בעיות פתוחות ככלי לפיתוח חשיבה מתמטית בקרב פרחי הוראה

איליה סיניצקי

סיטואציות מתמטיות פתוחות הן כלי לפיתוח החשיבה של הלומד. במאמר מוצגים קריטריונים להערכת בעיות חקר פתוחות מהצד התוכני, הדידקטי והפסיכולוגי. קובץ בעיות, ההולמות את הדרישות של פעילויות החקר המתמטי, שימשו לניסוי עם קבוצת סטודנטים מתמחים בהוראת המתמטיקה. המידע שסיפק פענוח הדיווחים על תהליכי החשיבה של הנחקרים והמשוב שלהם תורם להבנת הגורמים המשפיעים על הערכה סובייקטיבית של משימות חקר ועל שיטות ליישום אסטרטגיות קוגניטיביות. רוב הנחקרים אופיינו בחוסר ידע וניסיון בשימוש מודע בכלים לחשיבה אינטואיטיבית בתחום. התברר, כי גורמים פסיכולוגיים משפיעים הן על הערכת הבעיה מבחינת הקושי המתמטי והן על תהליך החקר המתמטי עצמו – אפילו במצבים שמקורם בתחום התוכן.

מבוא

למידה משמעותית בבית הספר מבוססת על תהליכים של פיתוח החשיבה אצל התלמיד (Shulman, 1987). בעשור האחרון התמקדו מספר מחקרים בגורמים שונים המעורבים בהצלחת התהליך. במאמרים רבים הודגש תפקידן של מיומנויות חשיבה גבוהות ככלי ללמידה אפקטיבית (זוהר, 1996; Zohar, 1996; Baroody & Ginsburg, 1990). בהקשר זה יש דיון מעמיק באופיין של מיומנויות חשיבה: האם הן תלויות בתוכן או כלליות (Perkins & Solomon, 1989)? השאלה אינה תאורטית בלבד, מסקנות החוקרים משפיעות על בחירת הכלים לפיתוח מיומנויות ולמדידת ההתפתחות של הלומד: האם הם אמורים להיצמד לתוכן הנלמד או לא? בשאלה זו, הקשורה למושג האינטליגנציה, דנו בין השאר סילבסטר (Sylwester, 1997) וגרדנר (Gardner, 1993).

בגישה קונסטרוקטיבית עקבית (Cobb, 1994; Von Glasersfeld, 1991) הופכות מיומנויות חשיבה מכלי בלבד לערך מרכזי של תהליך הלמידה כולו. לולא היה מדובר במצב דינמי ומשתנה, אפשר היה להגדיר את השליטה והשימוש במיומנויות

חשיבה גבוהות כמטרה ללמידה בונה. אצל בורזי (Borasi, 1994) הודגש היבט זה באפיון למידה מתמטית בתור תהליך יצירתי אישי של בניית ידע.

הצורך לטפל במערכות מורכבות דחף לפיתוח כלים מדעיים מתקדמים, ובהם הדמיה מתמטית (Shennon, 1978) וניתוח לוגיסטי של מערכת (Swartz, 1997). באשר לתהליך הלמידה בבית הספר, במצבים מורכבים של חוסר ודאות יש משום אתגר אינטלקטואלי ללומד ולכן הם בבחינת כלי הנחוץ לפיתוח החשיבה שלו. בשיעור מתמטיקה מוצגות סיטואציות מורכבות כבעיות פתוחות מתמטיות מסוגים שונים. סילבר (Silver, 1993) דן בפירוש המושג ובתפקידן של בעיות פתוחות במתמטיקה. לפי הגדרתו, הבעיות הפתוחות הרלוונטיות למערכת בית ספרית הן: בעיות פתוחות מבחינת דרכי הפתרון; בעיות בעלות מודלים שונים ליישום או לשימוש; בעיות ש"מזמינות" בעיות אחרות. הרעיון של ניצול סיטואציה פרובלמטית כמקור לחשיבה מדעית משמעותית של תלמידים (כיחידים או בקבוצות) הודגש גם אצל גרינו (Greeno, 1992).

החינוך לתרבות החשיבה אצל לומדים מבוסס בין היתר על שינוי בגישת המורים. במעבר מלומד למלמד, כלומר מורה, עובר בוגר בית הספר תהליך הכשרה להוראה ורוכש ידע בתחום התוכן, במקצועות פדגוגיים כלליים (כולל שיטות מחקר פדגוגי) ובדידקטיקה, ואף מתנסה בעבודה מעשית בשטח. ואולם, לא מביאים אותו במהלך ההכשרה להתנסות בשיטות החקר המדעי בתחום התמחותו. בתוכניות הלימוד להכשרת מורים למתמטיקה קיימת בעיקר התייחסות לגורם התוכני של המדע המודרני, שבא לידי ביטוי הן בתוכניות לימוד והן בביצוען בשטח.

עוד בשנות ה-20 הועלתה הדרישה להוסיף לחומר הלימוד רעיונות ושיטות של המדע החדשני דרך מעורבותם של המורים העתידיים בנושאים אלה (Klein, 1924), אך אפשר לומר שעד היום לא ניתנה תשומת הלב הראויה להחדרת שינויים בשיטות החשיבה בהוראת המתמטיקה בבית הספר. בחינוך לחשיבה מדעית טופל במידה מסוימת הפן הקפדני של המדע: סיבתיות, עקביות, היגיון בהסקת מסקנות וכדומה (Ben-Peretz & Tamir, 1986; זוהר, מרגלית ושוורץ, 1998). אך יש לזכור, כי כלי חקר במדע מכילים גם ניחושים ופעולות אינטואיטיביות אחרות של המדען החוקר. כדי לחנך את הלומד לבניית ידע עצמי על המורה לספק לו כלים

לגשת למשימה כאל בעיה מדעית, שפתרונה אינו חד-משמעי, אינו ידוע מראש, ואולי אפילו לא קיים במלואו.

כדי לשנות את גישת המורים בהקשר זה נחוצים בין היתר מודעות למיומנויות חשיבה גבוהות, הנרכשת בקורסים שונים בתהליך הכשרת מורים (זוהר, 1999), והכרת מודלים להחדרת מיומנויות אלו בתהליך ההוראה בבתי ספר (ויינברג, 1998). השלב המעשי בפיתוח מיומנויות חשיבה בקרב פרחי הוראה בתהליך הכשרתם ובקרב מורים בפועל בהשתלמויותיהם הוא בעיקרו הדגמה פעילה של תהליכי חקר מתמטי. תוך כדי ביצוע פעילויות חקר רוכשים המשתתפים ניסיון התמודדות עם בעיה לא שגרתית ומיישמים את הידע התיאורטי בנושא מיומנויות חשיבה גבוהות בתחום מקצוע מסוים.

בחינוך המתמטי מיוחס המושג "חשיבה מתמטית" ליכולתו של התלמיד להתמודד עם בעיות מתמטיות – החל מבעיות סטנדרטיות פשוטות, דרך בעיות מורכבות, ועד בעיות לא שגרתיות. המורה מצפה מתלמידיו לשליטה ולשימוש מושכל בטכניקות, מודלים ואלגוריתמים. בתנאים אלה, מרכיב אחד לא טיפוסי בבעיה או במהלך פתרונה כבר הופך אותה לבעיה לא שגרתית מבחינת תוכנית הלימודים. בהבנת חשיבותם של תהליכי חשיבה לפיתוח אינטלקטואלי של הלומד יש להעביר את הדגש מרכישת עובדות מתמטיות ויישום לתהליך החקר עצמו (מובשוביץ-הדר, 1991). התקרבות לגישה זו מורגשת היטב בתוכנית החדשה במתמטיקה לבית הספר היסודי (תוכנית 2000, 2001). היכרות פעילה של המורים ומורים לעתיד עם תהליכי חשיבה מתמטית מאפשרת להדגים את שיטות העבודה הרצויות בכיתות הוראה.

מה הבעיה? קריטריונים למיון בעיות פתוחות ולגיבוש מאגר של משימות חקר

מהי בעיה פתוחה "טובה" לפיתוח חשיבה? בעיסוק בשאלה זו ניתן לזהות לפחות שתי גישות. דרך "אובייקטיבית", והיא ניתוח הבעיות הפתוחות והדוגמאות הקיימות (גם מהספרות וגם בעיות שפותחו בהתאם לצורכי הקורס "פיתוח חשיבה מתמטית") בקריטריונים להערכת בעיות קוגניטיביות, ודרך "סובייקטיבית", שעל

פיה מתמקדים בשאלה, כיצד מעריך הסטודנט את הבעיה בדיעבד, אחרי תהליך ההתמודדות איתה.

מושג עתיק מאוד בתחום המתמטיקה הוא "חידה מתמטית", וקיים תיעוד ארוך שנים של אוספים של בעיות מתמטיות מנוסחות כסיטואציות פרובלמטיות מחיי היומיום. אחת הבעיות הידועות ביותר היא באגדה על התמורה שתבע החכם מהמלך לאחר שלימד אותו לשחק שחמט (קורדמסקי, 1956). בשאלה זו מזוהות היטב מקצת התכונות החשובות של המשימה, שמזמינה חקר מתמטי: היא מוצגת בצורה מסקרנת, מאפשרת מספר הכללות, באחת מדרכי הפתרון (ניסוי) קיים קושי לא צפוי, ובסוף הדרך יש תשובה מפתיעה.

אביטל (אביטל, 1994) אסף ותרגם לעברית מספר רב של בעיות ל"חובבי מתמטיקה". הגישה המערכתית אל חידות כאל כלי לפיתוח חשיבה של הלומד פותחה לגבי בעיות מתמטיות (בעיקר ברמה תיכונית ועל-תיכונית) בעבודות של פויה (Polya, 1957, 1965). האופן שבו הוא מדגים את ההתמודדות עם בעיות פתוחות מענפים שונים של המתמטיקה משקפת את גישתו לבניית אסטרטגיות כלליות לפתרון בעיות ויישומן על ידי הלומד. חלק מהמלצותיו להתמודדות עם בעיה גולשות מעבר ל-subject matter מתמטי: פויה מדבר על עֲבִירוּת (transferability) של שיטות החשיבה מבעיה לבעיה בתוך התחום המתמטי וגם מענפים מתמטיים שונים ובכך מדגיש את ה"אלגוריתמיות" שלהן.

בעקבות גישה זו מציעה תוכנית הלימודים במתמטיקה לחטיבת הביניים באנגליה (Problem solving, 1991) לתלמידים לקט בעיות בצירוף תרשימים כלליים, שמספקים לתלמיד "תבנית" לתהליכי חקר.

קבלת משימות החקר על ידי הסטודנטים המשתתפים בפעילות תלויה במספר קריטריונים. קושי עיקרי גרם הצורך לאתר בעיות "לא מפחידות" עבור משתתפים בעלי רקע מתמטי דל, ועם זאת לשתפם (דרך התנסות פעילה) במגוון רחב של כלים ואסטרטגיות להתמודדות עם בעיות פתוחות. את הקריטריונים שבהם מדובר ניתן לחלק לשלוש קטגוריות: התוכן מתמטי, היבטים דידקטיים ומרכיבים פסיכולוגיים. מבחינה לוגיסטית, הקריטריונים מתייחסים לשלושה שלבי חקר: הצגת הבעיה וניסוחה, תהליך החקר עצמו ותוצאות החקר, כפי שמראה טבלה 1.

טבלה 1: התפלגות הקריטריונים להערכת בעיות חקר מתמטי

סוג הדרישה / שלב החקר	התוכן (Subject Matter)	ההיבט הדידקטי	מרכיבים פסיכולוגיים
הצגת הבעיה וניסוחה	ידע קודם מינימלי	רב-כיווניות של החקר	מעוררת סקרנות
תהליך החקר	ניצול כלים מוכרים ושילובם	ניצול מיומנויות חשיבה מגוונות	חיזוקים בדרך (פנימיים או חיצוניים)
תוצאות החקר	מספר רב של פתרונות	אופציות להתפתחויות נוספות	תוצאות מפתיעות

יצוין שכל הקריטריונים בוחנים את הבעיה מבחינת התאמתה לאוכלוסייה מסוימת – במקרה כזה ההערכה היא לא מוחלטת אלא יחסית למשתתפים בניסוי.

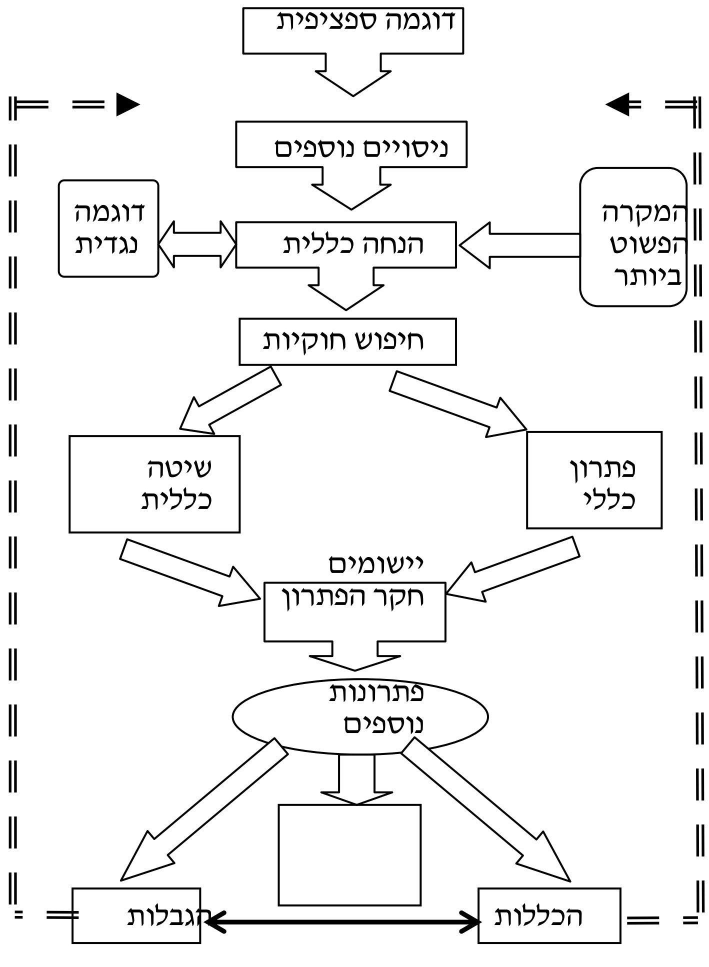
- *החדשנות שבסיטואציה עבור המשתתפים* היא תנאי כללי הכרחי, המקשר בין תהליך החקר לבין המשתתפים בו: תהליך החקר אמור להרחיב את הידע של המבצע ולהוביל אותו לתוצאות חדשות. טיפול בבעיה בעלת פתרון ידוע מראש הופך ניסוי לתהליך לא תקין. אך הגבול הוא עדין: הבעיה חייבת להימצא בתחום ההישגים הפוטנציאליים של הסטודנט, ולכן היא קשורה בבעיות ובתוצאות הידועות לו (מידע מעשי על תפקיד הידע הקודם תוך התמודדות עם הבעיה מוצג בהמשך).
- *הרמה המתמטית של ניסוח הבעיה:* האם המתמודד עם הבעיה יכול להבין את הנתון ואת הפרובלמטיות שקיימת במשימה? הצגת בעיה בשפה לא ברורה ושימוש במושגים בלתי ידועים או בלתי מובנים למתמודד סוגרים לו את דרכי החקר. בפירוש, זו אינה דרישה ל"הקלת המשימות": המצב יכול להיות מורכב מאוד, עד כדי ניסוח טריוויאלי של בעיה פתוחה מבחינת פתרון לא ידוע במדע, כמו בבעיות מפורסמות מתורת המספרים (דוקסיאדיס, 2001; Singh, 1997). המטרה היא

לחפש ולנסח סיטואציות בעלות פוטנציאל חקר המוצגות בשפה מובנת לאוכלוסייה עם ידע מתמטי מוגבל לרמה של בית ספר. מבחינה פסיכולוגית, ניסוח ברמת המושגים השייכים לבית הספר היסודי הופך את הבעיה בעיני הסטודנטים למעשית יותר ובכך אף לאטרקטיבית יותר.

- *הכלים המתמטיים הנדרשים להתמודדות עם המשימה:* האם הידע הקודם של מבצע הפעילות נותן לו הזדמנות להתקדם בתהליך החקר? מחסן הכלים של החוקר לא בהכרח חייב להבטיח פתרון מלא. להפך, ייתכן מצב של שיפור גישות ידועות והתפתחות מיומנויות תוך כדי התקדמות בתהליך. השתתפות בפעילויות חקר אמורה לפתח שימוש בכלים בין-תחומיים לחקר יעיל. חשיבות הגישה נובעת מהעובדה, שבאוכלוסייה המתמחה בהכשרה למורי מתמטיקה נפוץ יחס למתמטיקה כאל מדע מופשט עם גבולות מוגדרים בין ענפיה ועם שיטות וכללים מיוחדים בכל תחום (בקר וסיניצקי, 1998).
- *תוצאות בעלות ערך מתמטי* חשובות, למרות הדגש על תהליך החקר. הגעת המשתתפים להישג מתמטי חשוב במהלך הניסוי מעלה את ערכה וחשיבותה של שיטת החקר. יש לדאוג לבניית משימות עשירות בפתרונות – ולא רק בשלבים מרוחקים, אלא כבר בשלבים הראשונים של מהלך החקר.
- *מספר הפתרונות* (Leinhardt, Zaslawsky & Stein, 1990; Socha,1991) ו*מספר דרכי הפתרון* הם מבחינה דידקטית מרכיבים חשובים בהערכתה של תרומת המשימה לפיתוח חשיבה. אפשרות של אינטרפרטציות שונות (מילולית, מספרית, אלגבראית, גיאומטרית) של הבעיה גוררות אסטרטגיות מגוונות להתמודדות עימה (סיניצקי, 2000a). בבניית המאגר הניסיוני הוקפד על בחירת משימות, הניתנות לפתרון (או לפחות להתקדמות נכרת) במגוון דרכים, באמצעות טכניקות ומיומנויות חשיבה שונות (ניסוי מספרי, ניחוש מושכל, נוסחאות אלגבריות ועוד). פן זה חשוב לפרחי הוראה, מכיוון שרב-כיווניות של התהליך משקפת מגוון שיטות חשיבה אצל תלמידיהם ומציגה מודל לניצול ההטרוגניות של כיתת הלימוד.
- *אופציות נוספות – אנלוגיות, הכללות והגבלות* תופסות מקום מרכזי במערכת הקריטריונים להערכת בעיות, המעידות על חקר מתמטי על ידי הסטודנט להוראה. לפי פויה (Polya, 1954), לפעמים הרחבת תוכנית החקר מגבירה את סיכויי

הצלחתו. הכללות וכיוונים נוספים של החקר קשורים בהרחבה או בשינוי של קבוצת מספרים או צורות שבה מחפשים פתרון, בסוג התוצאה (מהוכחת קיום לבניית האלגוריתם לחיפושו) ובדרך קבלת הפתרון. כל זה מבוסס על תהליך לולייני של ניתוח התוצאה, שהתקבלה בניסיון ושאילת שאלות נוספות, הקשורות לתוצאה עצמה ולתהליך המוביל אליה (Sinitsky, 2001). התנאים החדשים מובאים להגבלות בהכללת התוצאות (איור 1).

איור 1: אסטרטגיה לחקר מתמטי



כל תהליך החקר מתפתח כסדרה של שאלות, העולות מפתרון של שלבים קודמים של הבעיה. סיטואציה עשירה, מטיבה, מזמינה שאלות שמעודדות את המשך החקר ברמות שונות וכיווני הכללה, המביאים לתחומים מתמטיים שונים (סיניצקי, 1998; סיניצקי ושכטר, 1995; Brown & Walter, 1983).

מבחינה פסיכולוגית, רצוי להציג את הבעיה בצורה מרתקת. הסקרנות ממריצה את המאמץ המחשבתי של החוקר ותורמת לחיפוש דרכים לא שגרתיות ולשאילת שאלות נוספות. יש להדגיש, שסקרנות מתעוררת כאשר המצב אינו ברור מראש, ועם זאת המתמודד יכול להפנים את המצב באמצעות הכלים העומדים לרשותו מידע קודם. אחת הדרכים הידועות להגברת סקרנות הלומד היא גזירת סיטואציה מקורית מחיי היומיום וניסוחה כבעיה מעשית (Resek, 1995). כלפי האוכלוסייה שהשתתפה בניסוי, חיפשנו בעיות בעלות ערך ישומי של התהליך והפתרון. במקרים רבים התמודדות עם הבעיה הפתוחה העשירה מובילה לעובדות מתמטיות חשובות ולהיבט חדש על הידע הקודם של הסטודנט המשתתף בניסויים. במשימה מורכבת יש מספר אבני דרך, ואלו, ככלל, גם תוצאות משנה (by-products) חשובות של תהליך החקר.

התוצאות מפתיעות את המתמודד, כאשר הן בניגוד להערכתו שניתנה על סמך האינטואיציה או בהתאם לניסיונו הקודם. דוגמה לכך משמש שינוי קל בנתונים, המשפיע באופן מהפכני על התשובה, מספר פתרונות בלתי צפוי – עד מקרה של אינסוף פתרונות במקום פתרון יחיד (סיניצקי, 2001a). דבר זה מתקיים גם במצב של חוסר נתונים או נתונים מיותרים סמויים בבעיה (Gardner, 1978; ליפקינד, 1995) היה עלינו להתייחס לעובדה, שהמשתתפים בניסויי החקר הם מורים (או מורים לעתיד) של בית ספר יסודי. קשר בין המשימה והחומר הלימודי הרלוונטי יראה כיישום מיידי ויעלה את המוטיבציה של המתמודד. עם זאת, השפעה על ההוראה במישור האופרטיבי אינה מספקת את מטרת השינוי בהשקפת סגנון ההוראה בבית הספר על ידי סטודנטים המשתתפים בתהליכי חקר. על מאגר הבעיות להציג שיטות עבודה שניתנות להתאמה (ולפעמים גם להעתקה) בתהליכי למידה פעילה בבית הספר. יש לציין, כי החלוקה הנ״ל היא מלאכותית במקצת, היות שתוך כדי הניסוי התקבלו ראיות על מְתאם בין קריטריונים מקבוצות שונות, כפי שמפורט בפרק על מהלך המחקר.

השלב הבא בביצוע תוכנית החקר הוא חיפוש והתאמה של בעיות פתוחות רב-שלביות, שעומדות בכל הקריטריונים. למעשה, מדובר בסיטואציות מתמטיות פתוחות, המזמינות פעילות חקר ברמות קושי ובדרכים שונות. בבחירת הבעיות ניסינו בין היתר להציג ענפים שונים של מתמטיקה אלמנטרית. תשע משימות עברו תהליך עיבוד והתאמה ושימשו במהלך הניסויים במסגרת המחקר (כולל ניתוח הרפלקציה של פלוני בהתמודדותו עם אחת המשימות). קובץ המשימות מפורט בנספח 1.

שיטת המחקר

מערך המחקר

מטרתו העיקרית של המחקר היתה לפתח ולהעריך מאגר פעילויות חקר לפיתוח חשיבה מתמטית של פרחי הוראה. שאלות המחקר היו :

- מהם הגורמים המשפיעים על הערכת הבעיה הפתוחה על ידי מי שמתמודדים איתה? האם יש קשר בין רמת פתיחות הבעיה ורמת הקושי שלה בעיני המתמודד?
- כיצד מתבצע תהליך החקר אצל הסטודנט? (באיזו מידה יכול המתמודד עם הבעיה לזהות את מיומנויות החשיבה שלו בתהליך התמודדות ולהשתמש בכלים יעילים ורלוונטיים לתהליך?)

בהתאם למטרות המחקר חולק המחקר לשני חלקים. החלק הראשון עסק בייצור משימות חקר מתמטי לפרחי הוראה, והשני חקר את דרכי ההתמודדות של הנחקרים עם המטלות מהמאגר המגובש, כל זה בשלושה שלבים :

- בניית מאגר משימות חקר בסגנון בעיות פתוחות לפרחי הוראה. שלב זה מתמקד בגיבוש מערכת דרישות לסיטואציות פתוחות שמתאימות לסדרת פעילויות חקר. לשם כך הורכב קובץ משימות המכיל בעיות מתמטיות ידועות מותאמות ובעיות חדשות, שפותחו לצורכי הניסוי.
- הערכת פעילויות החקר של הנחקרים. כל אחת מהמשימות הוערכה סובייקטיבית על ידי הנחקרים שהשתתפו בביצוען. פענוח המשוב מאפשר להבין מהם הגורמים המשפיעים על הערכת הקושי של הבעיה ותרומתה לסטודנט.

- פענוח ההתמודדות של הנחקרים עם המשימות. שלב זה עוסק בניתוח דיווחים אישיים על שמונה תהליכי חקר שהם ביצעו, שיטות עבודתם וחשיבתם. רוב הפעילויות מלוות בדיווח מטא-קוגניטיבי צמוד, המאפשר לאתר נקודות תורפה והתלבטויות של הנחקרים במהלך הפעילות.

אוכלוסיית המחקר

לביצוע השלבים המעשיים של הפרויקט נבחרה קבוצת סטודנטים ממכללת גורדון, המתמחים במתמטיקה ולומדים לתואר BE.d. לפי הנחת המחקר, קבוצה זו היא בעלת מספר תכונות יסודיות, חיוניות להצלחת הניסוי: בסיס מתמטי מספיק לניתוח בעיות מוגשות לחקירה והערכה; ניסיון בפתרון בעיות בניסוחים שונים; היכרות מסודרת (ראשונית לפחות) עם מיומנויות חשיבה; השתתפות בסדרת פעולות חקר המבוססות על בעיות פתוחות; היכרות עם המושגים קוגניציה ומטא-קוגניציה.

הנחקרים החליפו תפקידים במהלך הניסוי: בשלב ההתמודדות עם בעיות חקר הם פעלו כחוקרים בתחום הידע (המתמטי); ניתוח הדוחות שלהם על פעילויותיהם הפך אותם לקבוצת נחקרים (על דרכי חשיבתם והתמודדותם עם מצבים קוגניטיביים מורכבים); בתהליך ההערכה הסובייקטיבית של משימות החקר הם תפקדו כקבוצה של מומחים – שופטים.

השתתפות של כל אחד מהנחקרים ב-8 פעילויות חקר מאפשרת לקבל מידע משמעותי על תהליכי ההתמודדות עם הבעיה הפתוחה, למרות הגודל הקטן של קבוצת החקר (9 סטוודנטים).

כלי המחקר

מאגר של משימות חקר מתמטי – נבנה בעזרת חידות ובעיות מתמטיות בעלות פוטנציאל להרחבתן ולהפיכתן לפעילויות חקר מתמטי, משימה שדרשה חיפוש ביבליוגרפי רחב.

מודל של "משימות רצויות" – נבנה בעקבות ניתוח של דרישות דידקטיות של בעיות מתמטיות פתוחות המצויות בספרות. בהתאם למודל זה בוצעה עבודה דידקטית של התאמה, הרחבה, התאמה ופיתוח משימות חקר.
השאלונים והמשוב של הנחקרים בשילוב של ניתוח סטטיסטי רלוונטי היו הכלי העיקרי בשלב הערכת המשימות.
תהליכי ההתמודדות של הנחקרים עם משימות החקר תועדו ונותחו באמצעות הדוחות שלהם על התהליך עצמו בפורמט פתוח וכתשובות לשאלונים על תהליכי החשיבה במהלך התמודדותם עם הבעיות.

הערכת הבעיות על ידי הנחקרים

בתום סדרת פעילויות החקר וניתוח הרפלקציה התבקשו הנחקרים להעריך כל אחת ממשימות החקר שבהן הם טיפלו. בחלק הראשון של השאלון הם הצביעו על בעיות זכורות להם היטב בתום תקופת הניסויים (בטרם הוצגה בפניהם רשימת המשימות). לצורך ההערכה הכללית הם קיבלו את רשימת המשימות ודירגו את כל הבעיות לפי רמת הקושי שלהן, ובחלק השני של השאלון את הבעיות שבהן הם ראו אתגר אינטלקטואלי, תרומה משמעותית לידע מתמטי ולהבנה, ותכנון וביצוע תהליכי הוראה (לנחקר ניתנה אפשרות לציין יותר ממשימה אחת). עם זאת, הנחקרים סימנו את הבעיות שזכורות להם יחד עם התוצאות שהתקבלו.
הנתונים מוצגים בטבלה 2 (כלולים בה הנתונים לגבי פעילויות החקר וגם הפעילות המסכמת ללא המשימה האחרונה, ניתוח הרפלקציה). נוסף על כך ביטאו המשתתפים "הערכה כללית" בבחירת הבעיות שלדעתם משקפות את מטרות הפעילויות במידה הרבה ביותר ובמידה המעטה ביותר.

טבלה 2 : הערכה סובייקטיבית כללית של משימות החקר

מספר פעילות החקר (בסדר כרונולוגי)	1	2	3	4	5	6	7	8
דירוג רמת הקושי לפי הערכת המשתתפים*	2.11	2.75	4.11	4.00	4.75	4.75	4.38	4.38
סטיית התקן בדירוג רמות הקושי	1.36	1.16	1.90	2.78	1.98	2.19	2.72	2.56
הנחקרים שציינו את הבעיה כאתגר אינטלקטואלי, %	22	67	33	56	11	22	56	22
הנחקרים שציינו את תרומת הבעיה לידע מתמטי, %	33	33	22	44	0	22	44	22
הנחקרים שציינו את תרומה רבה של הבעיה להוראה, %	33	33	67	33	0	11	44	22
רמת תפיסת הבעיה בזיכרון המשתתפים**	1.44	2.56	1.11	0.78	1.44	1.56	1.78	1.00

* - מדורג מ- 1 (פעילות קלה ביותר) עד 8 (פעילות קשה ביותר).

** - בעיה קיבלה ציון "3" כאשר היא צוינה ברשימת הבעיות הזכורות ביותר (עוד לפני הצגת רשימת הבעיות בשאלון), ציון "1" כאשר צוינה בתור זכורה (יחד עם תוצאות החקר) אחרי תזכורת – הצגת רשימת המשימות, ציון "0" כאשר היא לא צוינה בין אלו הזכורות היטב.

בדירוג רמות הקושי של פעילויות החקר בולט פיזור רחב בציונים (ראה סטיות התקן של הציונים). בין 36 מקדמי מתאם הדרגות של ספירמן r_S רוב המקדמים נמצאים בטווח בין $0.3 \div -0.2$, שמצביע על חוסר התאמה בין הדירוגים של המשתתפים השונים. בכל זאת, שתי המשימות הראשונות נתפסו כבעיות קלות מהשאר. אחד ההסברים האפשריים לכך הוא דיון ביניים קבוצתי משותף על תוצאות החקר, שבמהלכו נקבעו דרכים ברורות להתקדמות בתהליך החקר.

קל לראות, שעל רמת הקושי של הבעיה משפיעה הבנת הרלוונטיות שלה לתהליך ההוראה. המשימות שלדעת המשתתפים לא תרמו לשינוי תפיסתם בהוראה מתקבלות כבעיות קשות ביותר (משימות 5 ו-6) – בניגוד לרמת הקושי האובייקטיבי. טיפול באותן משימות, למרות קרבתן לתוכנית הלימודים, נזכר בחלק מהמשוב שהתקבל כתורם במעט לפיתוח חשיבה של המתמודדים. 44% התגובות מגדירות בעיות אלה כ"סגורות מדי" וכמאפשרות טיפול בדרך שגרתית. רק שתי משימות מוזכרות כלא מתאימות לפעילויות לפיתוח חשיבה מתמטית (משימה 5 ב-22% מהמשוב, ומשימה 6 ב-44% מהמשוב).

לעומת זאת, יש רק שתי משימות קשות מבחינה מתמטית (משימות 2 ו-7), שבפירוש עניינו את המשתתפים מבחינה מתמטית, שהן בקורלציה ברורה עם תרומת הפעילויות להעמקת ידיעותיהם. הן נבחרו על ידי הנשאלים כמשימות המתאימות ביותר לחקר מתמטי. באופן טבעי, הן גם נמצאות בין המשימות הזכורות ביותר בתום תקופת הניסוי (במיוחד מרשימה העובדה לגבי משימה 2, שטופלה בתחילת סדרת הניסויים).

פענוח הנתונים מאפשר לנסח מספר מסקנות לגבי ההערכה הסובייקטיבית של המשימות:

דירוג משימת החקר לפי רמת הקושי מבוסס בעיקר לא על הערכה אמיתית של הקושי המתמטי, ואף קיים פיזור רב בין ההערכות. אחד הגורמים לתפיסת המשימה כקשה הוא חוסר העניין בה – מבחינת תרומתה לידע או לדרכי הוראה.

קרבת נושא החקר לחומר הרלוונטי להוראה לא בהכרח מבטיח את "הצלחת המשימה": עם כניסתם של הנחקרים לסדרת פעילויות חקר, מושך אותם יותר תהליך ההתמודדות עם בעיות רב-שלביות ופתוחות לגבי כלי הטיפול בהן.

הצגת המשימה בצורה מוחשית מגבירה את ההתעניינות בה, מורידה את רמת הקושי בעיני המתמודדים עימה וגורמת לכניסתו של התהליך למאגר בעיות שהנחקרים זוכרים היטב. עובדות מספריות מרשימות, שמוגשות כמקור לתהליך החקר, לא מתחרות עם המחשה ויזואלית של בעיות גיאומטריות פתוחות.

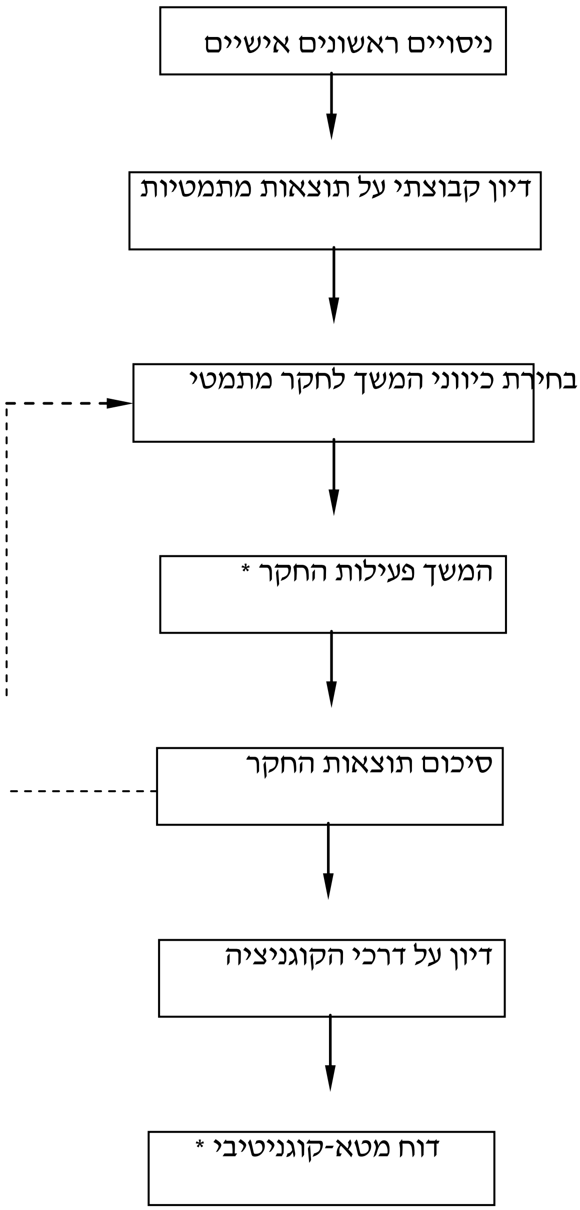
בחלק השלישי של המשוב המסכם התבקשו המשתתפים לציין גם את הפעילויות הממחישות שימוש במיומנויות חקר מתמטי ספציפיות (ניסוי וטעייה; סינון אפשרויות; אנלוגיה; דוגמה מינימלית ודוגמה נגדית). כאן התקבלו תגובות דלילות

מדי וגם סותרות (פרט לתפקיד ברור של אנלוגיה בטיפול במשימה 3): אמנם ניתוח הפעילויות של הנחקרים מראה מגוון רחב של אסטרטגיות וכלי חשיבה בהתמודדות עם הבעיה, והפיזור בציון משימות החקר ה"מתאימות ביותר" לשימוש בכלי מיוחד הוא טבעי; עם זאת, הדבר עשוי לשקף את חוסר הניסיון בניתוחי קוגניציה על ידי הסטודנטים שהשתתפו בניסוי.

תיאור הפעילויות וניתוחן

כל התהליך נבנה כסדרת מפגשים, שבתחילתו של כל אחד מהם הוצגה למשתתפים סיטואציה פתוחה. אופן ההתמודדות עימה השתנה בהתאם לרמתה, למורכבותה ולמוכנות המשתתפים למסע חקר עצמאי. אחרי התנסות ראשונית התנהל דיון בדוגמאות ובתוצאות ביניים שהתגלו, ואף בדרכי ההתמודדות שבחרו המשתתפים. כל אחד ממהלכי החקר תועד כעבודה אישית של המשתתף. הדיון בתוצאות המתמטיות שהתקבלו שימש כשלב מסכם מבחינת העשרת הידע של המשתתפים בנושא המתמטי וכפתיחה לשיחה על דרכי הקוגניציה ומיומנויות החשיבה הרלוונטיות. לרוב מהלכי החקר התבקשו המשתתפים לצרף ניתוח מטא-קוגניטיבי. איור 2 מציג תרשים זרימה ארגוני טיפוסי לפעילויות חקר.

איור 2 : ארגון פעילות חקר



* הפעילות בוצעה ללא הגבלת זמן כמשימת בית

בסך הכל בוצעו במהלך המחקר שמונה פעילויות חקר מורכבות. בגלל גודל המדגם (תשעה סטודנטים ל-BEd), מצאנו לנכון להתרכז בפענוח איכותני של הממצאים עם הדגש על שלוש נקודות: מגוון האסטרטגיות שנבחרו להתמודדות עם הבעיה; שימוש בידע קודם והתייחסות לתוצאות ביניים במהלך תהליך החקר; אופן השימוש במיומנויות חשיבה בשלבים שונים של התהליך. שלוש נקודות אלו מפורטות בסעיף הממצאים.

המידע על תהליכי ההתמודדות עם בעיות פתוחות נאסף במהלך המחקר בעזרת חמישה כלים:

1. דוח על תהליך החקר המתמטי ותוצאותיו. כל אחד מהמשתתפים התמודד עם משימות חקר רב-שלביות ותיעד בעצמו את תהליך החקר המתמטי. מאחר שבמהלך החקר היה על הנחקרים להעלות השערות ולאשש אותן, עלו שאלות והנחות נוספות וכיווני חקר חדשים. תהליך החקר לווה בדיון קבוצתי בהשתתפות המנחה על תוצאות הביניים המתמטיות שהתקבלו ושימש לגיבוש שאלות להמשך החקר. כל משתתף דיווח על השאלות הנדונות, שלבי החקר ותוצאותיו (נאספו 65 דוחות).

2. דוח מטא-קוגניטיבי על התהליך. בתום חמשת תהליכי החקר המתמטי התבקשו הנחקרים לפענח את התהליך החשיבה שלהם בהתמודדות עם משימה פתוחה (נאספו 34 דוחות). היה עליהם לציין מהן מיומנויות החשיבה הספציפיות שהם הפעילו בכל שלב ומהם השיקולים הקוגניטיביים שחשפו אותם לשלבים הבאים של החקר.

3. שיחה על פעילויות החקר. כל פעילות הסתיימה בשיחה על העקרונות המתמטיים, דידקטיים וקוגניטיביים שיושמו במהלך הטיפול בבעיה המתמטית הפתוחה. מטרת השיחה היתה להראות את מקום החקר שבוצע בהשכלה המתמטית ולהדגיש את הפן הקוגניטיבי של התהליך. הסטודנטים שיתפו את חבריהם בדילמות קוגניטיביות שחוו וגם ברגשות שעברו במהלך החקר (כולל מצבים של חוסר נתונים לקבלת החלטה, תסכול, סיפוק וכו׳).

4. עבודה עצמית מסכמת – ניתוח רפלקציה של פעילות החקר. בשלב האחרון של הניסוי הוצג לפני המשתתפים דיווח מתמטי מלאכותי על הפעילות שהם ביצעו

כפעילות חקר אחרונה. הם התבקשו לשחזר את הקוגניציה של משתתף כלשהו ולחבר דיווח רפלקציה שלו.

5. משוב מסכם, שמטרתו היתה להשיג שתי מטרות. הפרקים א׳-ג׳ שלו נועדו לקבלת הערכה של משימות החקר על ידי המשתתפים, כפי שמתואר בהמשך. בפרק ד׳ רוכזו שאלות לנחקרים: על הכלים שנרכשו על ידם להתמודדות עם בעיות מתמטיות ובעיות פתוחות בכלל ושיטות (אלגוריתמים) לפתרון הבעיות; על דרכי ההצגה של החומר המתמטי בכיתת הלימוד וההשפעה של השתתפותם בפעילויות חקר על גישה זו; על התרומה של התהליך שבו השתתפו לידע, לשימוש במונחי קוגניציה ולהערכה עצמית בתחום החקר המתמטי.

שילוב של דיונים קבוצתיים ופענוח של מהלכי חשיבה מתועדים של הנחקרים סיפק מידע על שיטות התמודדות עם סיטואציות מתמטיות מורכבות על ידי המשתתפים.

הממצאים

הרבגוניות של פעילות החקר – כדי לפענח את הפעילויות המתמטיות של הנחקרים תורגם כל דיווח במסגרת המחקר לתרשים זרימה שמשקף את שלבי החקר. במהלך הניסויים השתמשו המשתתפים בשיטה של התמודדות עם בעיות מתמטיות פתוחות, כפי שהוצגה באיור 1. ואולם התברר, שהאסטרטגיה הכללית למעשה מתממשת כמגוון רחב של סכמות ספציפיות יותר. לדוגמה מפוענח כאן תהליך הטיפול במשימה 1 (ראה נספח 1). עם הצגת השוויון $2+2=2\times2$ התבקשו הסטודנטים למצוא את קבוצות המספרים שמקיימים את השוויון בין מכפילתם וסכומם. בעיה זו נותחה מבחינה מתמטית בעלון "מספר חזק" (חורין, 1998; סיניצקי, 2001a).

מבחינת *תוכן החקר*, התהליכים מתפלגים לשלוש קטגוריות: טיפול מעמיק במצב, הקרוב לדוגמה המוצגת מלכתחילה (שני מספרים); התמקדות במצב ספציפי אחר (מקרה של שלושה מספרים או יותר); ניסיון בטיפול מורכב (עם מעבר ממקרה של שני מספרים ליותר מספרים). ברוב העבודות יש הבחנה בין המקרה של מספרים זהים ושונים, ואפילו הגישה האלגברית מיושמת בנפרד לשני מקרים אלה.

התפתחות החקר תלויה *באינטרפרטציה* ו*ניסוח עצמאי* של הבעיה המוצגת: בחלק מהעבודות חלה עד סוף החקר הגבלה של זהות בין המספרים – וכך צומצם בהרבה מרחב הפתרונות האפשריים. בפעילות זו, קביעת תחום הפתרונות היא קריטית למהלך החקר. חלק מהמשתתפים ביצעו את המעברים (הרחבת התחום ממספרים טבעיים לשלמים או לרציונלים) בצורה מובנת, ואז הגיעו לפתרונות בצורה דדוקטיבית. במהלכים אחרים התקיים מעבר זה בצורה כמעט אקראית או כגילוי אינטואיטיבי.

הטבלאות בנספח 2 מציגות סכמה של התמודדות עם הבעיה של שלוש סטודנטיות שעבדו מבחינה לוגיסטית בצורה דומה למדי: הן התחילו מניתוח המצב לשני מספרים ועברו לשלושה מספרים או יותר. קל לראות, כי המצב ההתחלתי הפתוח מזמין מגוון רחב של אסטרטגיות לטיפול בו, ואותן התוצאות המתמטיות מושגות בסדר והקשר שונה אצל חוקרים שונים.

הקוגניציה במהלך החקר: ידע קודם ותגובה ל"פתרון מוזר" – בניתוח אסטרטגיות מבחינה קוגניטיבית חשוב להבין את ההשפעה על תהליך החקר של גורמים מסוגים שונים הקשורים בסטודנט עצמו. פענוח פעילויות הנחקרים מצביע על פרטים מיוחדים, הקשורים בשני גורמים שמשפיעים על מהלך החקר: תפקיד הידע המתמטי הקודם בשלבים שונים של הפעילות ותגובה לגילוי פתרון בלתי צפוי מראש.

ידע מתמטי עשיר עוזר במיוחד בשלבים ראשונים של התמודדות עם בעיה, כאשר אין די נתונים וקיים מצב של חוסר ודאות. בערך בחצי מהמקרים (18 מתוך 34) דיווחו המשתתפים על הסיטואציה ההתחלתית כמוכרת – ומיד התחילו לחפש דוגמאות, חוקים והכללות. ניתוח הפעילויות והדיווחים של המשתתפים העלה, שהיכרות עם עובדות מייצגות או דומות להן גורמת לכניסה קלה יחסית של המשתתף לשלבים הראשונים של תהליך החקר. בשיחות קבוצתיות על מהלך החקר ציינו אותם הנחקרים את רמת הביטחון הגבוהה שלהם בתחילת הדרך.

חשוב לציין כי היתרון של "כלים ברורים" לתחילת החקר נעלם לקראת סיום התהליך: אין הבדל (בהערכה איכותנית, כמובן) בין רמת התוצאות וכַמותן בתהליכים שבוצעו מנקודת התחלה של ידע קודם וסיטואציה חקר חדשה. יתרה

מזו, ב-12 מתוך 18 הניסויים הנזכרים (ידע קודם רחב וקרוב לנושא הפעילות), הניסיון הקודם הכתיב גם דרכי טיפול בבעיה, בייחוד בנוגע לשימוש בטכניקות ושיטות שגרתיות. בדיווחי קוגניציה על פעילויות אלו מופיעים מונחים של חשיבה פורמלית יותר: העתקה, התאמה, יישום הכלל.

התופעה נפוצה יותר דווקא בקרב סטודנטים עם רמת ידע מתמטי (והערכה עצמית של ידע זה) גבוהה יחסית. רוב המקרים של שליטה בידע קודם רלוונטי (10 מתוך 18) מתחלקים בין שלושה משתתפים בעלי ידע מתמטי עשיר יחסי. בדיעבד, במשוב המסכם, הדגישו נחקרים אלה את החסרונות של הערכת היתר של פוטנציאל הכלים המתמטיים הידועים: הם תפקדו כשַבלונות וסגרו דרכי התמודדות אפקטיביות יותר לחקר. פרט זה בולט בשלב קבלת החלטות על המשך הדרך: האפשרות לניצול הטכניקה של שלבים קודמים גורמת לבחירת מסלולי המשך החקר, ולא תמיד בהתאם לתוכנית החקר היעילה.

פן נוסף של האינטראקציה בין מתמטיקה ופסיכולוגיה מתגלה כשוני בולט בתגובתם של הסטודנטים לפתרון לא צפוי מראש. ככלל, פתרון "פתאומי" יוצא מגדר הנחות היסוד של השלבים הראשונים של החקר ויכול לפתוח כיוון חדש בפעילות (הרחבת התחום, שינוי בהגבלות, אופציה להכללות וכו'). אפשר להבחין חמישה סוגי התגובות:

1. התייחסות פוסלת ("הפתרון הזה לא מתאים לנו") – ללא ניסיון להבין את הסיבה לגילוי פתרון "לא רצוי"
2. התייחסות ספקנית ("כנראה, יש טעות בחישובים, צריך לבצע אותם מחדש")
3. קבלת הפתרון כפריצת דרך לכיוון חקר חדש ("מהמשוואה יוצא שהפתרונות לא תמיד חיוביים")
4. הכללה מיידית "על-אופטימית" על סמך הפתרון החדש ("המצב הזה מתקיים לשניים, לשלושה, וכנראה, לכל כמות האיברים")
5. התייחסות ביקורתית מנומקת ומיון הפתרון בסדרת הפתרונות הדומים ("כאן זה נכון, אך לא יעבוד למספר זוגי של נקודות חלוקה").

יצוין שאופי ההתייחסות של הסטודנט לתוצאות מתמטיות הוא כאן אמוציונלי ואינו קשור ישירות לרמת הידע ומיומנויות החשיבה תלויי-התוכן של החוקר. אבל, היחס לפתרון בלתי צפוי מגדיר במקרה זה כיוונים שונים (הרחבת/שמירת תחום המספרים, שימוש בסימטריות של פתרונות, קביעת המבנה הכללי של הפתרון) להתפתחות התהליך החקר המתמטי – וכך יכולים גורמים אישיותיים להשפיע על קביעת האסטרטגיה של החקר.

רמת השליטה במיומנויות חקר מתמטי – במשוב ציינו הנחקרים מושגי קוגניציה שהיו מוכרים או ידועים להם לפני הניסוי. התברר, כי באופן תיאורטי הם יודעים את מונחי היסוד הכלליים ביותר (100% מהמשתתפים נזכרו במושג הרפלקציה, וכולם להוציא אחד – בחשיבה דדוקטיבית ואינדוקטיבית). עם זאת, רק שליש מהם הצביעו גם על מספר מיומנויות חשיבה ספציפיות (דוגמה ותפקידיה, אנלוגיה, הכללה, הגבלה).

מניתוח פעילויות החקר נובע, כי בצורה אינטואיטיבית השתמשו הנחקרים בניסוי מתמטי, העברת תוצאות, העברת אלגוריתמים, אנלוגיות ועוד. כאשר הם התבקשו לגבש דוח מטא-קוגניטיבי על התהליך, בלט ניתוק מלא בין הידע התיאורטי במיומנויות חשיבה גבוהות לבין תוכן הדיווח. תיאור התהליך מוגבל בהסברים על התקדמות מתמטית וכלל לא מתייחס לתהליכי החשיבה שהם חוו. ניתוח המצב גרם לשינוי תוכנית המחקר המקורי ולהוספת שיחה על התהליכים הקוגניטיביים המעשיים.

בתגובת הנחקרים לשאלה בדבר מיומנויות החקר המתמטי שהם פיתחו במהלך המחקר הוזכרו שלושה חידושים עיקריים:

1. *שימוש בניסוי וטעייה כשגרה* במהלך החקר המתמטי (צוין אצל 89% מהנחקרים). בייחוד נלמד כאן התפקיד של ניסוי מכוון לחיפוש דוגמאות נוספות בתחילת תהליך החקר. מושג זה, שהוא טבעי כל כך למקצועות המדע, נתפס כשולי, וכמעט שאינו לגיטימי בתחום המתמטיקה לפני סדרת ניסויים.

2. *המשך תהליך החקר "אחרי קבלת הפתרון"* (מופיע ב-67% מהתשובות). המשתתפים התרגלו להרחבת הבעיה המקורית באמצעות חיזוק או החלשה של הגבלות, המוגדרות על ידם בתחילת התהליך, שאילת שאלות נוספות והתייחסות

לכל פתרון כאל תוצאת הביניים. לטענה זו יש נימוק גם מצד ניתוח פעילויות החקר עצמן: בניגוד לשלוש הפעילויות הראשונות (שבהן רק 20% מהמשתתפים ידעו להרחיב את תהליך החקר ביוזמתם מעבר לקבלת התשובות לשאלות המוצגות), בעבודה המסכמת המשיכו כל המשתתפים את החקר בכיוונים שונים אחרי קבלת תוצאת הביניים (שלשות פיתגורס).

3. *שימוש באופן מודע במושגי קוגניציה* בניתוח פעילויות החקר תוך כדי התהליך ובסיומו. כל המשתתפים ציינו במשוב שלא היתה להם התנסות קודמת בפעילויות חקר פתוחות ומורכבות במהלך לימודיהם ועבודתם בתחום ההוראה. יש לציין כי בתום הניסוי במשוב בחרו בפירוש כל המשתתפים במשימת ניתוח הקוגניציה של פלוני כמשימה הקשה ביותר שניתנה להם. הם גם הדגישו, שההיכרות עם מושגי הקוגניציה בצורה פעילה השפיעה על תהליכי החקר שהם ביצעו בהמשך.

סיכום

במסגרת החלק התיאורטי של המחקר הנוכחי גובשה מערכת דרישות לתוכן ולמבנה של פעילויות חקר לשם פיתוח החשיבה המתמטית של הלומד, ובה התייחסות לפן התוכני, הדידקטי והפסיכולוגי של תהליך החקר בכל אחד משלביו. על סמך קריטריונים ברורים הורכב קובץ ניסיוני של משימות חקר לאוכלוסיית המחקר – מורים ופרחי הוראה המתמחים בהוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי.

ההערכה הסובייקטיבית של המשימות מלמדת, כי איכות המשימה נמדדה על ידי הנחקרים על פי התרומה לידע ולתהליכי ההוראה. קרבת התוכן המתמטי של המשימה לתוכנית הלימודים לא מבטיחה דירוג גבוה של הבעיה. קיים פיזור רב בהערכת רמת הקושי של הבעיות, והמחשת הבעיה שימשה ככלי יעיל מאוד להקלת המשימה ולקירובה למשתתף.

במהלך ההתמודדות עם בעיות פתוחות יישמו המשתתפים את הידע התיאורטי שלהם במיומנויות חשיבה ונקטו אסטרטגיות אפקטיביות מגוונות. הניסוי מוכיח את הרב-כיווניות של תהליכי החשיבה היצירתית בהתמודדות עם סיטואציות מתמטיות פתוחות.

לסטודנטים שנחקרו לא היתה מודעות קודמת לגבי השימוש השיטתי בחלק מהכלים לחשיבה אינטואיטיבית בתחום המתמטי (ניסוי מתמטי, חקר פתרונות). שימוש רחב בדיון מטא-קוגניטיבי ושיחה על תהליך החשיבה הובילו לשימוש מודע בכלי חקר רלוונטיים במהלך הפעילות.

נתוני הניסויים מאשרים את קיומו של קשר בין גורמים תוכניים ופסיכולוגיים במהלך החקר: התגלה ביטחון יתר בשימוש בטכניקות מבוססות על ידע קודם – תגובה רגשית לפתרון בלתי צפוי כגורם לבחירת האסטרטגיה להמשך החקר המתמטי.

מקורות

אביטל, ש' (1994). **מתמטיקה בהנאה.** ירושלים: עם עובד.

אולחניק, ס"נ, נסטרנקו, י', ופוטפוב, מ"ק (1988). **בעיות מתמטיות עתיקות** (ברוסית).

בקר ח' וסיניצקי, א' (1998). פיתוח חשיבה מתמטית: שוברים את הסטיגמות. **כנס ארצי למנהיגות בהוראת מתמטיקה.** רחובות: מכון וייצמן.

דוקסיאדיס, א' (2001). **הדוד פטרוס והשערת גולדבך.** תל אביב: ידיעות אחרונות.

הרפז-רובין, ע' (1994). הצגת מספרים שלמים כסכומים של מספרים עוקבים. **סדנה למורים למתמטיקה, פרויקט "מחר 98".** חיפה: הטכניון.

ויינברג, י' (1998). **שילוב פיתוח חשיבה במסגרת הכשרת פרחי הוראה למדעים.** עבודה לשם קבלת תואר דוקטור (לא פורסם). ירושלים: האוניברסיטה העברית.

זוהר, ע' (1996). **ללמוד, לחשוב וללמוד לחשוב.** ירושלים: מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה.

זוהר, ע' (1999). **הכשרת מורים לקראת פיתוח החשיבה של התלמיד.** תל אביב: מכון מופ"ת.

זוהר, ע', מרגלית, י' ושוורץ, י' (1998). פעילויות חקר פתוחות בביולוגיה. ירושלים: המרכז להוראת מדעים, האוניברסיטה העברית.

חורין, נ' (1998). חוקרים צעירים, **מספר חזק, 17 ,** 35-37.

ליפקינד, ש' (1995). תוצאות מפתיעות במתמטיקה (הרצאה למורים למתמטיקה). **פרויקט "מחר 98".** חיפה: הטכניון.

מובשוביץ-הדר, נ' (1991). הצגת משפטים מתמטיים והוכחותיהם – הצמחה לעומת הצנחה. חלק א', ב'. **על"ה – עלון למורה המתמטיקה, 9,** 58-62; **10,** 44-51.

משימות (1993). פעילויות העמקה חלק א', ב'. רחובות: המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן.

סיניצקי, א' (1998). Open-ended problems בהשתלמויות מורים כמודל להוראה בכיתה הטרוגנית. **כנס ארצי למנהיגות בהוראת מתמטיקה.** תקצירים. רחובות: מכון וייצמן, 63.

סיניצקי, א. (2000a). בעיות פתוחות ואלגוריתמים לחשיבה. **כנס ארצי שני למנהיגות בהוראת מתמטיקה.** תקצירים. רחובות: מכון וייצמן, 24.

סיניצקי, א' (2000b). בעיות קומבינטוריות בגיאומטריה. **כנס ארצי שני למנהיגות בהוראת מתמטיקה.** תקצירים, 25. רחובות: מכון וייצמן.

סיניצקי, א' (2001a). ברור כמו 2x2... **מספר חזק 2000, 3**, 42-45.

סיניצקי, א' (2001b). מהי בעיה טובה? קריטריונים להערכת בעיות לפיתוח חשיבה. **הרצאה בכנס מחקר.** חיפה: מכללת גורדון.

סיניצקי, א' ושכטר, ב"ש (1995). Problem Posing. **סדנה למורים למתמטיקה. פרויקט "מחר 98".** חיפה: הטכניון.

תוכנית 2000 (2001). **תכנית לימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי הממלכתי והממלכתי-דתי.** ירושלים: משרד החינוך.

קורדמסקי, ב"א (1956). **תובנה מתמטית** (ברוסית).

Baroody, A. & Ginsburg, H. P. (1990). Children's learning: a cognitive view. In R.B. Davis, C. A. Maher, N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp. 51-64). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Ben-Peretz, M. & Tamir, P. (1986). What do curriculum developers do? *Curriculum perspectives*, *6*(21), 8-15.

Borasi, R. (1994*). Learning mathematics through inquiry.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Brown, S. & Walter, M. (1983). *The art of problem posing.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (Ed.). (1994). *Learning mathematics. Constructivist and interactionist theories of mathematical development.* Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Gardner, H. (1993). *Multiple intelligence: The theory in practice.* London: Basic Books.

Gardner, M. (1978). *AHA! insight.* New York: Scientific American.

Greeno, J. (1992). Mathematical and scientific thinking in classrooms and other situations. In Halpern D. F. (Ed.), *Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics.* Hillside, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jaworski, B. (1994). Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry. London: Falmer Press.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren standpunkte aus erster band.* Berlin: Verlag Springer.

Leinhardt, G., Zaslawsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Perkins, D., & Solomon, G. (1989) Are cognitive skills context-bound? *Educational Researcher, 18*(1), 16-25.

Polya G., (1957). How to solve it. Garden City, NY: Doubleday.

Polya, G. (1965). Mathematical discovery. NY-London: Wiley & Sons.

Problem solving (1991). 16-19 mathematics. Pupil's text. School mathematics Project. Cambridge: University Press.

Resek, D. (1995). Opening-up the curriculum by introducing open-ended problems. *Lecture for teachers in a framework of project "Makhar 98"*. Haifa: Technion.

Shennon, R. (1978). *Simulation of complex system: art and science.* Moscow: Nauka.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Silver, E. (1993). The nature and use of open-ended problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *Zentralblatt fur didaktik der Mathematik, 80,* 193-207.

Singh, S. (1997). *Fermat's last theorem.* London: Fourth Estate.
Sinitsky, I. (2001). Open-ended mathematical problems and algorithms of mathematical inquiry. *9th European Conference of EARLI. Abstracts.* Fribourg, Switzerland: University of Fribourg, 48.

Sosha, S. (1991). Questions with multiple answers. *Mathematics Teacher, 84,* 638-640.

Swartz, R. (1997). Teaching science literacy and critical thinking skills through problem-based learning. *Supporting the Spirit of Learning*, 117-140.

Sylwester, R. (1997). *Intelligence. What is it. How to enhance it.* Eugene, OR: University of Oregon.

Von Glasersfeld, E. (Ed.). (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Zohar, A. (1996). Transfer and retention of reasoning skills taught in biological contexts. *Research in Science and Technological Education, 14* (2), 205-219.

נספח 1. משימות החקר שביצעו המשתתפים במסגרת הפרויקט

המשימות המפורטות להלן כוללות: שתי בעיות בניסוח גיאומטרי: משימה 2 (משימות, 1993) ומשימה 7 (סיניצקי, 2000b); שלוש בעיות מספריות: משימה 1 (סיניצקי, 2001a), משימה 3 (פיתוח עצמי) ומשימה 5 (הכללת בעיות מספרי לימוד שגרתיים למתמטיקה לחטיבת הביניים); בעיות עם מקור אריתמטי בעלות פוטנציאל ברור לשימוש בטכניקות והכללות אלגבריות: משימה 4 (הרפז-רובין, 1994), משימה 6 (אולחניק, נסטרנקו ופוטפוב, 1988) ומשימה 8 (סיניצקי, 2001b). הבעיות 3, 5 ו-6 צמודות למדי לתוכנית הלימודים של בית הספר היסודי, תחום העיסוק של הנחקרים.

משימה 1. "מהי הפעולה?" (סיניצקי, 2001a)

השוויון שאולי הוא הידוע ביותר בחשבון הוא 4= 2 x2, אבל גם 4= 2+2

$$2+2=4 \qquad 2\times2=4$$

.

במקרה זה אפשר "להחליף" את פעולת החיבור בפעולת כפל:

2+2 = 2 x2 שתכונה זו *לא תמיד* מתקיימת $2\times2=2+2$

שלב א'. ניסוי אקראי מוכיח, ושאלה טבעית שעולה מכך היא: *האם יש עוד מספרים שמכפלתם שווה לסכומם?*

אילו פירושים אפשריים לשאלה זו?

בחר אחד מכיווני החקר וסכם את התוצאות.

שלב ב'. מהם הכלים המתמטים שבהם השתמשת במהלך החקר?

מהן מיומנויות החשיבה בחקר?

שלב ג'. נסח באופן מדויק את הבעיה שעליה עבדת, למשל:

האם קיימים עוד זוגות של מספרים זהים, שמכפלתם שווה לסכומם?

חשוב על הכללות אפשריות של הבעיה, הקשורות בשאלות הבאות:

באיזה תחום מספרים עבדת? האם בדקת רק מקרה של מספרים זהים? האם אפשר לחפש שוויון דומה ליותר משני מספרים (זהים או שונים)?

שלב ד'. המשך בחקר ודווח על התוצאות החדשות שקבלת.
מהו מספר השוויונות שקיבלת? כיצד ניתן למיין אותם?
מהם הנושאים המתמטיים הרלוונטיים לפעילות החקר שביצעת?
שלב ה'. האם התוצאות שקיבלת הפתיעו אותך? האם רכשת ידע מתמטי חדש? האם הכלים המתמטיים שבהם השתמשת בהלך חקר היו ידועים לך קודם? מהן מיומנויות החשיבה שעזרו לך בתהליך החקר?

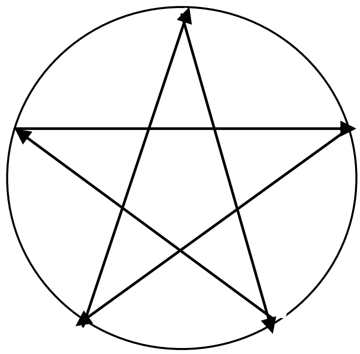
משימה 2. "כוכבים (ולא רק) בעיגול" (משימות, 1993)

על המעגל מסומנות חמש נקודות שמחלקות אותו לחמישה חלקים שווים. אם נחבר כל נקודה שניה החל מנקודה 1, נקבל כוכב (ראה ציור). נסמן כוכב כזה (5,2).

1

5 2

4 3



שלב א'. בנה צורות (5,n) עם n שונה מ – 2.

האם תמיד מקבלים את הכוכב? האם תמיד מקבלים את אותו הכוכב?

אם לא, אילו צורות אחרות קיבלת?

שלב ב'. המשך את חקירתך למקרה של חלוקת המעגל למספר חלקים זהים שונה מ-5. השתמש בסימון דומה. האם תוצאות שקיבלת זהות למקרה הראשון או לא? האם יש תוצאות חדשות?

שלב ג'. מהו התנאי (מהם התנאים) לקבלת צורות זהות בתהליכי בנייה עם n ואם מספרי נקודות חלוקה שונים?

הצע שאלות נוספות והעלה השערות. תכנן את המשך החקר.

שלב ד'. סדר את תוצאות החקר ונסה לבטא אותן בצורה כללית באמצעות תכונות הזוג (m ,n). מהם הנושאים האריתמטיים והנושאים הגיאומטריים הרלוונטיים לחקר? בנה תרשים זרימה למהלך החקר שביצעת.

משימה 3. "בנייה" של מספרים טבעיים

ידוע כי כל מספר זוגי הוא סכום של שני מספרים זהים כגון: 5+5=10, 9+9=18 וכו'.

א. מה ניתן להשיג לגבי מספרים אי-זוגיים? מהם שני המחוברים "הקרובים ביותר", מהם בנוי מספר אי-זוגי? איך קוראים למספרים כאלה?

ב. כאשר רוצים לקבל מספר מסוים משלושה מספרים זהים – מתי אפשרי הדבר? האם אפשר לקבל אותו מספר משלושה מספרים עוקבים?

ג. מהם המספרים שהם סכום של 4 (או 5, או 6 וכו') מספרים זהים?

ד. מהם המספרים שהם סכום של 4 (או 5, או 6 וכו') מספרים עוקבים?

ה. "שאלת רפלקציה": האם שאלות ג' וד' דומות באמת?

משימה 4. הצגת מספרים כסכום של מספרים עוקבים.

במסגרת פעילות מספר 3 נחקרו סכומים של מספרים עוקבים. ניתן לנסח גם בעיה הפוכה למשימה קודמת: כיצד אפשר להציג מספר טבעי כסכום של מספרים עוקבים? על סמך התוצאות שהתקבלו, כל מספר אי-זוגי, למשל, הוא סכום של שני מספרים עוקבים. מצד שני, את מספר 9 אפשר גם להציג כסכום של שלושה מספרים עוקבים: 9=4+3+2. חקרו את המצב לפי התוכנית הבאה:

בחרו בכמה מספרים טבעיים והציגו כל אחד מהם כסכום של מספרים עוקבים בכל הדרכים האפשריות. דווחו על האסטרטגיה שבה השתמשתם כדי למצוא את כל ההצגות האפשריות.

האם כל מספר שבדקתם ניתן להציג כסכום של מספרים עוקבים?

האם בין הצגות של אותו מספר טבעי קיבלתם הצגות קשורות זו בזו, לא צפויות, הצגות באמצעות מספרים לא רק טבעיים וכו'?

נסחו השערה לגבי מספר הדרכים שניתן להציג מספר טבעי כסכום של מספרים עוקבים. במה תלוי מספר זה? כיצד ניתן לדעת אותו לכל מספר טבעי נתון?

נסחו אסטרטגיה לחיפוש כל אחת מהדרכים להציג מספר טבעי כסכום של מספרים עוקבים.

משימה 5. על התייקרות והוזלה.

המחיר ההתחלתי של המוצר היא 100 שקל.

המוכר הוריד את המחיר ב-10% ואחר כך העלה אותו ב-10%. הוא טוען, שבכך הושב המצב לקדמותו. ברור, כי הדבר איננו נכון.

מהו המחיר הסופי של המוצר?

אם סדר השינויים במחיר יהיה הפוך, מה יהיה המחיר הסופי של המוצר?

בתוצאה שקיבלתם, מה תלוי ומה אינו תלוי במחיר המקורי של המוצר?

מהן ההכללות האפשריות לתוצאה שקיבלתם? נסו להגיע למסקנה כללית?

כיצד לדעת מהו היחס בין המחיר הסופי לבין המחיר המקורי אחרי תהליך דומה (עליה וירידה באותו מספר באחוזים)?

משימה 6. מוצרים יקרים וזולים: על נתונים מיותרים וחסרים (אולחניק, 1988). אקפולקו

פתור את הבעיה: "למשרד קנו עטים משני סוגים: יקרים במחיר של 5 ש"ח לעט וזולים יותר בעלות של 2 ש"ח לעט. שלמו עבור העטים סה"כ 38 ש"ח. כמה עטים מכל סוג קנו, אם ידוע שעטים יקרים קנו יותר מאשר זולים?"

כמה נעלמים יש בבעיה הנ"ל? כמה משוואות אשפר להרכיב? האם יש תנאים נוספים שמאפשרים להגיע לפתרון חד-משמעי?

כמה פתרונות נוספים קיימים לבעיה ללא ההגבלה האחרונה?

הצע הכללות אפשריות לבעיה? האם קיים פתרון לכל סכום קנייה ולכל מחיר של הפרטים?

משימה מס' 7. מרובעים חסומים בריבוע (סיניצקי, 2000b).

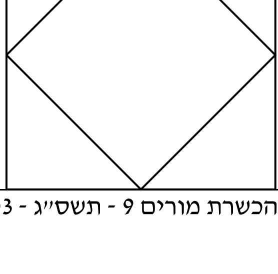
<u>תהליך בנייה א'</u>. כל צלע של ריבוע נתון מחולקת לשני קטעים שווי אורך. נחבר את אמצעי הצלעות.

מה ניתן להגיד על המרובע שהתקבל?

מה ניתן לאמר על שטח המרובע שהתקבל?

<u>שאלות לדיון.</u>

הצע הכללות לגבי מרובעים אחרים?



הצע הכללות לגבי "צורות מקור" משוכללות אחרות?

האם אפשר למצוא יחס בין שטח המצולע הבנוי ושטח המצולע הנתון?

תהליך בנייה ב'.

נחלק כל צלע של ריבוע נתון לשלושה קטעים שווי אורך.

בכמה אופנים שונים אפשר לחבר את נקודות החיתוך (כאשר בוחרים נקודת חלוקה אחת מכל צלע)?

מהם המרובעים שיתקבלו? מתי שני מרובעים בנויים יהיו חופפים?

מהו הקריטריון לקבלת ריבוע?

מהו השטח של כל אחד מהמרובעים? מהו המרובע בעל השטח המינימלי? מהו המרובע בעל השטח המקסימלי?

האם התקבלו מרובעים שווי-שטח שאינם חופפים?

אילו תכונות נוספות שכדאי לבדוק/ לחקור?

שאלות לדיון.

הצע הכללות לתהליכי בנייה א', ב' בריבוע הנתון?

האם קיים קשר בין המרובעים שהתקבלו בתהליכי בנייה שונים?

הצע שאלות נוספות לגבי שטחים של המרובעים החסומים בריבוע הנתון?

מהן המסקנות מהתוצאות, כפונקציה של מספר נקודות החיתוך?

מהם הנושאים המתמטיים בהם השתמשתם לפתרון השאלות?

משימה מס' 8. ריבועים גדולים מריבועים קטנים (סיניצקי, 2001b).

נתבונן בשוויון מספרי: $3^2 + 4^2 = 5^2$

אפשר לפרש אותו כ - "איזון" בין מספרים ריבועיים עוקבים

האם קיימים עוד סכומי מספרים ריבועיים עוקבים "שמתפצלים" לסכומים זהים?

כיצד אפשר לחפש פתרון נוסף ללא שימוש באלגברה?

המשיכו את תהליך החקר. באיזו דרך בחרתם?

האם יש פתרונות בלתי צפויים?

מהי משמעות הפתרון מבחינה קוגניטיבית?

מהם הכיוונים האפשריים להכללה ולהמשך החקר?

מהו כיוון ההכללה שבחרתם? מהן השיקולים לבחירת הכיוון?

מהן התוצאות שהספקתם לקבל?

מהו הידע המתמטי הקודם שבו השתמשת?

מהם הכלים הקוגניטיביים שהפעלת?

נספח 2. תיאור תהליכי התמודדות עם משימת חקר מספר 1.

טבלה 1. מהלך הטיפול בבעיה מס' 1 של סטודנטית א'.

תיאור כללי של השלב	תחום המספרים	כלי קוגניטיבי לביצוע	מסקנה
בדיקה עבור שני מספרים זהים N	מספרים טבעיים, $N>2$	ניסוי מספרי	גידול ההפרש, יש לשנות כיוון
	N שלם, $N<2$	ניסוי מספרי מכוון	מציאת פתרון נוסף צורך הרחבת התחום
	מספרים לא שלמים	ניסוי מספרי אקראי	אין יותר פתרונות (השערה)
	גישה אלגברית		אין יותר פתרונות (הוכחה)
שלושה מספרים זהים	מספרים עבורם מתקיים שוויון לזוג	בדיקה מספרית	פתרון עבור 0
יותר משלושה מספרים זהים	בדיקה מספרית ל – 0 לכמות מספרים כלשהי		הכללה: שוויון לכל כמות של מספרי 0.
	גישה אלגברית		פתרון אנליטי לכל כמות של מספרים זהים
שני מספרים שונים	אחד המספרים – מספר טבעי	פתרון משוואה ליניארית	השערה: לכל מספר טבעי, פרט ל – 1, מתאים מספר לא שלם יש אינסוף פתרונות

טבלה 2. מהלך הטיפול בבעיה מס׳ 1 של סטודנטית ב׳.

<table>
<tr><th>תיאור כללי של השלב</th><th>תחום המספרי</th><th>כלי קוגניטיבי לביצוע</th><th>מסקנה</th></tr>
<tr><td rowspan="3">בדיקה עבור שני מספרים זהים N</td><td>מספרים טבעיים, $N>2$</td><td>ניסוי מספרי</td><td>גידול ההפרש, יש לבדוק ל- 1 ו- 0.</td></tr>
<tr><td>$N=0$ או $N=1$</td><td>סינון אפשרויות</td><td>גילוי פתרון נוסף</td></tr>
<tr><td>מספרים שליליים</td><td>שימוש בידע קודם</td><td>אין פתרונות בתחום</td></tr>
<tr><td>ניסוי עם שני מספרים שונים</td><td>שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים</td><td>ניתוח כללי של המצב</td><td>דחיית השאלה לשלב מאוחר יותר של החקר</td></tr>
<tr><td rowspan="3">חזרה לבדיקה עבור שני מספרים זהים N</td><td>שברים אמיתיים</td><td>ניסוי, מסקנה כללית לתחום</td><td>אין פתרונות בתחום</td></tr>
<tr><td>מספרים מעורבים</td><td>ניסוים והשוואת התוצאות</td><td>יש סיכוי לשוויון, צריך לבדוק באמצעות גישה אלגברית</td></tr>
<tr><td colspan="2">ניתוח משוואה אלגברית, הצבת פתרונות קיימים</td><td>אין פתרונות אחרים</td></tr>
<tr><td>שני מספרים שונים</td><td colspan="2">פתרון אנליטי ויישומיו בתחומים שונים</td><td>סימטרייה של הפתרונות, הגבלות</td></tr>
<tr><td>שלושה מספרים שונים</td><td>מספרים שלמים קרובים ל- 0</td><td>ניסויים אקראיים</td><td>פתרון $\{0,0,0\}$
פתרון $\{1,2,3\}$
קבלת פתרון נוסף על סמך סימטרייה</td></tr>
</table>

טבלה 3. מהלך הטיפול בבעיה מס׳ 1 של סטודנטית ג׳.

<table dir="rtl">
<tr><th>תיאור כללי של השלב</th><th>תחום המספרי</th><th>כלי קוגניטיבי לביצוע</th><th>מסקנה</th></tr>
<tr><td>שני מספרים שונים</td><td colspan="2">גישה אלגברית</td><td>פתרון כללי לזוגות
ניסוח אנליטי לשלושה מספרים</td></tr>
<tr><td rowspan="2">שלושה מספרים שווים</td><td rowspan="2">מספרים שלמים</td><td>העברת הפתרון לגבי ה- 0</td><td>פתרון נוסף עם ה- 0</td></tr>
<tr><td>גישה אלגברית וניתוח התוצאה</td><td>קבלת פתרון נוסף ודירוגו</td></tr>
<tr><td rowspan="2">שלושה מספרים שונים</td><td>מספרים שלמים</td><td>ניסוי וסינון אפשרויות בשילוב גישה אלגברית</td><td>גילוי פתרונות נוספים עם המספר 1, המספר 2, ...
קבלת קבוצת פתרונות $\{n,0,-n\}$</td></tr>
<tr><td>מספרים רציונלים</td><td>קביעת הגבלה וסינון אפשרויות</td><td>קבלת שוויון לשלושה מספרים כאשר שנים מהם מספרים שלמים</td></tr>
<tr><td rowspan="2">יותר משלושה מספרים</td><td colspan="2">הגבלה (מספרים זהים) וגישה אלגברית</td><td>פתרון אנליטי לכל כמות של מספרים זהים</td></tr>
<tr><td>מספרים שלמים</td><td>ניתוח ע״י העברה של דגמים מהפתרון הקודם</td><td>שאלות נוספות ואופציות לכיוונים אפשריים לחיפוש פתרונות נוספים</td></tr>
</table>