם את הגדרת הקעירות על-פי הנגזרת הראשונה או על-פי המשיקים בתחום $-\infty < x < \infty$, כי ההגדרות אלה תקפות רק בתנאי שאין בתחום אף נקודת שבה הפונקציה אינה גזירה. את ההגדרה על-פי מיתרים, הדורשת רק רציפות בתחום, ניתן ליישם בכל התחום. לפי הגדרה זו הפונקציה קעורה כלפי מטה בכל התחום $-\infty < x < \infty$.

קשר בין ההגדרות השונות של קעירות

עד כה ראינו שלוש דרכים להגדיר את המושג קעירות כלפי מעלה/מטה. (1) הגדרה במונחי הנגזרת הראשונה, (2) הגדרה באמצעות משיקים (3) הגדרה באמצעות מיתרים.

הקשר בין ההגדרות מנוסח במשפטים הבאים.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בתחום קשיר D (קטע, קרן, ישר).

- א. הפונקציה הנגזרת הראשונה $f'(x)$ עולה ב- D , אם ורק אם הגרף של $f(x)$ נמצא כולו מעל לכל ישר המשיק לגרף (למעט נקודת ההשקה שבה הגרף והמשיק מתלכדים).
- ב. הפונקציה הנגזרת הראשונה $f'(x)$ יורדת ב- D , אם ורק אם הגרף של $f(x)$ נמצא כולו מתחת לכל ישר המשיק לגרף, למעט נקודת ההשקה.

משפט

פונקציה $f(x)$, אשר גזירה בתחום קשיר D , קעורה כלפי מעלה/מטה בתחום זה לפי הגדרה 2, אם ורק אם היא קעורה ב- D כלפי מעלה/מטה לפי הגדרה 3.

במילים אחרות:

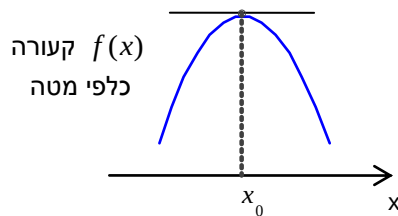
- כאשר $f(x)$ גזירה בכל נקודה בתחום קשיר D שלוש ההגדרות של קעירות כלפי מעלה (או מטה) שקולות זו לזו.
- ההגדרות על-פי משיקים וההגדרות על-פי מיתרים שקולות במחלקת הפונקציות הגזירות, אבל לא ניתן לומר שהן הגדרות שקולות, כי קבוצות הפונקציות בהן ניתן ליישם הגדרות אלה שונות. ההגדרה באמצעות משיקים ישימה לקבוצת הפונקציות הגזירות, והגדרה באמצעות מיתרים ישימה לקבוצה יותר רחבה של הפונקציות – הפונקציות הרציפות.
- כאשר לפונקציה רציפה $f(x)$ יש בתחום נקודת אי-גזירות, ההגדרות על-פי נגזרת ועל-פי משיקים אינן תקפות בתחום זה. ויש להשתמש בהגדרה באמצעות מיתרים שהיא תקפה לכל פונקציה רציפה בתחום קשיר.

הוכחות המשפטים מופיעות בעמוד 612.

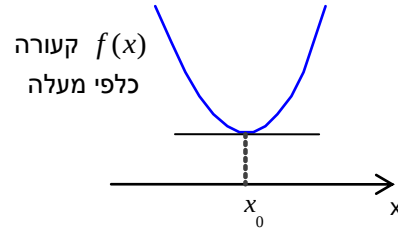
מבחני קיצון במונחי הנגזרת השנייה

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בסביבת הנקודה x_0 שהיא נקודת מינימום או מקסימום מקומי.

ההתנהגות האופיינית של לפונקציות מוכרות רבות, בסביבת נקודת קיצון, היא כמו באיורים להלן:



איור 17: תמונה אופיינית של פונקציה
בסביבת נקודת מקסימום



איור 16: תמונה אופיינית של פונקציה
בסביבת נקודת מינימום

לכן אינטואיטיבית נקודת מינימום מתקשרת עם קעירות כלפי מעלה, ונקודת מקסימום מתקשרת עם קעירות כלפי מטה.

יחד עם זאת קיימות פונקציות שהתנהגותן שונה, ויש להן נקודת מינימום/מקסימום למרות שאינן קעורות כלפי מעלה/מטה בסביבת נקודה זו.

המשפט הבא מציג קריטריון לנקודות קיצון בעזרת סוג הקעירות של הפונקציה. לאחר הוכחת המשפט נראה שלא מתקיים משפט בכיוון ההפוך.

משפט

תהי פונקציה $f(x)$ גזירה בסביבת הנקודה $x = x_0$ ויהי $f'(x_0) = 0$. בתנאים אלה:

- א. אם $f(x)$ קעורה כלפי מעלה בסביבת x_0 , אזי הנקודה $x = x_0$ היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.
- ב. אם $f(x)$ קעורה כלפי מטה בסביבת x_0 , אזי הנקודה $x = x_0$ היא נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

הוכחה

נניח כי $f(x)$ קעורה כלפי מעלה בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$. לפי ההגדרה, $f'(x)$ עולה בסביבה זו. נראה שמכך נובע כי נקודת האפס של הנגזרת ($f'(x_0) = 0$) היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

מכיוון ש- $f'(x)$ היא פונקציה עולה בסביבה מסוימת של $x = x_0$, אז לכל נקודה x_1 מימין ל- x_0 בסביבה זו ($x_1 > x_0$) מתקיים: $f'(x_1) > f'(x_0) = 0$. על-פי הנתון: $f'(x_0) = 0$, לכן $f'(x_1) > 0$ לכל נקודה x_1 מימין ל- x_0 אשר די קרובה ל- x_0 .

באופן דומה, לכל נקודה x_2 משמאל ל- x_0 ($x_2 < x_0$) בסביבה מסוימת של $x = x_0$ מתקיים: $f'(x_2) < f'(x_0) = 0$, ולכן $f'(x_2) < 0$ לכל נקודה x_2 משמאל ל- x_0 אשר די קרובה ל- x_0 .

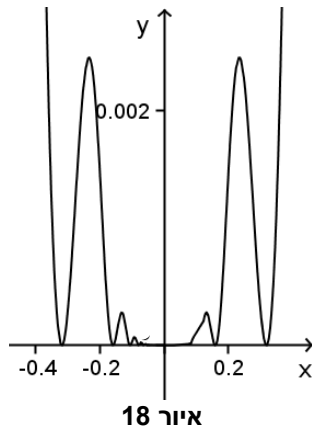
קיבלנו שהנגזרת הראשונה $f'(x)$, בסביבת $x = x_0$, שלילית משמאל ל- $x = x_0$, מתאפסת כאשר $x = x_0$ וחיובית מימין ל- $x = x_0$. מידע זה ניתן להציג בטבלה:

x	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
f'	-	0	+
f			

טבלה 5

מכאן נובע שבסביבה מסוימת של $x = x_0$ הפונקציה $f(x)$ עולה משמאל ל- $x = x_0$ ויורדת מימין ל- $x = x_0$. לכן נקודה זו היא נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

בכך הוכחה טענה א של המשפט.



נשאיר לקוראים את הוכחת טענה ב. 

הערה: הטענה ההפוכה אינה נכונה. בנקודת מינימום מקומי פונקציה גזירה אינה חייבת להיות קעורה באף כיוון, ובאף סביבה של נקודה זו.

למשל, הנקודה $x = 0$ היא נקודת מינימום מקומי מוחלט של הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(איור 18). הפונקציה גזירה (ואף פעמיים) בכל התחום $-\infty < x < \infty$, כולל בנקודה $x = 0$, ובכל זאת לא קיימת סביבה של $x = 0$ שבה הפונקציה קעורה בכיוון כלשהו (כלפי מעלה או כלפי מטה), כיוון שבכל סביבה של $x = 0$ הפונקציה משנה את סוג הקעירות אינסוף פעמים.

יחד עם זאת, אם פונקציה רציפה וגזירה פעמיים ברציפות, ולנגזרת השנייה יש מספר סופי של נקודות אפס, אזי לכל נקודת קיצון מקומי פנימית של פונקציה זו קיימת סביבה בה הפונקציה קעורה, כלפי מעלה (מינימום) או כלפי מטה (מקסימום).

מבחן הנגזרת השנייה לנקודת קיצון

בסעיף הקודם ראינו שניתן למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה או מטה של פונקציה על-פי הסימן של הנגזרת השנייה $f''(x)$. המשפט הבא מראה איך סימן זה עוזר לאיתור נקודות קיצון.

משפט

תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בסביבת נקודה $x = x_0$. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) \neq 0$ אז הנקודה $x = x_0$ היא נקודת קיצון של $f(x)$ ומתקיים:

א. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) > 0$ אז x_0 היא מינימום.

ב. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) < 0$ אז x_0 היא מקסימום.

הוכחה

נניח כי $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) > 0$. התנאי $f''(x_0) > 0$ פירושו:

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

מכאן, על-פי תכונת הגבולות, נובע כי קיימת סביבה של $x = x_0$ כך, שלכל $x \neq x_0$ בסביבה זו מתקיים:

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

עבור $x < x_0$, המכנה בשבר לעיל שלילי: $x - x_0 < 0$, ולכן גם המונה שלילי: $f'(x) - f'(x_0) < 0$.

מכאן: $f'(x) < f'(x_0)$ לכל $x < x_0$, בסביבה מסוימת של $x = x_0$. נתון כי: $f'(x_0) = 0$ ולכן: $f'(x) < 0$ בסביבה של x_0 משמאל ל- x_0 .

עבור $x > x_0$, המכנה בשבר לעיל חיובי: $x - x_0 > 0$, ולכן גם המונה חיובי: $f'(x) - f'(x_0) > 0$. מכאן: $f'(x) > f'(x_0)$ לכל $x > x_0$, בסביבה מסוימת של $x = x_0$. נתון כי: $f'(x_0) = 0$ ולכן: $f'(x) > 0$ בסביבה של x_0 מימין ל- x_0 .

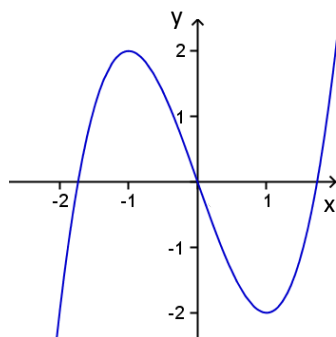
קיבלנו שהנגזרת הראשונה $f'(x)$ שלילית משמאל ל- x_0 , מתאפסת ב- x_0 וחיובית מימין ל- x_0 . מכאן שבנקודה זו הפונקציה עוברת מירידה לעלייה ולכן x_0 היא נקודת מינימום.

טענה א של המשפט הוכחה. נשאיר לקוראים את הוכחת טענה ב.

הערה

המשפט נותן רק תנאי מספיק לנקודת קיצון, ולא תנאי הכרחי. ייתכן כי $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ והנקודה x_0 היא נקודת קיצון מקומי ואף מוחלט. לדוגמה: $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

דוגמה לשימוש בנגזרת שנייה לאיתור ואפיון נקודות קיצון



איור 19

נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x$.
 הפונקציה הנגזרת $f'(x) = 3x^2 - 3$ מתאפסת בנקודות $x = \pm 1$. נקודות אלה חשודות כנקודות קיצון.

נבדוק את סימן הנגזרת השנייה $f''(x) = 6x$ בנקודות אלה.
 מתקיים: $f''(1) > 0$, $f''(-1) < 0$. מכאן, על-פי המשפט, הנקודה $x = 1$ היא נקודת מינימום של $f(x)$, והנקודה $x = -1$ היא נקודת מקסימום של $f(x)$.
 הגרף באיור 19 תואם מסקנות אלה.

הנגזרת השנייה מהווה כלי נוח ושימושי מאוד לקביעת סוג הקיצון. דוגמאות רבות לכך יופיעו בהמשך.

במקרים מסוימים קביעת סוג הקיצון באמצעות הנגזרת השנייה אינה אפשרית או אינה יעילה. למצבים אלה מוקדש הסעיף הבא.

מצבים בהם שימוש בנגזרת שנייה לקביעת סוג הקיצון אינו יעיל או אינו אפשרי

א. מציאת הנגזרת השנייה דורשת עבודה רבה

דוגמה

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x) = \frac{5x^2}{x^3 + 4}$.

פתרון

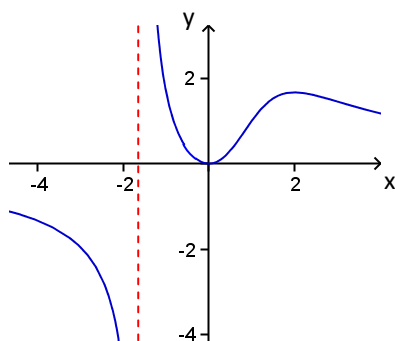
הנגזרת הראשונה: $f'(x) = \frac{40x - 5x^4}{(x^3 + 4)^2}$ מתאפסת עבור $x = 0$ ו-

$x = 2$ לכן נקודות אלה חשודות כנקודות קיצון. שתי הנקודות הללו נמצאות מימין לאסימפטוטה האנכית $x = \sqrt[3]{-4}$.

מציאת $f''(x)$ דורשת עבודה טכנית רבה ועלולה לגרום לטעויות חישוב. לכן במקרה זה נוח יותר לבדוק את סימן הנגזרת הראשונה מימין ומשמאל ל- $x = 0$ ו- $x = 2$.

נשים לב, שהמכנה של $f'(x)$ חיובי לכל x , ולכן מספיק לבדוק רק את סימן המונה. בדיקה זו מגלה ש- $x = 0$ היא נקודת מינימום ו- $x = 2$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה הנתונה.

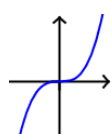
איור 20 מציג את גרף הפונקציה.



איור 20

ב. הנגזרת השנייה מתאפסת בנקודה החשודה כנקודת קיצון, כלומר, $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$.

נשים לב שתנאי המשפט דורשים: $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) \neq 0$. כאשר תנאי זה לא מתקיים במלואו, כלומר, אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$, אז ל- $f(x)$ נקודה x_0 יכולה להיות נקודת מינימום או נקודת מקסימום, או ייתכן ש- x_0 אינה נקודת קיצון כלל. להלן דוגמאות המציגות את כל המקרים האפשריים.

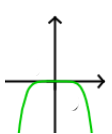


$h(x) = x^3$

$h'(x) = 3x^2 \quad h'(0) = 0$
 $h''(x) = 6x \quad h''(0) = 0$

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	+

נקודת פיתול (0,0)

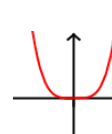


$g(x) = -x^6$

$g'(x) = -6x^5 \quad g'(0) = 0$
 $g''(x) = -30x^4 \quad g''(0) = 0$

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-

נקודת מקסימום (0,0)



$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3 \quad f'(0) = 0$
 $f''(x) = 12x^2 \quad f''(0) = 0$

x	-1	0	1
$f'(x)$	-	0	+

נקודת מינימום (0,0)

טבלה 6

כאשר גם $f'(x_0) = 0$ וגם $f''(x_0) = 0$, ניתן להשתמש בסימן של הנגזרת הראשונה $f'(x)$ בסביבת הנקודה החשודה $x = x_0$, כדי לבדוק האם זו אכן נקודת קיצון ולקבוע את סוגו.

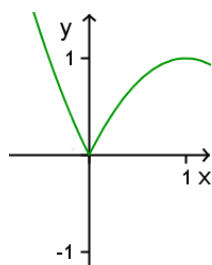
נקודות פיתול ומבחניה

כפי שראינו קעירות כלפי מעלה או כלפי מטה היא תכונה לוקלית, כלומר, במקרים רבים פונקציה קעורה כלפי מעלה בתחומים מסוימים, וקעורה כלפי מטה בתחומים אחרים.

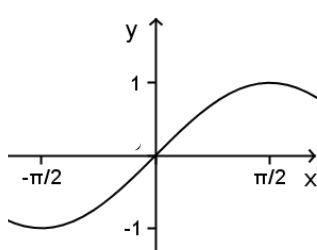
הגדרה

נקודה שבה פונקציה רציפה מחליפה את כיוון הקעירות שלה (עוברת מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה או להיפך) נקראת נקודת פיתול של הפונקציה.

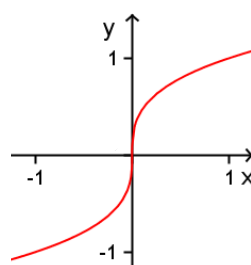
דוגמאות לפונקציות עם נקודת פיתול ב- $x = 0$.



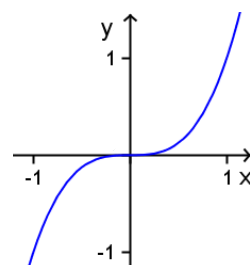
ד. $h(x) = |x^2 - 2x|$



ג. $k(x) = \sin x$



ב. $g(x) = \sqrt[3]{x}$



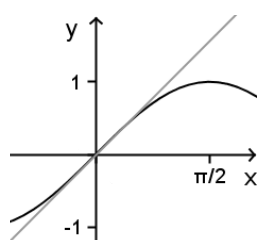
א. $f(x) = x^3$

איור 21

לכל אחת מהפונקציות באיור 21 יש נקודת פיתול ב- $x = 0$, מאחר ובנקודה זו הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה (או להיפך). ננסה לאפיין את הנקודות הללו ונבדוק מה קורה לפונקציה בנקודה זו. נתבונן במצב ההדדי של הגרף והישר המשיק לו בנקודה $(0, 0)$.

מקרה א: הפונקציה גזירה ב- $x = 0$, קיים משיק לגרף הפונקציה בנקודה זו המתלכד עם ציר ה- x . משיק זה חותך את גרף הפונקציה. משמאל לנקודת הפיתול הגרף נמצא מתחת למשיק, ומימין לנקודה זו הגרף נמצא מעל למשיק.

מקרה ב: בנקודת הפיתול $x = 0$ הפונקציה אינה גזירה אבל קיים משיק לגרף הפונקציה בנקודה זו. משיק זה מתלכד עם ציר ה- y וחותר את הגרף. בנקודת הפיתול הגרף עובר מצד שמאל של המשיק לצד ימין של המשיק.



איור 22

מקרה ג: בנקודת הפיתול $x = 0$ הפונקציה גזירה וערך הנגזרת בנקודה זו הוא 1, כלומר, לגרף שלה בנקודה זו יש משיק אשר מתלכד עם הישר $y = x$. המשיק חותך את גרף הפונקציה. משמאל לנקודת הפיתול הגרף נמצא מעל המשיק, ומימין לנקודה זו הגרף נמצא מתחת למשיק (איור 22).

מקרה ד: בנקודה $x = 0$ לפונקציה יש נקודת פיתול כי היא רציפה בנקודה זו והגרף שלה, במבט משמאל לימין, עובר מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה. בנקודת הפיתול $x = 0$ הפונקציה אינה גזירה ואין לה משיק.

לסיכום: אם בנקודת פיתול של פונקציה קיים משיק לגרף שלה, אזי בנקודה זו הגרף "מתפתל" סביב המשיק, כלומר, עובר מצד אחד לצד שני של המשיק.

הדיון במשיק לגרף הפונקציה בנקודת פיתול שלה חשוב, גם מכיוון שאצל תלמידים רבים קיימת תפיסה שגויה לפיה משיק לא יכול לחתוך את גרף הפונקציה, או, במילים אחרות, בסביבת נקודת ההשקה הגרף חייב להימצא בצד אחד של המשיק.

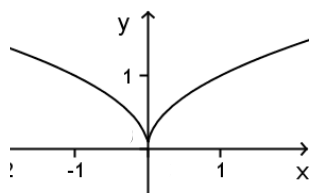
נתבונן במרכיבי ההגדרה של נקודת פיתול.

הנקודה $x = x_0$ נקראת נקודת פיתול של פונקציה $f(x)$ אם:

- $x = x_0$ היא נקודה פנימית בתחום של הפונקציה,
- הפונקציה רציפה בנקודה $x = x_0$,
- קיימת סביבה של נקודה זו, בה הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה/ מטה משמאל ל- x_0 וקעורה כלפי מטה/ מעלה מימין ל- x_0 .

בדקו שנקודות הפיתול באיור 21 לעיל במקרים א-ד תואמות את ההגדרה הנ"ל.

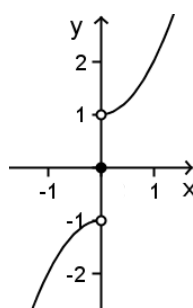
הערה: אם בנקודה $x = x_0$ אחד התנאים בהגדרה אינו מתקיים עבור פונקציה נתונה $f(x)$, אז נקודה זו אינה נקודת פיתול של $f(x)$.



איור 23

למשל, לפונקציה $h(x) = \sqrt{|x|}$ הנקודה $x = 0$ מקיימת את שתי הדרישות הראשונות של ההגדרה לעיל, אבל היא אינה נקודת פיתול של הפונקציה $h(x) = \sqrt{|x|}$, מאחר ופונקציה זו קעורה כלפי מטה הן משמאל והן מימין לנקודה $x = 0$, כפי שרואים באיור 23.

הפונקציה:



איור 24

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

מקיימת את התנאי הראשון ואת התנאי השלישי. היא קעורה כלפי מעלה מימין ל- $x = 0$, וקעורה כלפי מטה משמאל ל- $x = 0$, והיא נקודה פנימית של תחום ההגדרה. אך כיוון שהפונקציה אינה רציפה ב- $x = 0$, אין לה שם נקודת פיתול (איור 24).

אפיון של נקודות פיתול באמצעות הנגזרת השנייה

נניח כי $f(x)$ רציפה וגזירה פעמיים. ראינו שתחומי קעירות כלפי מעלה או מטה של הפונקציה נקבעים על-פי סימן הנגזרת השנייה $f''(x)$. הסימן של $f''(x)$ נשאר קבוע בתחומים החלקיים בין הנקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת ($f''(x) = 0$) או אינה מוגדרת.

המשפט הבא, המובא כאן ללא הוכחה, חיוני לאיתור נקודות פיתול.

משפט

תהי $f(x)$ רציפה בנקודה $x = x_0$ וגזירה פעמיים בסביבתה, למעט אולי נקודה זו. אם $x = x_0$ היא נקודת פיתול של הפונקציה אז מתקיים אחד משני המקרים: $f''(x_0) = 0$ או $f''(x_0)$ אינה קיימת.

המשפט לעיל קובע רק תנאים הכרחיים אבל לא מספיקים לנקודת פיתול. ייתכן ש- $f''(x_0) = 0$ או $f''(x_0)$ אינה קיימת, אבל לפונקציה אין נקודת פיתול ב- $x = x_0$. למשל:

הפונקציה $f(x) = x^4$ מקיימת: $f''(0) = 0$, אולם לפונקציה זו יש נקודת מינימום ב- $x = 0$.

הפונקציה $h(x) = \sqrt{|x|}$ אינה גזירה ב- $x = 0$, לכן $f''(0)$ אינה קיימת. אולם ב- $x = 0$ אין לפונקציה זו נקודת פיתול (כפי שראינו קודם).

אם $f''(x_0) = 0$ או $f''(x_0)$ אינה קיימת, אז הנקודה $x = x_0$ היא **נקודה חשודה** כנקודת פיתול. על מנת לבדוק האם $x = x_0$ היא אכן נקודת פיתול, יש לבדוק האם הפונקציה משנה את כיוון הקעירות בנקודה זו. להלן משפט המאפשר לזהות את הנקודות החשודות כנקודות פיתול על-פי התנהגות הנגזרת הראשונה. שיתאחריו מראות דרך להוכחתו.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בנקודה $x = x_0$, גזירה בסביבת $x = x_0$, כולל $x = x_0$, והנגזרת $f'(x)$ רציפה גם היא בנקודה $x = x_0$. אם הנקודה $x = x_0$ היא נקודת פיתול של $f(x)$, אז היא בהכרח נקודת קיצון של הנגזרת הראשונה $f'(x)$.

x	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
f	קעורה כלפי מטה	נקודת פיתול	קעורה כלפי מעלה
f'			

טבלה 8

x	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
f	קעורה כלפי מעלה	נקודת פיתול	קעורה כלפי מטה
f'			

טבלה 7

הערה

הטענה ההפוכה לטענת המשפט אינה נכונה, כלומר, נקודת קיצון של הנגזרת אינה חייבת להיות נקודת פיתול של הפונקציה.

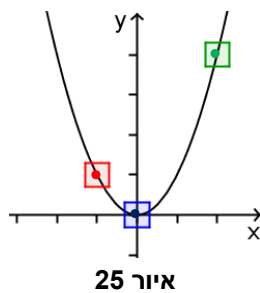
כדוגמה נחשוב על פונקציה קדומה של הפונקציה הנגזרת:

$$f'(x) = \begin{cases} x^4 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

פונקציה קדומה כזו מוגדרת ורציפה ב- $x = 0$ לפי המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי (עמוד 600).

הנגזרת $f'(x)$ רציפה ואי-שלילית בכל התחום $-\infty < x < \infty$. הנקודה $x = 0$ היא נקודת מינימום מוחלט שלה. אבל הנגזרת $f'(x)$ אינה עולה ואינה יורדת באף סביבה של $x = 0$. לכן נקודה זו אינה נקודת פיתול של $f(x)$.

העקמומיות ורדיוס העקמומיות של קו במישור

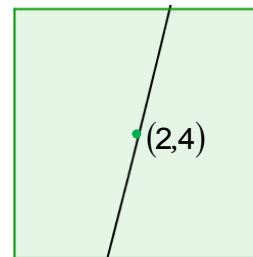
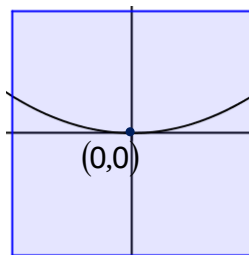
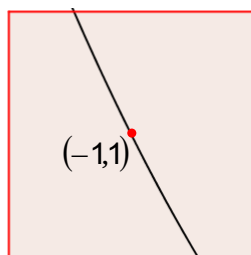


איור 25

על גרף הפונקציה $y = x^2$ שבאיור 25 מסומנות 3 הנקודות: $(-1, 1)$, $(0, 0)$ ו- $(2, 4)$.

איור 26 מציג הגדלה של גרף הפונקציה, באותו קנה מידה, בשלוש הנקודות המסומנות. בנקודה $(2, 4)$ גרף הפונקציה המוגדל נראה ממש כקו ישר. בנקודה $(0, 0)$ לגרף הפונקציה מראה של פרבולה, אם כי הגרף נראה קרוב לציר ה- x יותר מאשר הגרף המקורי. בנקודה $(-1, 1)$ גרף הפונקציה המוגדל נראה דומה לקו ישר, אך כשמתבוננים היטב ניתן לראות בעין שאינו כזה.

נשים לב לתכונות הפונקציה: בשלוש הנקודות הפונקציה קעורה כלפי מעלה. הפונקציה **גזירה** בכל נקודה, ולכן, בכל אחת מהנקודות, הגרף יראה כקו ישר אם נגדיל אותו בקנה מידה מספיק גדול (ר' פרק "הנגזרת").

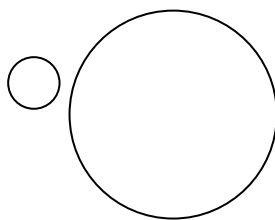


איור 26: הגדלה פי 10 של נקודות על הגרף המופיע באיור 25

מהי אם כן הסיבה למראה השונה של גרף הפונקציה בכל אחת מן ההגדלות?

את התשובה הראשונית לשאלה לעיל ניתן לקבל כאשר מתבוננים בעין פשוטה בגרף מקורי. בנקודות קרובות לראשית הצירים הגרף נראה הרבה יותר עקום מאשר בנקודות הרחקות ממנה. כאשר הנקודה על הגרף שואפת ל- ∞ , הגרף הולך ומתיישר. מצב זה ניתן לתאר במדויק באמצעות המושגים של **עקמומיות ורדיוס העקמומיות של עקום במישור**. סעיף זה מוקדש להגדרות מושגים אלה, המבוססים על הנגזרת השנייה, ולהדגמתם.

כדי להגיע למושג של עקמומיות, נתבונן בשני המעגלים שבאיור 27.



איור 27

ככל שרדיוס המעגל גדול יותר כך הוא נראה פחות עקום. כאשר רדיוס של מעגל הולך וגדל, כל קשת שלו הולכת ומתיישרת. תופעה דומה קיימת במרחב. כאשר רדיוס של כדור הולך וגדל, כל תחום על פני הכדור הולך ונעשה יותר שטוח. לכן, בחיינו על פני כדור הארץ, הודות לגודלו העצום של הרדיוס שלו, סביבתנו, מחוץ להרים ולעמקים, נראית לנו שטוחה לחלוטין,

המאפיין של קו במישור, אשר מאפשר להעריך באיזו מידה קו זה עקום, נקרא **עקמומיות של קו**.

בשונה מישור, אשר כל משיקיו מתלכדים אותו, משיקים לקו עקום בשתי נקודות שונות, בדרך כלל, אינם מתלכדים אלא יוצרים זווית מסוימת. זווית זו נמצאת ביסוד של ההגדרות הקשורות בעקמומיות.

מבחינים בין עקמומיות ממוצעת ועקמומיות בנקודה.

עקמומיות ממוצעת ועקמומיות בנקודה

הגדרות

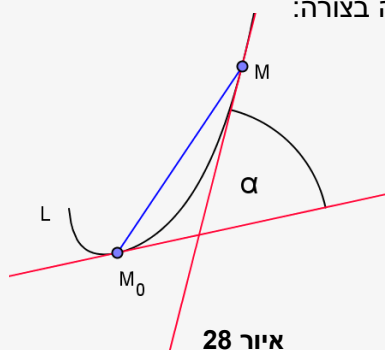
א. יהי L עקום במישור, רציף וחלק, כלומר, בכל נקודה על העקום יש משיק בעל שיפוע והוא משתנה באופן רציף לאורך העקום. תהי M_0 נקודה קבועה על העקום, ותהי M נקודה על אותו עקום הקרובה ל- M_0 . נסמן ב- α זווית חדה ברדיאנים בין המשיקים לעקום L בנקודות M_0 ו- M . נסמן ב- $|M_0M|$ את אורך הקשת

M_0M של העקום L . היחס $\frac{\alpha}{|M_0M|}$ נקרא **העקמומיות הממוצעת** של הקשת M_0M .

ב. הגבול של עקמומיות ממוצעת של קשת M_0M , כאשר הנקודה M שואפת לנקודה M_0 , נקרא **העקמומיות של העקום L בנקודה M_0** . אם נסמנה ב- K , נוכל לרשום את הגדרתה בצורה:

$$K = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\alpha}{|M_0M|}$$

איור 28 מציג פריטים מההגדרות לעיל.



איור 28

דוגמה 1

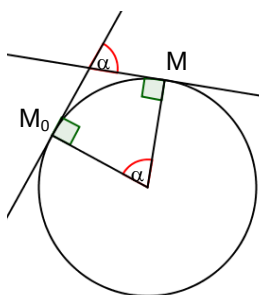
העקמומיות של קו ישר בכל נקודה עליו היא 0.

טענה זו נובעת מיידית מההגדרות לעיל, ומהעובדה שכל שני משיקים לקו ישר מתלכדים אותו, ולכן הזווית ביניהם היא 0.

דוגמה 2

העקמומיות של המעגל בעל רדיוס R בכל נקודה עליו שווה $\frac{1}{R}$.

טענה זו נובעת מהעובדה כי אם הזווית ברדיאנים בין שני רדיוסים במעגל היא α , אז אורך הקשת בין קצותיהם הוא $R\alpha$. לכן העקמומיות הממוצעת של קשתות עם α חדה היא $\frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{1}{R}$, ומכאן העקמומיות של המעגל בכל נקודה עליו היא $\frac{1}{R}$. מסקנה זו תואמת תפיסה אינטואיטיבית של יחס הפוך בין עקמומיות המעגל והרדיוס שלו שהוצגה קודם.



איור 29

לפי הדוגמאות לעיל, לישר ולמעגל יש עקמומיות קבועה. במקרה הכללי, בנקודות שונות על עקום במישור יש עקמומיות שונה, כלומר, העקמומיות של עקום היא פונקציה של נקודה

הנעה על פניו. אם העקום הוא גרף של הפונקציה $y = f(x)$, אז בכל נקודה x בתחום של הפונקציה אשר בסביבתה הפונקציה גזירה פעמיים, עקמומיות K של הגרף בנקודה (x, y) שעליו, מחושבת לפי הנוסחה²:

$$K = \frac{|f^{(2)}(x)|}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (*)$$

דוגמה

נמצא את עקמומיות הפרבולה $y = x^2$ בנקודות: $(0,0), (-1,1), (2,4)$.

הנוסחה (*) במקרה $f(x) = x^2$ היא:

$$K = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (**)$$

לפי נוסחה זו, מוצאים את עקמומיות הגרף $y = x^2$:

א. בנקודה $(0,0)$: $K = \frac{2}{(1+0)^{\frac{3}{2}}} = 2$,

ב. בנקודה $(-1,1)$: $K = \frac{2}{(1+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} \approx 0.179$,

ג. בנקודה $(2,4)$: $K = \frac{2}{(1+16)^{\frac{3}{2}}} \approx 0.029$.

תוצאות אלה מאשרות את ההשערה שהתקבלה בתחילת הסעיף באופן ניסיוני: העקמומיות של הפרבולה $y = x^2$ יותר גדולה בנקודה $(0,0)$ מאשר בנקודות $(-1,1), (2,4)$.

לפי נוסחה (**), העקמומיות K של הפרבולה $y = x^2$ היא פונקציה זוגית של x היורדת בתחום $0 < x < \infty$

ומתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty} K = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$. כלומר, ככל שמתרחקים מקדקוד הפרבולה כך הפרבולה הולכת

ומתיישרת.

המושג של עקמומיות בנקודה מלווה במושגים רדיוס עקמומיות, ומעגל עקמומיות.

² פיתוח נוסחה זו ניתן למצוא, למשל, אצל תומס ופיני (Thomas & Finney, 1986).

רדיוס עקמומיות ומעגל עקמומיות של עקום במישור

הגדרות

יהי L עקום במישור, רציף ובעל משיק המשתנה ברציפות לאורך העקום. תהי M נקודה כלשהי על העקום בה העקמומיות K שונה מ-0.

א. המספר $R = \frac{1}{K}$ נקרא **רדיוס העקמומיות** של העקום L בנקודה M .

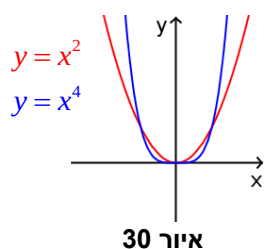
ב. המעגל במישור נקרא **מעגל העקמומיות** של העקום L בנקודה M אם:

(1) למעגל ולעקום L יש משיק משותף בנקודה M , ובסביבת נקודה זו הם נמצאים מאותו צד של משיק זה.

(2) הרדיוס R של המעגל הוא רדיוס העקמומיות של L בנקודה M , כלומר, $R = \frac{1}{K}$, כאשר K היא עקמומיות של העקום בנקודה M .

הערות

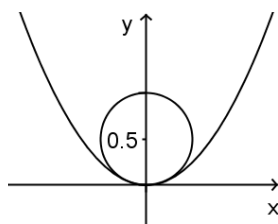
1. נקודה על העקום, בה עקמומיות העקום שווה ל-0, נקראת נקודת התיישרות. על גרף של פונקציה כל נקודה עברה $f''(x) = 0$, היא נקודת התיישרות. בפרט, נקודת פיתול היא נקודת התיישרות. בנקודת התיישרות של עקום, לא קיימים רדיוס עקמומיות ומעגל עקמומיות.



איור 30

2. מעניין לציין שבעוד שבפונקציה $y = x^2$ הנקודה $(0,0)$ היא בעלת העקמומיות הגדולה ביותר, בפונקציה $y = x^4$ הנקודה $(0,0)$ היא נקודת התיישרות של הפונקציה. בנקודה זו לא קיים מעגל עקמומיות (איור 30).

3. בנקודה M על עקום L עם עקמומיות $K \neq 0$, קיימים אינסוף מעגלים המקיימים את תנאי (1) בהגדרת מעגל העקמומיות לעיל. אבל ביניהם יש רק מעגל אחד ויחיד שיש לו, בנוסף למשיק משותף עם העקום, ומיקום באותו צד של המשיק, גם אותה עקמומיות K כמו לעקום בנקודה M . זו התכונה המאפיינת את מעגל העקמומיות.



איור 31: הפונקציה $y = x^2$ ומעגל העקמומיות שלה בנקודה $(0,0)$

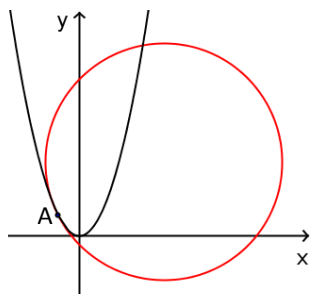
להלן דוגמה למציאת רדיוס העקמומיות ומעגל העקמומיות.

כפי שחושב קודם, העקמומיות של הפרבולה $y = x^2$ בנקודה $(0,0)$ היא

$$K = 2. \text{ מכאן, רדיוס העקמומיות הוא } R = \frac{1}{K} = \frac{1}{2} = 0.5. \text{ המעגל משיק}$$

לציר ה- x מלמעלה, לכן מרכזו נמצא על ציר y בנקודה $(0,0.5)$. איור 31

מציג את הפרבולה $y = x^2$ עם מעגל העקמומיות בנקודה $(0,0)$.



איור 32: הפונקציה $y = x^2$ ומעגל העקמומיות שלה בנקודה $A(-1, 1)$

כעת נמצא מעגל עקמומיות לאותו גרף בנקודה $A(-1, 1)$. כפי שחושב קודם, העקמומיות של הגרף בנקודה זו היא $K = \frac{2}{5\sqrt{5}}$. לכן רדיוס העקמומיות הוא $R = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5.59$. המרכז C של המעגל נמצא מעל למשיק לפרבולה בנקודה $A(-1, 1)$, על הישר המאונך למשיק זה, במרחק $R = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5.59$ מנקודה זו. המעגל לפי נתונים אלה מוצג באיור 32.

הנגזרת השנייה ויישומיה – סל פעילויות

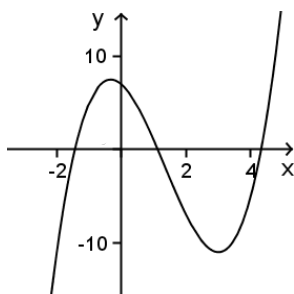
פעילות 1: מציאת סוג הקעירות בחקירת פונקציות פולינום

מציאת תחומי העלייה והירידה ותחומי הקעירות כלפי מעלה/מטה של $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 7$.

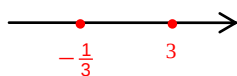
פתרון

נחקור תחילה את הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 7$

בעזרת הנגזרת $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$.



איור 33



איור 34

נקודות האפס של הנגזרת $x_2 = -\frac{1}{3}$ ו- $x_1 = 3$, מחלקות את ציר ה- x לשלושה תחומים חלקיים (איור 34).

חקירת נקודות הקיצון ותחומי העלייה והירידה מוצגת בטבלה 9.

x	$x < -\frac{1}{3}$	$x = -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
f'	+	0	-	0	+
f					

טבלה 9

בשלב זה נוכל להסיק שהפונקציה עולה בתחומים $x < -\frac{1}{3}$ ו- $x > 3$, ויורדת בתחום $-\frac{1}{3} < x < 3$.

שימוש בנגזרת השנייה יכול לחסוך את השימוש בטבלת הערכים: $f''(x) = 6x - 8$

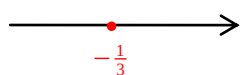
$$f''(-\frac{1}{3}) = -10 < 0 \quad . \text{מכאן שלפונקציה מקסימום כאשר } x = -\frac{1}{3}$$

$$f''(3) = 10 > 0 \quad . \text{מכאן שלפונקציה מינימום כאשר } x_1 = 3$$

כיוון שהפונקציה רציפה, מציאת נקודות הקיצון מאפשרת להסיק את תחומי העלייה והירידה.

נחקור כעת את הפונקציה הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$ בעזרת הנגזרת השנייה $f''(x) = 6x - 8$.

$$\text{נקודת האפס של הנגזרת השנייה היא } x = 1\frac{1}{3}$$



איור 35

בחקירה של הפונקציה הנגזרת אנחנו משתמשים בדיוק באותם כלים שהשתמשנו בחקירה של הפונקציה. נקודת האפס של הנגזרת השנייה מחלקת את ציר ה- x לשני תחומים חלקיים (איור 35).

החקירה ותוצאותיה מוצגות בטבלה 10:

x	$x < 1\frac{1}{3}$	$x = 1\frac{1}{3}$	$x > 1\frac{1}{3}$
f''	-	0	+
f'			

טבלה 10

הנגזרת השנייה שלילית בתחום $x < 1\frac{1}{3}$, ומכאן שבתחום זה הפונקציה קעורה כלפי מטה.

הנגזרת השנייה חיובית בתחום $x > 1\frac{1}{3}$, ומכאן שבתחום זה הפונקציה קעורה כלפי מעלה.

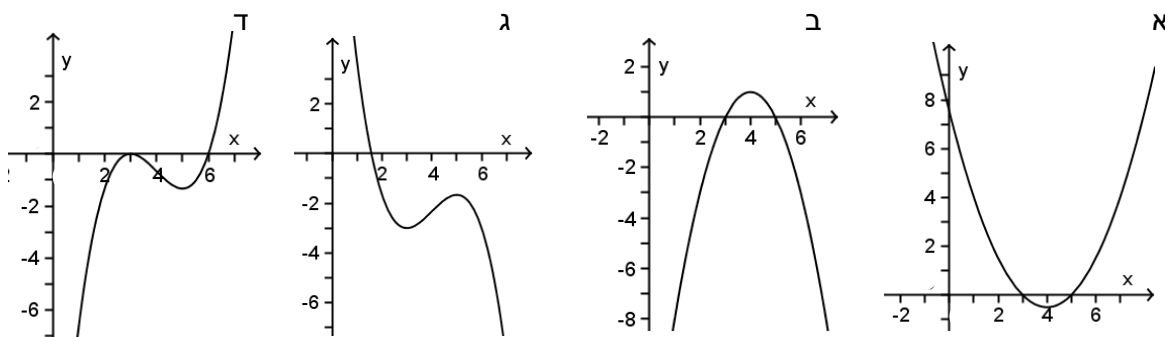
פונקציות, נגזרותיהן ומה שביניהן

לתרגילים העוסקים בקשרים בין פונקציה לנגזרת תוך כדי מעבר בין ייצוגים שונים של הפונקציות, חשיבות רבה, כיוון שהם מחייבים לתרגם, הלך וחזור, תמונה גרפית לתכונות של פונקציה.

פעילות 2: מתיאור מילולי של פונקציה לגרפים של הנגזרות

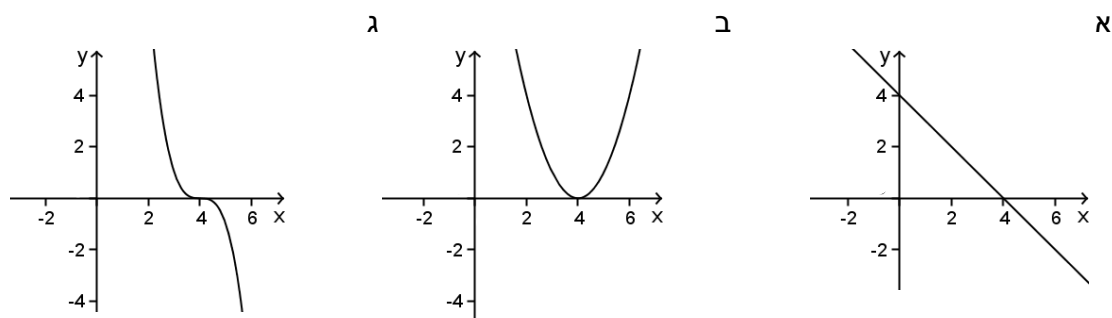
הפונקציה $f(x)$ רציפה וגזירה פעמיים לכל x ממשי. נתון כי לפונקציה יש שתי נקודות קיצון בלבד: מינימום עבור $x=3$, ומקסימום עבור $x=5$.

1. איזה מן הגרפים הבאים יכול לתאר את גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$. פרטו מגוון שיקולים בעזרתם ניתן להגיע למסקנה.



איור 36

2. קבעו איזה מבין הגרפים הבאים אינו יכול לתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. פרטו מגוון שיקולים אפשריים.



איור 37

3. ציינו איזו טענה בהכרח נכונה:

- | | | |
|----------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| א. $f'(4) = 0$ | ב. לפונקציה נקודת פיתול עבור $x = 4$ | ג. $f(4) > 0$ |
| ד. $f'(4) = 0$ | ה. $f(3) < f(4) < f(5)$ | ו. לפונקציה יש נקודת פיתול יחידה. |

תשובות

1. כיוון שלפונקציה $f(x)$ שתי נקודות קיצון בלבד, מינימום עבור $x=3$ ומקסימום עבור $x=5$, וכיוון שהיא רציפה וגזירה ברציפות בכל התחום, ניתן להסיק כי $f'(3)=0$ וגם $f'(5)=0$, עובדה זו פוסלת את אפשרויות ג ו- ד (גרף ג הוא גרף אפשרי של הפונקציה). מהנתונים ידוע שהפונקציה עולה בתחום $3 < x < 5$, ויורדת בתחומים $x < 3$ ו- $x > 5$, ואפשר להסיק שהנגזרת חיובית בתחום $3 < x < 5$ ושלילית בתחומים $x < 3$ ו- $x > 5$. כך נפסלת גם אפשרות א. אפשרות ב מתאימה לתיאור הפונקציה הנגזרת.

2. בתחום $3 < x < 5$ הנגזרת חיובית. כמו כן, ידוע כי $f'(3)=0$ וגם $f'(5)=0$. לכן חייבת להיות לנגזרת נקודת מקסימום בתחום $3 < x < 5$, כלומר, הנגזרת הראשונה עולה ואחר כך יורדת בתחום זה. הנגזרת השנייה צריכה להחליף סימן מחיובי לשלילי עבור נקודה כלשהי בתחום $3 < x < 5$. תיאור זה מתאים לגרפים א ו- ג ולא מתאים לגרף ב.

3. א. נקודת הפיתול לא חייבת להיות בנקודה בה $x=4$, ולכן לא חייב להתקיים $f'(4)=0$.

ב. לא בהכרח, מהשיקול הנ"ל.

ג. לא בהכרח, מהשיקול הנ"ל.

ד. לא בהכרח, מהשיקול הנ"ל.

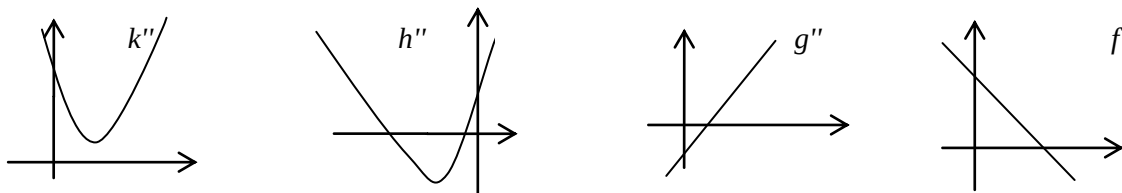
ה. הפונקציה רציפה, יש לה מינימום ב- $x=3$ ומקסימום ב- $x=5$, ולכן $f(3) < f(4) < f(5)$.

ו. לפונקציה יכולות להיות נקודות פיתול נוספות.

פעילות 3: מתיאור גרפי של הנגזרת השנייה אל תכונות הפונקציה

הפונקציות f, g, h ו- k רציפות וגזירות פעמיים לכל x ממשי. נגזרותיהן השניות מוצגות באיור 38.

1. מצאו את מספר נקודות הפיתול של כל אחת מן הפונקציות.



איור 38

2. לכל היגד התאימו את הפונקציה שההיגד מתאים לה.

שימו לב: ההיגדים מתייחסים לנגזרות של הפונקציות.

א. לפונקציה הנגזרת יש בדיוק שתי נקודות קיצון.

ב. לפונקציה הנגזרת יש בדיוק נקודת קיצון אחת והיא נקודת מקסימום.

ג. לפונקציה הנגזרת אין נקודת קיצון.

ד. לפונקציה הנגזרת יש בדיוק נקודת קיצון אחת והיא נקודת מינימום.

תשובות

1. בפונקציות רציפות וגזירות נקודות פיתול הן נקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת ומחליפה סימן. f'' ו- g'' מתאפסות ומחליפות סימן פעם אחת, ומכאן שלכל אחת מהפונקציות f ו- g יש נקודת פיתול אחת. h'' מתאפסת ומחליפה סימן פעמיים, ומכאן שיש ל- h שתי נקודות פיתול. k'' מתאפסת אך לא מחליפה סימן, מכאן ל- k אין אף נקודת פיתול.

2. (א) h ; (ב) f ; (ג) k ; (ד) g .

פעילות 4: משפחה בחקירה

על הפעילות

במוקד הפעילות שלוש פונקציות מהמשפחה $y = x^3 - ax^2 + 3x$, המדגימות שלושה טיפוסים של פונקציה ממעלה שלישית: (1) פונקציה עם שתי נקודות קיצון (2) פונקציה שאין לה נקודות קיצון, ויש לה נקודת פיתול שבה הנגזרת הראשונה מתאפסת (3) פונקציה שבה הנגזרת הראשונה אינה מתאפסת כלל.

הפעילות מזמנת חקירת משוואה ריבועית עם פרמטרים, ויישום תוצאות החקירה להבחנה בין טיפוסים שונים של פונקציות בנות אותה משפחה.

שילוב מחשב בפעילות זו יכול להמחיש את התרומה של כל אחת מהנגזרות בחקירת המשפחה.

הפעילות

נתונות 3 פונקציות: $k(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$; $l(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; $m(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$.

א. מצאו את תחומי העלייה הירידה, נקודות קיצון ונקודות פיתול, של כל אחת מן הפונקציות, וסרטטו גרף סכמתי.

ב. תנו שם למשפחת הפונקציות.

ג. חקרו את משפחת הפונקציות ומצאו:

- פונקציה נוספת עם שתי נקודות קיצון;
- פונקציה נוספת שבה לנגזרת נקודת אפס יחידה שהיא נקודת פיתול;
- פונקציה נוספת שבה הנגזרת לא מתאפסת באף נקודה.

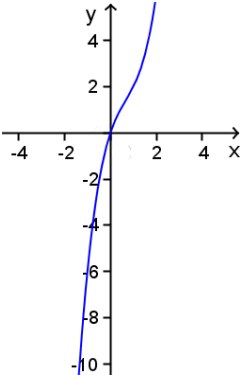
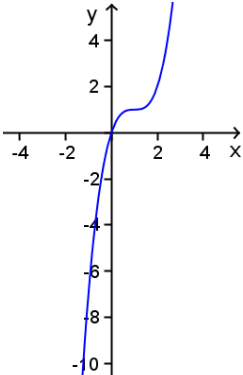
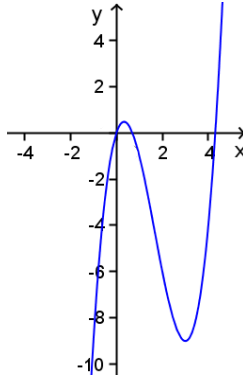
ד. מצאו מה צריך להיות ערכו של a על מנת שפונקציה מהמשפחה $y = x^3 - ax^2 + 3x$ תהיה: (1) בעלת שתי נקודות קיצון (2) ללא נקודות קיצון.

ה. תארו את נקודות הפיתול של הפונקציות במשפחה. הבחינו בין מקרים שונים.

ו. האם יש במשפחה פונקציות עם נקודת קיצון יחידה? הסבירו.

אבני דרך בפתרון הפעילות והערות דידקטיות

א. תכונות הפונקציות ותיאורן הגרפי

$k(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$	$l(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$	$m(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$
		
לנגזרת אין נקודות אפס. הפונקציה עולה בכל התחום. נקודת פיתול: $\left(\frac{2}{3}, 1\frac{13}{27}\right)$.	אין נקודות קיצון. הפונקציה עולה בכל התחום. נקודת פיתול: $(1, 1)$. בנקודת הפיתול הנגזרת שווה לאפס.	נקודת מקסימום: $\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{27}\right)$. נקודת מינימום: $(3, -9)$. תחומי עלייה: $x < \frac{1}{3}$ ו- $x > 3$. תחום ירידה: $\frac{1}{3} < x < 3$. נקודת פיתול: $1\frac{2}{3}, -4\frac{7}{27}$.

טבלה 11

את הגרפים של שתי הפונקציות הראשונות ניתן לסרטט באמצעות טבלת ערכים. בגרף השלישי, כיוון שהנגזרת הראשונה של הפונקציה $k(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ לא מתאפסת, היא לא מסייעת בבחירת נקודות להצבה בטבלה לקראת סרטוט גרף הפונקציה. נקודת הפיתול עוזרת לסרטט את הגרף. גרפים של פונקציות ממעלה שלישית הם סימטריים ביחס לנקודת הפיתול, ולכן אם מציבים רק שתי נקודות סימטריות ביחס לנקודת הפיתול, מתקבל גרף שיוצר אשליה של ליניאריות.

ב. הפונקציות שנחקרו הן נציגות של משפחת הפונקציות: $y = x^3 - ax^2 + 3x$.

ג. את החקירה אפשר לבצע בדרכים אחדות.

ניתן לחקור את משפחת הפונקציות תחילה באופן ויזואלי במחשב, ואחר כך לבסס את הממצאים באמצעות הנגזרות, או להתחיל מחקירה באמצעות נגזרות ובהמשך למצוא דוגמאות במחשב. ניתן להגדיר במחשב פונקציה עם פרמטר, ולבדוק, ויזואלית, איך משתנות הפונקציות כשמשנים את הפרמטר.

בדרך זו ניתן להבחין שאפשר ליצור פונקציות רבות (למעשה אינסוף פונקציות) עם נקודות קיצון, ואינסוף פונקציות ללא נקודות קיצון.

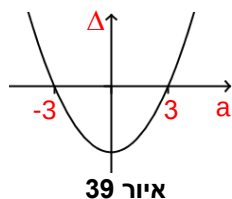
ניתן לחקור במחשב גם את התנהגות הנגזרת. בדרך זו נוח לראות מיהם ערכי a עבורם הנגזרת מתאפסת פעם אחת, ועבור אילו ערכי a הנגזרת אינה מתאפסת כלל.

כשחוקרים במחשב את הנגזרת השלישית, ניתן לראות שהנגזרת השלישית היא תמיד פונקציה עולה עם נקודת אפס, ולכן לכל הפונקציות במשפחה יש נקודת פיתול שבה הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מעלה.

נגזור את הפונקציה הפרמטרית $y = x^3 - ax^2 + 3x$:

$$y' = 3x^2 - 2ax + 3$$

$$y'' = 6x - 2a$$



איור 39

כדי לחקור את מספר נקודות האפס של הנגזרת נחקור את הדיסקרימיננטה של המשוואה $3x^2 - 2ax + 3 = 0$.

$$\Delta = 4a^2 - 36 = 0$$



איור 40

$\Delta > 0$ כאשר $a > 3$ או $a < -3$. במקרים אלה למשוואה $3x^2 - 2ax + 3 = 0$ קיימים שני פתרונות. כיוון שהמקדם המוביל של הנגזרת הוא 3, גרף הנגזרת הוא פרבולה בעלת מינימום. מכאן שהפונקציה עוברת מעלייה לירידה ושוב לעלייה. בנקודת האפס השמאלית של הנגזרת יש לפונקציה מקסימום ובנקודת האפס הימנית יש לה מינימום.

דוגמא לפונקציה נוספת עם שתי נקודות קיצון היא: $y = x^3 - 4x^2 + 3x$, המתקבלת עבור $a = 4$.

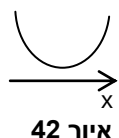


איור 41

$\Delta = 0$ כאשר $a = 3$ או $a = -3$. במקרים אלה למשוואה $3x^2 - 2ax + 3 = 0$ פתרון יחיד. הנגזרת מתאפסת בנקודה אחת וחיובית בכל נקודה אחרת. כיוון שהנגזרת לא מחליפה סימן בנקודת האפס, נקודת האפס של הנגזרת איננה נקודת קיצון כי אם נקודת פיתול, והפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

המקרה $a = 3$ הוא הפונקציה הנתונה.

פונקציה נוספת (יחידה) עם נקודת פיתול שבה הנגזרת מתאפסת היא כאשר $a = -3$. זו הפונקציה $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.



איור 42

$\Delta < 0$ כאשר $-3 < a < 3$. במקרה זה למשוואה $3x^2 - 2ax + 3 = 0$ אין פתרון. הנגזרת לא מתאפסת באף נקודה. הנגזרת חיובית בכל תחום ההגדרה ולכן הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה.

דוגמה לפונקציה נוספת שבה הנגזרת לא מתאפסת היא $y = x^3 - x^2 + 3x$ המתקבלת עבור $a = 1$.

חקירת הנגזרת השנייה מגלה שלכל הפונקציות נקודת פיתול אחת ב- $x = \frac{-a}{3}$.

חקירות פרמטריות לפעמים קשות לתלמידים בגלל מורכבותן, במקרה זה המורכבות כפולה. כדי לחקור את הפונקציה אנחנו חוקרים את הנגזרת. כדי למצוא את מספר נקודות האפס של הנגזרת, אנחנו חוקרים דיסקרימיננטה של משוואה ריבועית. הדיסקרימיננטה היא בעצמה פונקציה ריבועית של הפרמטר. כדי להצליח בחקירה יש לזכור מי הפונקציה בה עוסקים בכל אחד מהשלבים.

פעילות 5: חקירת הפונקציה באמצעות הנגזרת השנייה – גם כשאין לנו כלים למציאת נקודות אפס של הנגזרת הראשונה

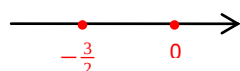
חקירת הפונקציה: $f(x) = x^4 + 3x^3 + x$.

בדוגמה זו אין לנו כלים למצוא את נקודת האפס של הנגזרת הראשונה. נחקור את תחומי הקעירות של הפונקציה מבלי לבצע חקירה שלמה שלה.

אבני דרך בחקירה

זוהי פונקציה פולינום. לכן היא רציפה וגזירה על כל הישר הממשי. הפונקציה הנגזרת: $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 1$ הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = 12x^2 + 18x = 12x \left(x + \frac{3}{2} \right)$$



איור 43

נקודות האפס של הנגזרת השנייה: $x = 0$ ו- $x = -\frac{3}{2}$ מחלקות את ציר ה- x לשני

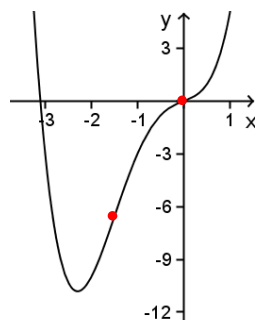
תחומים חלקיים (איור 43).

הנגזרת השנייה חיובית עבור $x > 0$ ועבור $x < -\frac{3}{2}$, ושלילית עבור $-\frac{3}{2} < x < 0$.

לכן הפונקציה $f(x) = x^4 + 3x^3 + x$ קעורה כלפי מעלה בכל אחד מהתחומים

$$-\infty < x < -\frac{3}{2}, \quad 0 < x < \infty, \quad -\frac{3}{2} < x < 0.$$

גרף הפונקציה מוצג באיור 44.

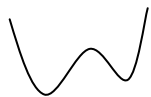


איור 44

החקירה שעשינו לא הובילה אותנו לגלות את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. כדי

לגלות את הצורה הכללית של הגרף נצטרך להפעיל שיקולים נוספים.

הצבת ערכי נקודות האפס של הנגזרת השנייה בנגזרת הראשונה תגלה, שבשתי הנקודות האלה הנגזרת הראשונה חיובית, ומכאן שמדובר בנקודות פיתול ששתייהן בתחום עלייה של הפונקציה.



לפונקציה ממעלה רביעית עם מקדם מוביל חיובי, יש לפחות נקודת מינימום אחת. [ר' "ההתנהגות הגלובלית של פונקציות פולינום" עמוד 205]



האם ייתכן שיש לפונקציה $f(x) = x^4 + 3x^3 + x$ יותר מנקודת קיצון אחת?

לפונקציית פולינום ממעלה רביעית יש מספר אי-זוגי של נקודות קיצון (מדוע?). לכן אם יש לפונקציה $f(x) = x^4 + 3x^3 + x$ יותר מנקודת קיצון אחת, יש לה שתי נקודות מינימום ונקודת מקסימום אחת, כמו בגרף הסכמתי באיור 45. האם מצב זה אפשרי?

התשובה שלילית.

נניח שהמצב אפשרי, ונסמן על ציר המספרים את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה.

פונקציית פולינום היא רציפה וגזירה פעמיים בכל התחום. לכן לנקודת מקסימום יש סביבה שבה הפונקציה קעורה כלפי מטה, ולנקודת מינימום יש סביבה שבה הפונקציה קעורה כלפי מעלה. לכן בתחום $x_2 < x < x_1$ יש לפחות נקודה אחת שבה סוג הקעירות משתנה. נקודה זו היא נקודת פיתול בתחום ירידה של הפונקציה, ולכן איננה אחת משתי הנקודות שמצאנו. כיוון מצאנו שהנגזרת השנייה מתאפסת בשתי נקודות בלבד, מצב זה אינו אפשרי.

לא מצאנו את שיעורי נקודת המינימום, אך הצלחנו לאפיין את גרף הפונקציה. לפונקציה יש נקודת מינימום אחת, ויש לה שתי נקודות פיתול בתחום העלייה.

גרף הפונקציה $f(x) = x^4 + 3x^3 + x$ דומה במאפיינים רבים לפרבולה בעלת מינימום. יחד עם זאת, פרבולה בעלת נקודת מינימום קעורה כלפי מעלה בכל התחום, ואילו הגרף באיור 44 משנה את כיוון הקעירות פעמיים - יש לו שתי נקודות פיתול. הבדל זה התברר הודות לשימוש בנגזרת השנייה.

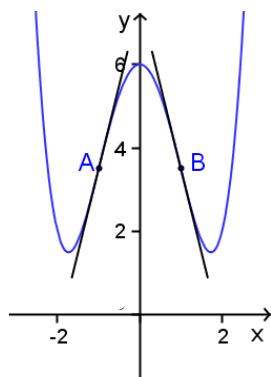
פעילות 6: המשיק – לא מה שהיכרנו פעם

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 6$$

1. מצאו את תחומי העלייה והירידה ואת נקודות הקיצון וסרטטו גרף סכמתי של הפונקציה

2. מצאו את נקודות הפיתול של הפונקציה.

3. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות הפיתול.



איור 46

אבני דרך בחקירה

הנגזרת הראשונה: $f'(x) = 2x^3 - 6x$ מתאפסת עבור: $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, ו- $x = -\sqrt{3}$. לפונקציה זו נקודת מקסימום: $x = 0$ ושתי נקודות מינימום: $x = \sqrt{3}$ ו- $x = -\sqrt{3}$. קל לבדוק זאת באמצעות הנגזרת השנייה.

הנגזרת השנייה: $f''(x) = 6x^2 - 6$ מתאפסת עבור $x = 1$ ו- $x = -1$ (הנקודות המתאימות על הגרף-A, B).

הנגזרת השנייה חיובית עבור $x < -1$ ועבור $x > 1$, ושיליתית בתחום $-1 < x < 1$. בהתאם לכך, הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה בכל אחד מהתחומים $x < -1$ ו- $x > 1$, וקעורה כלפי מטה בתחום $-1 < x < 1$. לכן כל אחת מהנקודות $x = 1$ ו- $x = -1$ היא נקודת פיתול של $f(x)$.

כדאי לנצל תרגילים מסוג זה ולשים לב לשלוש תכונות של המשיקים:

א. בשתי נקודות הפיתול שיפוע המשיק שונה מאפס ולכן בשני המקרים המשיק הוא משופע. חשוב לשים לב לנקודה זו לאור העובדה שבפרק הפולינומים התלמידים הכירו רק נקודות פיתול שבהם הנגזרת שווה לאפס. והמשיק הוא קו אופקי.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית. הגרף שלה סימטרי ביחס לציר ה- y . בשתי נקודות הפיתול $x = 1$ ו- $x = -1$ לגרף של פונקציה יש משיק. המשיק בנקודה A $y = 4x + 7.5$ והמשיק בנקודה B $y = -4x + 7.5$. סימטריים זה לזה ביחס לציר ה- y .

ג. ניתן לראות שהמשיק עובר בנקודת ההשקה מצד לצד של הפונקציה. חשוב לשים לב לנקודה זו כיוון שהמפגש הראשון של תלמידים עם משיק הוא בנושא המשיק למעגל. משיק למעגל נמצא תמיד מצדו של המעגל, ולכן אצל חלק מהתלמידים מתקבעת תפיסה על-פיה המשיק נמצא תמיד מצדו האחד של הגרף.

פעילות 7: נקודת אפס של הנגזרת השנייה אינה בהכרח נקודת פיתול

א. מצאו נקודות קיצון ונקודות פיתול של הפונקציה $f(x) = 2x^4 - x$.

ב. האם יש לפונקציה נקודות פיתול? הסבירו.

ג. סרטטו גרף סכמתי של הפונקציה.

פתרון

נגזור את הפונקציה פעמיים.

הנגזרת הראשונה $f'(x) = 8x^3 - 1$ מתאפסת עבור $x = \frac{1}{2}$.

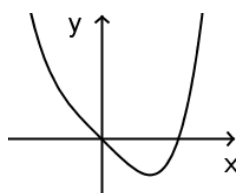
הנגזרת השנייה היא: $f''(x) = 24x^2$ ומתקיים: $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 6 > 0$. לכן לפונקציה $f(x) = 2x^4 - x$ יש נקודת מינימום כאשר $x = \frac{1}{2}$.

הנגזרת השנייה מתאפסת עבור $x = 0$, לכן נקודה זו חשודה כנקודת פיתול. נבדוק את סימן הנגזרת השנייה משמאל ומימין ל- $x = 0$.

x	$x < 0$	0	$x > 0$
f''	+	0	+
f	קעורה כלפי מעלה	אין נקודת פיתול	קעורה כלפי מעלה

טבלה 12

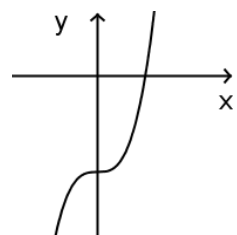
למרות ש- $f''(0) = 0$ הפונקציה אינה משנה את כיוון הקעירות שלה בסביבת $x = 0$, לכן זו איננה נקודת פיתול. איור 47 מציג את גרף הפונקציה, ואיור 48 מציג את גרף הנגזרת.



איור 47

יכולנו לראות בשלב מוקדם של החקירה שלפונקציה אין נקודת פיתול: הנגזרת הראשונה היא פונקציה שעולה בכל תחומה, ללא נקודות קיצון. הנגזרת השנייה היא אי-שלילית בכל התחום ואינה יכולה להחליף סימן.

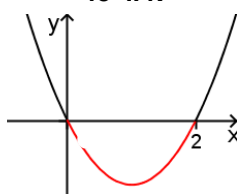
למרות זאת לפעמים, בעיקר במפגשים הראשונים של תלמידים עם מצב בו נקודה חשודה כפיתול אינה נקודת פיתול, כדאי לתת לתלמידים לבצע חקירה מלאה עם טבלת ערכים לנגזרת, כדי שיקדישו זמן לשאלה ויתחבטו תשומת לב לשאלה כיצד נראה גרף הפונקציה בנקודה החשודה כפיתול.



איור 48

פעילות 8: נקודת מינימום שהיא גם נקודת פיתול – הייתכן?

מצאו תחומי קעירות כלפי מעלה, תחומי קעירות כלפי מטה, ונקודות פיתול של הפונקציה $f(x) = |x^2 - 2x|$.



איור 49

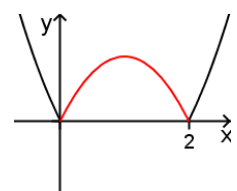
ניתן לרשום את הפונקציה באמצעות תחום מפוצל ולחקור אותה בכל אחד מקטעי התחום. נציג כאן פתרון שונה:

נתבונן בפונקציה $g(x) = x^2 - 2x$ שבתוך הערך המוחלט (איור 49). פונקציה זו היא

פרבולה בעלת מינימום, והיא קעורה כלפי מעלה בכל התחום.

הפונקציות f ו- g זהות בתחום החלקי בו f חיובית.

בתחומים החלקיים בהם f שלילית מתקיים $g(x) = -f(x)$, ולכן בתחומים חלקיים אלה g קעורה כלפי מטה (איור 50).



איור 50

מכאן: הפונקציה g קעורה כלפי מעלה כאשר $x < 0$ וכאשר $x > 2$, וקעורה כלפי מטה כאשר $0 < x < 2$. הנקודות $x = 0$ ו- $x = 2$ הן בעת ובעונה אחת נקודות מינימום ונקודות פיתול.

דוגמאות בהזמנה מיוחדת:



פונקציות פולינום עם נקודות פיתול ונקודות קיצון בהזמנה

נתבונן בגרפים של 3 פונקציות:

$$f(x) = (x + 0.5)^2(x - 1)^3, \quad g(x) = 2(x + 0.5)^2(x - 1)^2, \quad h(x) = 100x^4(x - 1)^5 \quad (\text{איור 51}).$$

שלוש הדוגמאות מדגימות תופעה: כאשר $x = x_0$ אז לפונקציה יש שורש מרובה בריבוי זוגי ונקודת קיצון ב- $x = x_0$. כאשר $x = x_0$ יש שורש מרובה בריבוי אי-זוגי גדול מ-1, אז לפונקציה יש נקודת פיתול ב- $x = x_0$.

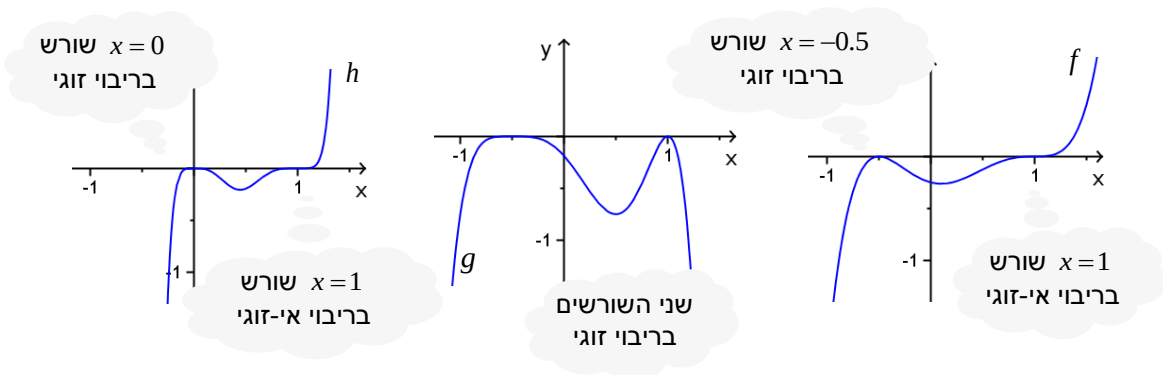
התופעה שנצפתה בדוגמאות מנוסחת במשפט הבא:

משפט על האופי של שורש מרובה של פולינום

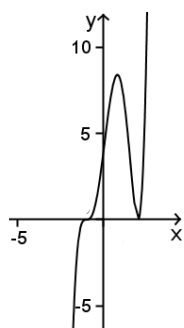
השורש המרובה $x = x_0$ של פונקציית פולינום $f(x)$ הוא נקודת קיצון של פונקציה זו, אם ריבוי השורש הוא מספר זוגי, ונקודת פיתול שלה, אם הריבוי הוא מספר אי-זוגי גדול מ-1.

הסבר התופעה המנוסחת במשפט מופיע בפרק הפונקציה המורכבת (עמוד 302), כיוון שבמקרה של ריבוי אי-זוגי ההסבר מתבסס על נגזרת של פונקציה מורכבת.

על סמך משפט זה ניתן ליצור דוגמאות לפונקציות בעלות נקודות מיוחדות "על-פי הזמנה".



תרגיל 1



איור 52

הביאו דוגמה של פונקציית פולינום $f(x)$ אשר עברה הנקודה $x = -1$ היא נקודת פיתול, והנקודה $x = 2$ היא נקודת קיצון.

פתרון

הפונקציה $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$ עונה לדרישות התרגיל, כיוון שהשורש $x = -1$ מופיע בריבוי אי-זוגי, והשורש $x = 2$ מופיע בריבוי זוגי. הגרף הממוחשב של פונקציה זו (איור 52) מראה את קיומן של התכונות המבוקשות.

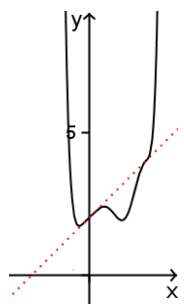
בניית דוגמאות עם נקודות פיתול בהן הנגזרת הראשונה שונה מאפס

יהי $x = x_0$ שורש מרובה בעל ריבוי אי-זוגי $m \geq 3$ של פונקציית פולינום $P(x)$ ממעלה $n \geq 3$. כלשהי. נוסף לפולינום זה פונקציה ליניארית לא קבועה $ax + b$, $(a \neq 0)$, נקבל פונקציית פולינום מאותה מעלה $f(x) = ax + b + P(x)$. הגרף $y = f(x)$ משיק לישר המשופע $y = ax + b$ בנקודה $x = x_0$ כי $f'(x_0) = a$. נקודה זו לא יכולה להיות נקודת קיצון של $f(x)$ כי $f'(x_0) \neq 0$. לפי המשפט על האופי של שורש מרובה של פולינום, אם $m \geq 3$ הוא מספר אי-זוגי, הנקודה $x = x_0$ היא נקודת פיתול של פונקציית הפולינום $P(x)$. בנקודה זו הנגזרת השנייה $P''(x)$ מחליפה סימן. היות ו- $P''(x) = f''(x)$, הנגזרת השנייה $f''(x)$ מחליפה סימן בנקודה $x = x_0$. לכן נקודה זו היא נקודת פיתול של $f(x)$.

התרגיל הבא מסתמך על ההסבר לעיל, ונועד למנוע את הדעה המוטעית כי בנקודת פיתול הנגזרת הראשונה תמיד מתאפסת, ובהתאם לכך המשיק לגרף של פונקציה בנקודת פיתול הוא קו ישר אופקי.

תרגיל 2

הביאו דוגמה של פונקציית פולינום $f(x)$ ממעלה 8, אשר יש לה שתי נקודות פיתול, ובכל אחת מהן $f'(x) \neq 0$.



איור 53

פתרון

הפונקציה $f(x) = 2 + x + (x-2)^3x^5$ עונה לדרישות התרגיל. כל אחת מהנקודות $x = 0, x = 2$ היא שורש מרובה בעל ריבוי אי-זוגי של הפולינום

$$P(x) = (x-2)^3x^5.$$

$$\text{ו-} f'(0) = f'(2) = 1 \neq 0.$$

הגרף הממוחשב (איור 53) של $f(x) = 2 + x + (x-2)^3x^5$, מראה כי בנקודות הפיתול המשיק אינו מקביל לציר ה- x (המשיק הוא הישר $y = x + 2$).