



מגמת הנדסת אלקטרוניקה ומחשבים

מערכות ספרתיות

תוכן עניינים

2	דבר המפמ"ר.....
3	פתח דבר.....
4	פרק 1 - שיטות ספירה.....
55	פרק 2 - מושגי יסוד בלוגיקה.....
65	פרק 3 - יסודות האלגברה הבוליאנית.....
102	פרק 4 - פונקציות בוליאניות ופישוטן.....
149	פרק 5 - מערכות צירופים והדרכים למימושן.....
	פרק 6 - תכנון ומימוש של מערכות צירופים
203	שימושיות.....
263	פרק 7 - מערכות עקיבה.....

דבר המפמ"ר

אנו עומדים בפתחה של תקופה של חידושים טכנולוגיים, אתגרים חשיבתיים והתנסויות מרתקות. במגמת הנדסת אלקטרוניקה ומחשבים אתם תחשפו לסביבת למידה מתקדמת ומשמעותית. זכרו, כי אתם חלק חשוב מהמחר ובידכם הכוח והידע לקחת חלק בפיתוח דור העתיד.

הפקדתי בידי צוות מורי המגמה, אחריות רבה, לחשוף אתכם לידע חדשני, להנחות אתכם בפרויקטים מאתגרים ולהוביל אתכם להצלחה.

שלומי אדמונד אחנין

מפמ"ר מגמות הנדסת אלקטרוניקה ומחשבים ומערכות בקרה ואנרגיה

פתח דבר

המקצוע "מערכות ספרתיות" הוא מקצוע תשתית במגמת "הנדסת אלקטרוניקה ומחשבים" בבתי הספר התיכונים, בנתיב הטכנולוגי. חשיבותו של המקצוע רבה במיוחד לנוכח ההתפתחות העצומה שחלה בענפי האלקטרוניקה הספרתית, כגון מכשור ספרתי, בקרה ספרתית ומחשבים.

מהדורה מעודכנת זו מבוססת על הקורסים "מערכות ספרתיות" ו"תוכן לוגי" שפיתח המרכז לטכנולוגיה חינוכית בעבור בית הספר לטכנולוגיה של האוניברסיטה הפתוחה, ועל ספרי **מיתוג ומערכות ספרתיות** (כרכים א, ב, 1992). הספר מותאם ברמתו, בהיקפו ובתוכנו לתכנית הלימודים החדשה של מקצוע "מערכות ספרתיות" במסגרת הרפורמה בנתיב הטכנולוגי.

התוכן מוגש בצורה בהירה, וכולל הסברים ברורים, בסגנון ובשפה המותאמים ללומדים במגמת אלקטרוניקה ומחשבים. הספר כולל גם תרגילים רבים, וכן פתרונות מפורטים לתרגילים ולשאלות ברמת בחינות הבגרות. פתרונות מפורטים נוספים נמצאים באתר המגמה.

חלק מהנושאים המופיעים בגופן קטן יותר הם חומר רשות.

אנו מקווים שהתלמידים יפיקו את מלוא התועלת מספר לימוד זה.

צוות הפיתוח

פרק 1 - שיטות ספירה

1.1 מבוא

הורגלנו לחשוב על מספרים בשיטת הספירה העשרונית. הבחירה בשיטה זו, שבבסיסה היא סופרת עצמים בקבוצות של 10, נבעה מצפייה במבנה כף היד האנושית: מעובדת היותו מצוידים בעשר אצבעות ידיים, ומן ההרגל לספור לפיהן.

בימינו נפוצות מאוד מערכות חישוב אלקטרוניות, שהבולטת ביניהן היא המחשב. במערכות אלה, החישובים נערכים בשיטת ספירה המכונה **שיטה בינארית** (System Binary). שיטה זו מתאימה במיוחד לתיאור התנהגותם של רכיבים אלקטרוניים העשויים להימצא באחד משני מצבים אפשריים בלבד, כגון "זורם זרם ברכיב" או "לא זורם זרם ברכיב".

נהוג לסמן מצבים אפשריים אלה בסמלים 0 או 1. סמלים אלה הם היחידים בשיטת הספירה הבינארית. קבוצת ספרות בינאריות עשויה להיראות למשל כך: 101101.

קבוצה כזו היא מספר **בינארי** שאפשר לתרגם (או להמיר) לשפה העשרונית המוכרת לנו. כך, למשל, נראה מאוחר יותר שהייצוג העשרוני של המספר הבינארי 101101 הוא 45.

במספרים בינאריים אפשר להשתמש לא רק לייצוג **מידע**; אפשר גם לבצע חישובים בעזרת האריתמטיקה הבינארית, ממש כשם שמבצעים חישובים באמצעות האריתמטיקה העשרונית.

שתי השיטות שהזכרנו, שיטת הספירה העשרונית ושיטת הספירה הבינארית הן **שיטות ספירה מיקומיות**. ערכה של כל ספרה בשיטות אלה נקבע על פי **מיקומה** במספר.

כל שיטת ספירה נסמכת על מספר המכונה **בסיס השיטה** או **בסיס הספירה** ומסומן באות *b*. למשל: בסיס השיטה העשרונית הוא 10; בסיס השיטה הבינארית הוא 2. על משמעות המספר *b* נדון בהמשך. כאן נציין רק שמספר הספרות, בכל שיטת ספירה, שווה לבסיס השיטה. למשל, בשיטה העשרונית קיימות עשר ספרות, ובשיטה הבינארית - שתי ספרות.

פרק זה נועד בעיקרו לתיאור השיטה הבינארית וללימוד האריתמטיקה שלה. בהמשך הפרק נכיר שיטות ספירה נוספות, הקרובות לשיטה הבינארית.

לשם הבנה יסודית של הנושא וכדי להמחיש את ההקבלה (האנלוגיה) בין שיטת הספירה הבינארית והשיטה העשרונית, המוכרת לנו היטב, נתחיל את הדיון בתכונותיה של השיטה העשרונית.

1.1.1 שיטת הספירה העשרונית

בסיס השיטה העשרונית הוא, כאמור, המספר 10 ($b=10$). פירושה של קביעה זו הוא שבשיטת הספירה העשרונית קיימים עשרה סמלים, או עשר ספרות, והן:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

עשר ספרות אלה מייצגות, בשיטת הספירה העשרונית, את המספרים השלמים מאפס עד תשע.

כל מספר שלם וחיובי, N , ייוצג בשיטה העשרונית, באופן חד-ערכי, על ידי סדרה של ספרות עשרוניות. כך לדוגמה, המספר $N = 5827$ ניתן לרישום כסכום של חזקות בדרך זו:

$$\begin{aligned} 5827 &= 5000 + 800 + 20 + 7 \\ &= 5 \times 1000 + 8 \times 100 + 2 \times 10 + 7 \times 1 \\ &= 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \end{aligned}$$

המשמעות של ייצוג זה היא **סכום של חזקות 10**, וכל חזקה מוכפלת בספרה מתאימה.

אנו רואים שהספרה 7 במספר N מייצגת שבע **יחידות**, הספרה 2 מייצגת שתי **עשרות**, הספרה 8 מייצגת שמונה **מאות** ואילו הספרה 5 מייצגת חמישה **אלפים**.

חזקות 10, המתאימות לספרות השונות, מסמנות את **הערכים המיקומיים** של הספרות, להבדיל מערך העצמי של הספרות שהוא הערך של כל ספרה כשלעצמה. כך:

$$\begin{aligned} 10^0 &\text{ הוא הערך המיקומי של הספרה 7 במספר } 5827. \\ 10^1 &\text{ הוא הערך המיקומי של הספרה 2 במספר } 5827. \end{aligned}$$

 **תרגול**

העתיקו למחברת את שתי השורות הבאות והשלימו את החסר.

_____ הוא הערך המיקומי של הספרה 8 במספר 5827.

10^0 - _____ הוא הערך המיקומי של הספרה _____ במספר 5827.

חשבו בעצמכם: מדוע נקרא הערך הזה מיקומי?

תשובה: ערך זה נקרא מיקומי היות שתרומתו לערך המספר כולו נקבעת על פי המיקום של הספרה בתוך המספר.

גם מספר עשרוני, כולל שבר כמו לדוגמה: $M=293.468$, אפשר לייצג כסכום של חזקות. כיצד נעשה זאת? הקדישו רגע למחשבה לפני שתקראו את הפתרון שלהלן.

ייצוגו של המספר M הכולל שבר יהיה כך:

$$\begin{aligned} M &= 200 + 90 + 3 + 0.4 + 0.06 + 0.008 \\ &= 2 \times 100 + 9 \times 10 + 3 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100} + 8 \times \frac{1}{1000} \\ &= 2 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

בדוגמה זו לשבר יש שלושה מקומות עשרוניים לאחר הנקודה העשרונית.

 תרגול

שאלה 1.1

מצאו את ערכה העצמי, את ערכה המיקומי של הספרה 7 במספרים העשרוניים הבאים:

- | | |
|-----------|------------|
| א. 4782 | ג. 408.87 |
| ב. 273589 | ד. 0.02357 |

האריתמטיקה של השיטה העשרונית - כלומר הכללים לביצוע פעולות החיבור, החיסור, הכפל והחילוק בין מספרים עשרוניים - ידועה, ולכן לא נדון בה כאן. רצוי לזכור כללים אלה גם לגבי מספרים המיוצגים בשיטות ספירה אחרות, שבהן יש כללים מקבילים.

1.1.2 הצורה הכללית לייצוג מספרים עשרוניים שלמים

ראינו קודם דוגמאות של ייצוג מספרים עשרוניים באמצעות כתיבתם כסכומים של חזקות 10. נתאר עתה את הצורה הכללית של הייצוג העשרוני. נסמן במספר עשרוני שלם ב- N , וכל ספרה עשרונית המופיעה בו ב- a_i (האות i היא אינדקס המציין את מיקום הספרה בתוך המספר). מבנהו של מספר N בעל n ספרות עשרוניות יתואר כך:

$$N = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_i \dots a_1 a_0$$

a_0 היא הספרה הימנית ביותר ו- a_{n-1} היא הספרה השמאלית ביותר. נראה עתה כיצד ניתן לייצג מספר זה כסכום של חזקות של 10.

במקום השמאלי ביותר מוצגת **הספרה המשמעותית ביותר** (MSD – Most significant Digit) והיא תוכפל בחזקה הגבוהה ביותר של 10, כלומר ב- 10^{n-1} (לדוגמה: אם $n=4$, כלומר אם למספר N שבחרנו יש 4 ספרות, תהיה החזקה הגבוהה ביותר $10^3 = 10^{n-1}$);

במקום הימני ביותר במספר מוצגת **הספרה הפחות משמעותית** (LSD – Least significant Digit) והיא תוכפל בחזקה הנמוכה ביותר של 10, כלומר ב- 10^0 כאשר מדובר במספר שלם. ייצוגו הכללי של המספר העשרוני השלם N יהיה לפיכך:

$$N = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_i \cdot 10^i + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

(a_i היא ספרה בין 0 ל-9).

ייצוג כללי זה מתאר את המספר N כסכום של חזקות של 10. המספר 10 הוא כאן בסיס הספירה.



שאלה 1.2

כתבו כסכום של חזקות של 10 את המספרים העשרוניים הבאים:

- א. 25408
- ב. 280
- ג. 342×10^2

1.2 ייצוג מספרים שלמים לפי בסיסים 2 ו-16

בסעיף 1.1.2 ראינו כי הצגת מספר עשרוני שלם, באורך n ספרות, היא:

$$N_{10} = (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_{10}$$

ערכו של מספר כזה הוא:

$$N_{10} = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

נכליל עתה את התיאור, כך שיתאים לכל מספר N_b^* בעל n המתואר בשיטת ספירה שבסיסה b (שלם, חיובי, גדול מ-1).

$$N_b = (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_b$$

$$= a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$

* בדומה לסימון הבסיס העשרוני, מציינת האות b שהמספר N רשום לפי בסיס כלשהו b . מקובל שאם לא רשום כל בסיס ליד מספר נתון ולא נאמר אחרת - הכוונה למספר המוצג בבסיס העשרוני.

להלן דוגמה לשימוש במשוואה הרשומה עבור בסיס 2, שבו מופיעים מספרים בינאריים:

$$n = 5 \quad b = 2$$

$$N_2 = (101110)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

כדי לכתוב מספר לפי בסיס b אנו זקוקים ל- b סימנים המתארים ספרות. לדוגמה, כדי לרשום מספר לפי בסיס 6 אנו זקוקים ל-6 ספרות:

0 1 2 3 4 5

בסדרת סימנים זו חייבת להופיע ספרה המייצגת אפס פריטים (או לא-כלום פריטים). לעומת זאת, בסדרה זו אין ספרה המייצגת את הבסיס. אילו הייתה ספרה כזו (במקרה שלנו הספרה 6), הסדרה הייתה מאבדת את התכונה של יחידות ההצגה, כלומר: היה אפשר להציג את הבסיס הן באמצעות ספרה והן באמצעות הצירוף 10. כדי להימנע מכך, מייצגים את בסיס הספירה רק באמצעות הצירוף 10.

כתיבת מספרים לפי בסיס 16 נקראת **שיטה הקסאדצימלית** (Hexadecimal). כדי לרשום מספר לפי בסיס 16 אנו זקוקים ל-16 ספרות; כיוון שאנו רגילים להשתמש במערכת סימנים הכוללת 10 סמלים, יחסרו לנו 6 סמלים, ואותם נצטרך להמציא. נהוג להשתמש באותיות הראשונות של האלף-בית הלטיני:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	
										↑	↑	↑	↑	↑	↑	
										(ערכים בבסיס 10)	10	11	12	13	14	15

שוב, המספר 16_{10} , שהוא בסיס הספירה ההקסאדצימלית, אינו נמנה עם ספרותיו של בסיס 16. כדי לכתוב אותו בבסיס הקסאדצימלי, נשתמש בצירוף 10_{16} .

דוגמה 1-1

מצאו את הייצוג העשרוני של המספר $A = 11011101_2$

פתרון

$$\begin{aligned}
 A &= 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 1 \times 128 + 1 \times 64 + 0 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 \\
 &= 221_{10}
 \end{aligned}$$

כפי שאפשר להבחין מתוך פתרון דוגמה 1-1, כל מספר הרשום בשיטה הבינארית מופיע כסדרה של סיביות, כלומר סדרה של ספרות 0 או 1. מכיוון שהשיטה הבינארית היא שיטה מיקומית, מייחסים **ערך מיקומי** לכל אחת מן הספרות המופיעות במספר בינארי.

ערכים מיקומיים אלה הם חזקות של הבסיס $b = 2$, בדיוק כפי שהערכים המיקומיים בבסיס 10 הם חזקות של 10. הדבר מודגם באיור 1.1, שבו רשמנו את המספר העשרוני 37 בבסיס 2, ומעל כל ספרה בינארית רשמנו את הערך המיקומי שלה.

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	ערך מקומי
32	16	8	4	2	1	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
1	0	0	1	0	1	$= 67_{10}$

לתועלת הלומדים אנו מצרפים כאן שתי טבלאות: האחת (טבלה 1.1) כוללת את הייצוג העשרוני של חזקות המספר 2, והאחרת (טבלה 1.2) את הייצוג הבינארי של כמה מספרים עשרוניים.

הייצוג העשרוני	החזקה של 2
2^{10}	1024
2^9	512
2^8	256
2^7	128
2^6	64
2^5	32
2^4	16
2^3	8
2^2	4
2^1	2
2^0	1

טבלה 1.1
מספר בינארי והערכים המיקומיים של ספרותיו

המספר העשרוני	המספר הבינארי				
	משקל כל ספרה במספר הבינארי				
0	16	8	4	2	1
1					0
2				1	1
3				1	0
4			1	0	1
5			1	0	0
6			1	1	1
7			1	1	0
8		1	0	0	1
9		1	0	0	0
10		1	0	1	1
11		1	0	1	0
12		1	1	0	1
13		1	1	0	0
14		1	1	1	1
15		1	1	1	0
16	1	0	0	0	1
17	1	0	0	0	0
18	1	0	0	1	1
19	1	0	0	1	0
20	1	0	1	0	1
21	1	0	1	0	0
22	1	0	1	1	1
23	1	0	1	1	0
24	1	1	0	0	1
25	1	1	0	0	0

טבלה 1.2

הייצוג הבינארי של המספרים העשרוניים בין 0 ל-25

דוגמה 1-2

מצאו את הייצוג העשרוני של המספר $B = 9A1D_{16}$

פתרון

$$\begin{aligned}
 B &= 9 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 13 \times 16^0 \\
 &= 9 \times 4096 + 10 \times 256 + 1 \times 16 + 13 \times 1 \\
 &= 39453_{10}
 \end{aligned}$$

תרגול

שאלה 1.3

ציינו את הערך המיקומי של הספרות המודגשות:

- א. 1011011_2
 ב. 11010110_2

שאלה 1.4

מצאו את הייצוג העשרוני של המספרים הבאים:

- א. 1101011_2
 ב. 10001001_2

שאלה 1.5

מצאו את הייצוג העשרוני של המספרים הבאים:

- א. $A8FF_{16}$
 ב. $532A_{16}$

שאלה 1.6

בדקו אם אין טעויות במספרים הבאים, ואם אפשר להפוך אותם למספרים עשרוניים.

- א. 11111_2
 ב. 1020_2
 ג. $8F1_{16}$

שאלה 1.7 – רשות

ממציא השחמט ביקש תמורת המצאתו גרגיר חיטה אחד כנגד המשבצת הראשונה של הלוח, 2 גרגירים כנגד השנייה, 4 כנגד השלישית, וכך הלאה - בכל משבצת פי שניים גרגירים לעומת

קודמתה. התוכלו לכתוב, בצורה נוחה, מהו מספר הגרגירים שביקש ממציא השחמט כנגד המשבצת האחרונה (המשבצת ה-16)?

רמז: כתבו תחילה את מספר הגרגירים ב-10 המשבצות הראשונות של לוח השחמט (כמספר בינארי). בשלב הבא נסו למצוא את הפתרון.

1.3 העברת מספרים שלמים מבסיס 10 לבסיסים 2 ו-16

בסעיף הקודם עסקנו בייצוג מספרים לפי בסיס כלשהו, וראינו כיצד הופכים אותם למספרים עשרוניים. עתה נלמד לבצע את הפעולה ההפוכה, כלומר: כיצד לייצג מספר עשרוני בבסיס אחר. לשם כך, נחזור אל המשוואה שבעזרתה אפשר לבטא מספר בבסיס כלשהו.

$$N_b = a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$

נשנה את צורת הביטוי שלעיל מבלי לשנות את ערכו; נעשה זאת על ידי הוצאת הגורם המשותף b אל מחוץ לסוגריים. הנוסחה שתתקבל תהיה:

$$* N_b = (a_{n-1} \cdot b^{n-2} + a_{n-2} \cdot b^{n-3} + \dots + a_2 \cdot b + a_1)b + a_0$$

קל לראות שחלוקת המספר השלם N_b ב- b תיתן כמנה את הביטוי שבסוגריים, ואילו השארית תהיה a_0 . שארית זו היא הספרה הפחות משמעותית במספר N_b .

אם ניקח את המנה, שהיא התוצאה של החילוק הראשון

$$\begin{aligned} & a_{n-1} \cdot b^{n-2} + a_{n-2} \cdot b^{n-3} + \dots + a_2 \cdot b + a_1 \\ & = (a_{n-1}b^{n-3} + a_{n-2}b^{n-4} + \dots + a_2) \cdot b + a_1 \end{aligned}$$

ונחלק אותה שוב ב- b , בדרך שתוארה קודם, נקבל כשארית a_1 . הפעם מייצגת השארית a_1 את הספרה שערכה המיקומי שווה b^1 (ראו ביטוי מקורי למעלה).

חלוקה נוספת של התוצאה ב- b תיתן כשארית את a_2 . זו הספרה שערכה המיקומי b^2 . כך נמשיך את התהליך עד שנקבל, כתוצאה מהחלוקה ב- b , את המנה 0 ואת השארית a_{n-1} , שהיא הספרה המשמעותית ביותר.

דוגמה 1-3

במהלך התצפית גילו קציני המודיעין 147 כלי שריון. תפקידם להצפין את המספר בשיטה בינארית, כלומר לכתוב את המספר 147 לפי בסיס 2. לשם כך יש למצוא מהן הספרות המסמלות, לפי בסיס 2, את המספר העשרוני 147.

פתרון

לפי המהלך שתיארנו לעיל, נבצע חלוקות חוזרות ונשנות של המספר 147 ב-2. השאריות שיתקבלו יהיו את ספרות הייצוג בבסיס 2, החל בספרה הפחות משמעותית.

* b^0 שווה 1, לכן ויתרנו עליו באיבר האחרון.

הערך המיקומי של השארית	ספרת הייצוג לפי בסיס 2	השארית	המנה	
2^0	a^0	1	73	147:2
2^1	a^1	1	36	73:2
2^2	a^2	0	18	36:2
2^3	a^3	0	9	18:2
2^4	a^4	1	4	9:2
2^5	a^5	0	2	4:2
2^6	a^6	0	1	2:2
2^7	a^7	1	0	1:2

מכאן אפשר לרשום:

$$147_{10} = 10010011_2$$

בדיקה:

$$1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 =$$

$$= 128 + 16 + 2 + 1 = 147_{10}$$

רישום מקוצר ושימושי מתואר כך:

	2
147	1
73	1
36	0
18	0
9	1
4	0
2	0
1	1

בעמודה השמאלית רשמנו את תוצאות החילוק בשניים; בעמודה הימנית מופיעות השאריות; התוצאה נרשמת לפי הסדר שמורה החץ, כלומר 10010011_2 .

דוגמה 1-4

קציני המודיעין (מהיחידה שבדוגמה הקודמת) גילו 1448 לוחמים של האויב ומבקשים להצפין מידע זה לפי בסיס 16.

פתרון

נרשום את הפתרון ברישום מקוצר, כלומר:

	16
1448	8
90	A
5	5

ונקבל:

$$1448_{10} = 5A8_{16}$$

בדיקה:

$$5A8_{16} = 5 \times 16^2 + 10 \times 16 + 8 \times 1 = 1280 + 160 + 8 = 1448_{10}$$

תרגול 

שאלה 1.8

הפכו את המספרים העשרוניים הבאים למספרים בינאריים:

- א. 29
- ב. 83
- ג. 196
- ד. 73

שאלה 1.9

הפכו את המספרים העשרוניים הבאים למספרים הקסאדצימליים:

- א. 1286
- ב. 3576
- ג. 4657

שאלה 1.10 – רשות

אדם מקבל שאלון ובו 10 שאלות. על כל שאלה עליו לענות "הן" או "לאו" בלבד. ברצוננו לערוך רשימה של שמות האנשים שענו על השאלון במלואו, וגם לדעת מה הייתה תשובתם **לכל** אחת

מהשאלות. לאחר שנרשום את כל שמות האנשים, נבקש לרשום ליד כל שם מספר עשרוני אחד שיכיל את כל המידע המבוקש. כיצד נעשה זאת?

שאלה 1.11 – רשות

עבור איזה בסיס z קיים:

א. $2_{10} \times 2_{10} = 100_z$

ב. $2_z \times 2_z = 11_z$

1.4 מעבר מקוצר בין ייצוג בינארי והקסאדצימלי של מספרים

רישום של מספרים בינאריים דורש לעתים שימוש במספר רב של ספרות בינאריות (סיביות). נוכל לכתוב אותן במספרים הקסאדצימליים. הדבר נעשה על ידי חלוקת המספר ל-"רביעיות" והפיכה של כל רביעייה לספרה הקסאדצימלית.

דוגמה 1-5

נתון המספר הבינארי 1101010001111001000_2 .

הפכו אותו למספר הקסאדצימלי.

פתרון

נחלק את המספר לרביעיות, מימין לשמאל:

110, 1010, 0011, 1100, 1000

נשלים אפס משמאל לשלישייה, השמאלית ביותר, ונקבל 5 רביעיות.

0110, 1010, 0011, 1100, 1000

נהפוך כל אחת מהרביעיות למספר הקסאדצימלי ונקבל:

0110	1010	0011	1100	1000
6	A	3	C	8

כלומר, המספר הבינארי בייצוג הקסאדצימלי הוא:

$6A3C8_{16}$

תרגול **שאלה 1.12**

כתבו את המספר 1985 בשיטה הבינארית על ידי הצגתו תחילה בשיטה ההקסאדצימלית.

שאלה 1.13

כתבו את המספר הבינארי 110101110101_2 בשיטה העשרונית על ידי כתיבתו תחילה בשיטה ההקסאדצימלית.

שאלה 1.14

כתבו את המספר ההקסאדצימלי $3E1B_{16}$ בשיטה הבינארית.

שאלה 1.15

העתיקו למחברת והשלימו את הטבלה הבאה:

בסיס עשרוני	בסיס בינארי	בסיס הקסאדצימלי
492	X	X
X	100101110101	X
X	X	2D4F

שאלה 1.16

ערכו את טבלת הייצוג הבינארי של 16 הספרות ההקסאדצימליות.

1.5 חיבור וחסור של מספרים בינאריים

למדנו קודם דרכי ייצוג של מספרים שבסיסי הספירה שלהם שונים מהבסיס העשרוני; להדגשה יתרה זכה הבסיס הבינארי. נלמד עתה לבצע את פעולות החשבון הבסיסיות על מספרים המיוצגים בבסיס הבינארי. תחילה יידונו פעולות אלה כמספרים חיוביים בלבד, ולאחר מכן - במספרים חיוביים ושליילים.

1.5.1 חיבור בינארי

לאחר היכרות קצרה עם החיבור הבינארי, יתברר שלמעשה הוא פשוט מן החיבור העשרוני, מפני שהבסיס הבינארי מכיל שתי ספרות בלבד. לוח החיבור הבינארי מוצג בטבלה 1.3.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

טבלה 1.3
לוח החיבור הבינארי

צורה יותר מפורטת של לוח החיבור הבינארי מובאת בטבלה 1.4.

הספרות		ספרת הסכום	הנשא (carry)
a	B		
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

טבלה 1.4
הצגה נוספת של לוח החיבור הבינארי

הסיביות שיש לחבר רשומות בשני הטורים השמאליים בטבלה 1.4; **ספרת הסכום**, כלומר הספרה הפחות משמעותית של הסכום, רשומה בטור השלישי, וה**נשא** רשום בטור הימני של טבלה זו. לפי כללי האריתמטיקה הרגילה, ה**נשא** מופיע כאשר תוצאת החיבור שווה לבסיס או גדולה מהבסיס (2 במקרה שלנו), והוא מתחבר לספרות הסמוכות משמאל.

נדגים את תהליך החיבור של שני מספרים, תחילה ללא הסבר מפורט. החיבור מבוסס על לוח החיבור שבטבלה 1.3.

c^*	c	c		c			הנשא:
	1	1	1	0	1	0_2	
+							
	1	0	1	0	1	1_2	
	1	0	0	1	0	1_2	הסכום:

נרשום את המספרים זה מתחת לזה ונמתח קו מתחת להם. את החיבור נבצע בהתאם ללוח החיבור. את ספרת הסכום נכתוב מתחת לקו ואת הנשא נכתוב מעל לטור הסמוך משמאל.

נסו לבצע את החיבור. האם ברור לכם כיצד התקבלה התוצאה?

אם לא ברור לכם, קראו את ההסבר לחיבור הבא:

$$10101_2 + 11001_2 = ?$$

c^*				c		
	1	0	1	0	1_2	21
+						+
	1	1	0	0	1_2	25
	1	0	1	1	0_2	46

נפרט את הפעולה: שתי הספרות הימניות ביותר הן 1 ו-1, סכומן 2, כלומר 10_2 . לכן אנו רושמים 0 במקום הימני ביותר של התוצאה ו"זוכרים" 1 בתור נשא. שתי הספרות הבאות (מקום שני מימין) הן 0 ו-0. נחבר את הספרות האלה ואת הנשא שנוצא בחיבור הקודם ($0+0+1$). נקבל את התוצאה 1 ונרשום אותה במקום שני מימין. סכום הספרות התופסות מקום שלישי הוא 1, וסכומן של הספרות הנמצאות במקום רביעי גם הוא 1.

חיבור הספרות האחרונות נותן כתוצאה 2, לכן רושמים במקום החמישי של התוצאה 0 ובמקום השישי רושמים את הנשא 1. בצד החישוב הבינארי מופיע החישוב העשרוני, ובדיקה תראה שמתקבלות תוצאות זהות.

* c (קיצור של carry) מסמן נשא.

* c (קיצור של carry) מסמן נשא.

נביא עוד כמה דוגמאות:

חישוב בינארי	חישוב עשרוני
$\begin{array}{r} 1011_2 \\ +1000_2 \\ \hline 10011_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11 \\ +8 \\ \hline 19 \end{array}$
$\begin{array}{r} 1111_2 \\ +1111_2 \\ \hline 11110_2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 \\ +15 \\ \hline 30 \end{array}$

בדוגמה האחרונה יש מקרה שבו הנשא הוא 1 וגם שתי הספרות המחוברות הן 1. כיוון שהתוצאה היא 3 ($1+1+1=3$), או 11_2 ברישום בינארי, אנו רושמים 1 כתוצאה ו"זוכרים" 1 בתור נשא.

 תרגול

שאלה 1.17

בצעו את פעולות החיבור הבינארי הבאות, ובדקו את התוצאות בעזרת ייצוג עשרוני.

א.
$$\begin{array}{r} 101_2 \\ +100011_2 \end{array}$$

ב.
$$\begin{array}{r} 101_2 \\ +100011_2 \end{array}$$

ג.
$$\begin{array}{r} 101_2 \\ +100011_2 \end{array}$$

במערכות חישוב מתקדמות מקובל לבצע חיבור של שני מספרים במספר שלבים. בשלב ראשון מחברים כל אחת מן הספרות של המספר הראשון עם הספרה המתאימה לה במספר השני. אם יש נשא, כותבים אותו בשורה שמתחת לשורת התוצאה, כשהוא מוסט במקום אחד שמאלה. בשלב הבא מחברים את שורת הנשא לשורת התוצאה. ממשיכים בתהליך עד ששורת הנשא נותרת ריקה.

נמחיש את התהליך באמצעות הדוגמה הבאה:

שלב א:		
שורת תוצאת החיבור	$\begin{array}{r} 101101 \\ +110111 \\ \hline 0 \end{array}$	חיבור הזוג הימני צעד 1
שורת הנשא	1	
תוצאת החיבור	$\begin{array}{r} 101101 \\ +110111 \\ \hline 10 \end{array}$	חיבור הזוג השני צעד 2
בשלב א	1	
שורת הנשא	$\begin{array}{r} 101101 \\ +110111 \\ \hline 011010 \\ + \end{array}$	חיבור כל הזוגות צעד סופי
שורת הנשא	1 1 1	
	$\begin{array}{r} 101000 \\ +1 1 \\ \hline 100100 \\ +1 \\ \hline 1100100 \end{array}$	שלב ב: חיבור שתי השורות האחרונות שלב ג: חיבור שתי השורות האחרונות שלב ד: חיבור שתי השורות האחרונות

ודאו שהתוצאה נכונה.

היתרון של שיטה זו הוא בכך שהיא "אוטומטית" יותר מהשיטה הקודמת, ובכך שהמימוש שלה במערכות מחשבים פשוט יותר. לכן היא גם מקובלת יותר.

1.5.2 חיסור בינארי

לוח החיסור נתון בטבלה 1.5. שימו לב: המספרים הרשומים בשורה העליונה הם המחוסרים*, ואלה הרשומים בעמודה השמאלית הם המחסרים.

כאשר המחסר גדול מהמחוסר, נעזרים בלווה (Borrow). כמו בשיטה העשרונית, גם כאן הלווה הוא מספר שגודלו שווה לבסיס הספירה, ומוסיפים אותו לספרת המחוסר כדי שנוכל לבצע את החיסור.

השימוש בלווה מחייב להקטין ב-1 את הספרה הסמוכה משמאל למחוסר, שממנה נלקח הלווה.

הבה נפרט את האמור בלוח החיסור:

$$0_2 - 0_2 = 0_2$$

$$1_2 - 1_2 = 0_2$$

$$1_2 - 0_2 = 1_2$$

תוצאת החיסור $0_2 - 1_2$ אינה חיובית, לכן לא רשמנו תוצאה במשבצת המתאימה בטבלה 1.5.

-	0	1	10
0	0	1	
1		0	1

טבלה 1.5

לוח החיסור הבינארי

כאשר נדרשים לחשב $0_2 - 1_2$, כשלב בחיסור של שני מספרים רב-ספרתיים, מבצעים למעשה את הפעולה $10_2 - 1_2$. לדוגמה:

$$\begin{array}{r} 10001101_2 \\ - 101010_2 \\ \hline 1100011_2 \end{array}$$

* מחסר (subtractor) הוא המספר אותו מחסרים. מחוסר הוא המספר ממנו מחסרים.

בדוגמה זו, בספרה השישית מימין, היינו צריכים לחסר $0_2 - 1_2$, אך הספרה הסמוכה משמאל ל- 0_2 במחוסר הייתה אף היא 0_2 . במקרה כזה, אפשר ללוות מהספרה השמאלית הבאה במחוסר ולבצע את הפעולה $100_2 - 1_2$:

$$\begin{array}{r} 100_2 \\ -1_2 \\ \hline 11_2 \end{array}$$

ובאופן כללי (n ספרות)

$$\begin{array}{r} 100 \dots 0_2 \\ -1_2 \\ \hline 11 \dots 1_2 \end{array}$$

($n-1$ ספרות)

עתה אפשר לסכם את כללי החיסור הבינארי (טבלה 1.6):

הספרות		ספרת ההפרש	לווה (borrow)
a	b		
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

טבלה 1.6

לוח החיסור הבינארי (עם לווה)

דוגמאות נוספות:

חישוב עשרוני	חישוב בינארי	
15	1111_2	א.
-10	-1010_2	
$\frac{5}{}$	$\frac{101_2}{}$	
		ב.
11	1011_2	ב.
-5	-101_2	
$\frac{6}{}$	$\frac{110_2}{}$	

b^*

* b קיצור של (borrow) מסמן לווה.

בדוגמה האחרונה יש מקרה שבו הנשא הוא 1 וגם שתי הספרות המחוברות הן 1. כיוון שהתוצאה היא 3 ($1+1+1=3$), או 11_2 ברישום בינארי, אנו רושמים 1 כתוצאה ו"זוכרים" 1 בתור נשא.

תרגול

שאלה 1.18

פתרו את התרגילים הבאים, ובדקו את התוצאות על ידי חיסור עשרוני.

א.
$$\begin{array}{r} 101011_2 \\ -100101_2 \end{array}$$

ב.
$$\begin{array}{r} 10000_2 \\ -1011_2 \end{array}$$

ג.
$$\begin{array}{r} 1101100101_2 \\ -10111111_2 \end{array}$$

ד.
$$\begin{array}{r} 1011111_2 \\ -11111_2 \end{array}$$

עד כה עסקנו בפעולות חיסור שבהן המחסר קטן מן המחוסר. כדי לאפשר פעולות חיסור ללא מגבלה זאת, עלינו לפתח שיטה להצפנת מספרים שליליים.

1.5.3 גבולות הייצוג הבינארי ב- n סיביות

עתה, כשאנו מכירים את כללי החיבור והחיסור הבינארי, נדון בשאלה הבאה:

מהו המספר השלם הגדול ביותר שניתן לייצג לפי בסיס בינארי בעזרת n סיביות

צורתו הכללית של מספר כזה היא:

$$N = a_{n-1} \dots a_i \dots a_1 a_0$$

המספר **הקטן** ביותר שניתן לייצג בעזרת n סיביות מורכב מ- n אפסים וערכו 0. המספר הבינארי **הגדול** ביותר שניתן לייצג כך הוא מספר שבו כל הסיביות המופיעות הן 1, כלומר:

$$N_{max} = 1 \dots 11$$

נוסיף למספר הזה יחידה אחת:

$$\begin{array}{r} 1 \dots 11 \\ + \quad 1 \\ \hline N_i = 10 \dots 00 \end{array}$$

ערכו של המספר החדש הוא:

$$N_1 = 1 \times 2^n + 0 \times 2^{n-1} \dots + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2^n$$

נחסר מהתוצאה האחרונה את היחידה שהוספנו ונקבל את N_{max} :

$$N_1 - 1 = 2^n - 1 = N_{max}$$

כלומר נקבל:

$$N_{max} = 2^n - 1$$

מסקנה:

המספר הבינארי השלם הגדול ביותר שניתן לכתוב על ידי n סיביות הוא $2^n - 1$.

 תרגול

שאלה 1.19

מהו ייצוגו העשרוני של המספר הבינארי הגדול ביותר שניתן לרשום בעזרת 10 סיביות?

שאלה 1.20

מהו מספר הסיביות המזערי הדרוש לייצוג של כל מספר עשרוני שלם בעל 4 ספרות?

1.6 שיטות לייצוג מספרים בינאריים מסומנים

עד כה ראינו כיצד מציגים מספרים שלמים בשיטה הבינארית, וראינו כיצד מבצעים בה את פעולות החשבון הבסיסיות. כדי להרחיב את פעולות החשבון על תחום המספרים השליליים, עלינו לדון תחילה בשיטות לייצוג של המספרים השליליים בבסיס הבינארי.

1.6.1 שיטת הגודל והסימן ומשלמים-2 של מספר בינארי

אנו מסמנים מספר עשרוני שלילי באמצעות סימן מינוס משמאל למספר. אולם כדי להשתמש בבסיס הבינארי במחשב, יש למצוא שיטה שתבטא את הסימן (חיובי או שלילי) באמצעות הסמלים 0 ו-1, מאחר שאלה הסימנים היחידים שהמחשב מזהה. נהוג לסמן מספר

בינארי חיובי על ידי הוספת הספרה 0 משמאל למספר, ומספר בינארי שלילי על ידי הוספת הספרה 1 משמאל למספר.

כבר הראינו שמספר הצירופים השונים שאפשר ליצור בעזרת n סיביות הוא 2^n . לפיכך, נוכל להצפין 8 מספרים, למשל 0-7, בעזרת שלוש סיביות. אולם, אם נרצה לשמור את הסיבית השמאלית ביותר של הצירוף כדי לבטא את סימן המספר, יוותרו בידינו רק שתי סיביות לייצוג **גודל המספר** (כלומר, לייצוג ערכו המוחלט של המספר).

מכאן שכדי לבנות את הייצוג הבינארי של המספרים השלמים **החיוביים והשליליים**, שערכם המוחלט בין 0 ל-7, נזדקק לארבע סיביות: שלוש סיביות יבטאו את ערכם המוחלט של המספרים (החיוביים והשליליים) שבין 0 ל-7, והסיבית הרביעית, השמאלית ביותר, תבטא את הסימן. בטבלה 1.7 רשומים 15 מספרים בינאריים, חיוביים ושליליים, שמוצגים בשיטה שתיארנו.

שימו לב: המספר 0 מוצג כמספר חיובי.

שני מספרים הרשומים באותה שורה בטבלה נבדלים רק בסיבית הסימן. שאר הסיביות המייצגות את הערך המוחלט של המספרים זהות. שיטה זו להצגת מספרים שליליים נקראת שיטת **הגודל והסימן**. כפי שנראה מיד, שיטה זו אינה יעילה לביצוע פעולות חשבון.

סיבית הסימן ↓		סיבית הסימן ↓	
0	0000		
1	0001	-1	1001
2	0010	-2	1010
3	0011	-3	1011
4	0100	-4	1100
5	0101	-5	1101
6	0110	-6	1110
7	0111	-7	1111

טבלה 1.7

ייצוג מספרים בשיטת הגודל והסימן

האם צירופי הסיביות שקיבלנו בשיטת הגודל והסימן, כפי שהוצגו בטבלה 1.7, שומרים על חוקי החיבור?

נבדוק: נוסיף 1 לצירוף 1100 המסמל את -4.

$$\begin{array}{r} 4 \\ +1 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1100 \\ + \quad 1 \\ \hline 1101 \end{array}$$

מתקבל הצירוף 1101 המסמל את 5-.

אולם התוצאה חייבת להיות

$$-4 + 1 = -3$$

נבצע בדיקה נוספת: נחשב למספר 1 (0001)

את המספר 1- (1001)

התוצאה המתקבלת היא 1010 ולא אפס!

בדיקת מספרים נוספים תביא למסקנה שהתוצאות כולן שגויות. אולם יש חוקיות בשגיאות. מהי?

אם למשל נוסיף 1 לכל צירוף המייצג מספר שלילי, תשתנה התוצאה ב-1, אך בכיוון ההפוך, כלומר תקטן במקום לגדול. לדוגמה: כשהוספנו 1 ל-4- קיבלנו 5- במקום 3-.

את כללי החיבור איננו יכולים לשנות, אך אפשר לשנות את טבלה 1.7 כך שתתאים לכללי החיבור. כיצד?

נהפוך את סדר הצירופים בעמודה הימנית כך שהאחרון יהיה לראשון, זה שלפני האחרון יהיה שני וכדומה.

התבוננו בטבלה שבטבלה 1.8. כיצד לדעתכם נקבעו הצירופים?

סיבית הסימן ↓		סיבית הסימן ↓	
0	0000		
1	0001	-1	1111
2	0010	-2	1110
3	0011	-3	1101
4	0100	-4	1100
5	0101	-5	1011
6	0110	-6	1010
7	0111	-7	1001

טבלה 1.8

רישום המספרים השליליים בסדר הפוך למוצג שבטבלה 1.7

הצירופים נקבעו לפי סדר הפוך.

הצירוף 111 המסמל את 7 הועבר אל -1

הצירוף 110 המסמל את 6 הועבר אל -2 וכן הלאה.

נבדוק כעת, האם נכונים כללי החיבור?

נבדוק: $-2 = -3 + 1$, כלומר:

$$\begin{array}{r} -3 \\ + 1 \\ \hline -2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ + 1 \\ \hline 1110 \end{array}$$

ואמנם, התוצאה שקיבלנו עתה היא נכונה.

מדוע כעת מתאימה שיטת הסימון לכללי החיבור?

ההסבר פשוט. מול כל מספר חיובי רשמנו את **הערך הנגדי** לו, כלומר את המספר הבינארי,

ואם נחברו למספר, התוצאה תהיה המספר 0. פעולת החיבור במקרה זה חריגה במקצת.

אם נתבונן בחיבור הבא:

$$\begin{array}{r} -3 \\ + 3 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ + 0011 \\ \hline 1\ 0000 \end{array}$$

התוצאה שלפנינו מורכבת מחמש ספרות, בעוד שאנו דנים במספרים בני ארבע ספרות בלבד. הספרה החמישית משמאל היא אם כן **חסרת משמעות**, לכן יש לקרוא את תוצאת החיבור 0000. במקרים דומים בעתיד נשוב ונשמיט את הספרה השמאלית ביותר.

מהו הקשר בין שני צירופים בינאריים הנמצאים באותה שורה שבטבלה 1.8 (למשל 1111, 0001)?

האם בכל מקרה מתקבל סכום קבוע? מהו?

תשובה: סכום הצירופים בכל שורה קבוע ושווה ל-10000, למשל:

$$\begin{array}{r} -3 \\ + 3 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ + 0011 \\ \hline 10000 \end{array}$$

כדי להבין מדוע קבוע סכום הצירופים **בכל** שורה, נחשב:

$$\begin{array}{ll} 1+7= & \\ 5+3= & 2+6= \\ 6+2= & 3+5= \\ 7+1= & 4+4= \end{array}$$

בכל שורה אנו מחברים שני מספרים. המחובר השמאלי גדל ביחידה משורה לשורה, ואילו המחובר הימני קטן ביחידה משורה לשורה. הסכום נשאר קבוע.

התבוננו בטבלה 1.8 ותיווכחו שמתקיים הכלל הבא: מחובר אחד גדל ביחידה משורה לשורה, והמחובר השני קטן ביחידה משורה לשורה. לכן שווים סכומי הצירופים של

$$(-1) + 1, (-2) + 2, (-3) + 3 \text{ וכדומה.}$$

כל אחד משני הצירופים נקרא **משלים-2** של השני. מספר בינארי אחד באורך n סיביות נקרא משלים-2 של מספר בינארי שני (באותו אורך) כאשר סכומם שווה 2^n . בהשאלה, גם שיטת

ייצוג המספרים השליליים המתוארת בטבלה 1.8 נקראת **שיטת משלים-2**.

דוגמה 1-6

הצירוף הבינארי של +5 הוא 0101. חשבו את הצירוף של -5 בשיטת משלים-2.

פתרון

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -0101 \\ \hline 1011 \end{array}$$

בעקבות דוגמה 1-6 נוכל לנסח כיול לשאלה הבאה: כיצד נהפוך את סימנו של מספר בינארי בשיטת משלים-2?

אם נרצה להפוך את הסימן של מספר בינארי נתון, נצטרך למצוא את משלים-2 של המספר הנתון.

האם הכלל $a + (-a) = 0$ מתקיים בשיטת משלים-2?

תשובה: כן. נתבונן בדוגמה הבאה:

$$\begin{array}{r} +1 \quad 0001 \\ + \\ -1 \quad 1111 \\ \hline 10000 \end{array}$$

אמנם התוצאה היא 10000, אך אם נקרא רק את ארבע הסיביות הימניות של התוצאה (הרי אנו עוסקים בצירופים באורך 4), תהיה התוצאה אפס. אם נקפיד להתייחס אך ורק למספר קבוע של ספרות (בדוגמה שלנו 4 ספרות), יתקיים הכלל:

$$a + (-a) = 0$$

תרגול

שאלה 1.21

מצאו את צירופי הסיביות של המספרים הבאים, ובצעו את החיבור בשתי צורות:

א. חיבור צירופי הסיביות;

ב. חיבור המספרים.

בדקו האם שתי התוצאות זהות.

$$3+(-4)=$$

$$3+(-6)= \quad 4+(-4)=$$

$$2+(-5)= \quad 5+(-3)=$$

1.6.2 משלים-1 ומשלים-2 של מספר בינארי

בסעיף הקודם הסקנו: כדי להפוך את סימנו של מספר בינארי נתון בשיטת משלים-2, יש למצוא את משלים-2 שלו.

נשאלת השאלה: האם קיימת שיטה מהירה ויעילה יותר לחישוב משלים-2 של מספר נתון?

לצורך התשובה התבוננו בטבלה 1.9 המציגה בצורה שונה את טבלה 1.8.

בשיטת משלים-1 יש שני צירופים שונים המייצגים 0: 1111 ו-0000.

מספר עשרוני		הייצוג העשרוני בשיטת משלים-2	הייצוג העשרוני בשיטת משלים-1
0	0000		
1	0001	1111	-0
2	0010	1110	-1
3	0011	1101	-2
4	0100	1100	-3
5	0101	1011	-4
6	0110	1010	-5
7	0111	1001	-6
		1000	-7

טבלה 1.9

מהו הקשר בין צירופי הסיביות הנמצאים משני עברי כל חץ? כל צירוף הוא היפוך הספרות של הצירוף הנמצא מצדו השני של החץ (בכל מקום בו הסיבית 0, הסיבית בצירוף השני היא 1 ולהיפך), ולכן סכום שני הצירופים הוא 1111. נחבר, לדוגמה, את הצירופים הנמצאים משני עברי החץ הרביעי:

$$\begin{array}{r} 0011 \\ + \\ 1100 \\ \hline 1111 \end{array}$$

מדוע נשאר הסכום קבוע?

בסעיף הקודם חיברנו צירופים מאותה שורה בטבלה והסכום היה 10000. בטבלה זו אנו מחברים את שני המספרים המקושרים בחץ אלכסוני. המחבר השמאלי קטן ב-1 מהמחבר המתאים בטבלה הקודמת. לכן גם הסכום בטבלה זו קטן ב-1 מהסכום המתאים בטבלה הקודמת.

זוג המספרים שראינו בדוגמה, 0011 ו-1100 וכן כל זוג מספרים בטבלה 1.9, הקשורים ביניהם בחצים, נקראים **משלימי-1**. מספר בינארי נקרא **משלים-1** של מספר בינארי אחר אם סכומם מורכב כולו מסיביות 1, כלומר אם סיביותיהם המתאימות הפוכות.

בצורה שונה במקצת אפשר לומר, כי מספר בינארי המורכב מ- n סיביות הוא משלים-1 של מספר בינארי אחר המורכב אף הוא מ- n סיביות, אם סכומם $2^n = 1$.

נחזור לבעיה המקורית שלנו: כיצד למצוא בצורה מהירה את המספר הנגדי בשיטת משלים-2? כדי למצוא שיטה מהירה למציאת המספר הנגדי למספר, נתבונן לדוגמה בצירוף הסיביות 1011 המתאים למספר 5-.

החץ היוצא (בטבלה 1.9) מהמספר 1011 מוביל למספר 0100 (אפשר להגיע לצירוף זה גם באמצעות היפוך כל הסיביות: 0 במקום 1; 1 במקום 0). אך המספר 0100 ערכו +4; כדי לקבל את התוצאה המבוקשת (+5) יש לחבר לתוצאה 1. הנגדי של 1011 יהיה אפוא 0100 ועוד 1, כלומר: 0101 (בדקו בטבלה 1.9).

ננסה אפוא את השיטה שלפיה הפכנו את סימנו של המספר:

כל סיבית 0 הפכנו לסיבית 1, כל סיבית 1 הפכנו לסיבית 0, ולצירוף המתקבל חיברנו את המספר 1. במלים אחרות: מצאנו את המשלים-1 של המספר הנתון והוספנו לו 1. נבדוק כלל זה גם בכיוון הפוך - מציאת הנגדי למספר חיובי. למשל: נמצא את הנגדי של 0011 (שערכו, כידוע, הוא 3).

בעקבות הפיכת הסיביות יתקבל הצירוף 1100 שערכו לפי הטבלה לעיל 4-. אבל אנו מעוניינים בערך 3-, לכן יש לחבר 1 ל-1100. התוצאה תהיה אפוא 1101. בדקו בטבלה 1.8 אם 1101 הוא הנגדי של 0011.

ברוב המחשבים מיוצגים המספרים השליליים בשיטת משלים-2. גם היפוך הסימן של מספר נעשה ברוב המחשבים בשיטה המתוארת בסעיף זה. נשתמש בדוגמה האחרונה כדי לחזור ולהדגים משלים-2 ומהו משלים-1.

התבוננו במספרים:

$$\begin{array}{r} +3 \quad 0011 \\ + \\ -3 \quad 1101 \end{array}$$

כל אחד ממספרים אלה מהווה משלים-2 של השני כי:

$$\begin{array}{r} 0011 \\ + \\ 1101 \\ \hline 10000 \end{array}$$

לעומת זאת, כל אחד מהמספרים הבאים

$$\begin{array}{r} 0011 \\ 1100 \end{array}$$

נקרא משלים-1 של השני.

דוגמה 1-7

הצפינו בשיטת משלים-2 את המספר 5- (ללא שימוש בטבלה, אלא רק באמצעות השיטה הרשומה לעיל).

פתרון

תחילה נצפין את המספר 5+ (0101) ואחר כך נמצא את הנגדי לפי הכלל שלמדנו: נחשב את משלים-1 ונחבר 1.

$$\begin{array}{r} 1010 \\ + \\ 1 \\ \hline 1011 \end{array}$$

דוגמה 1-8

המספר השלילי 1001 מוצפן בשיטת משלים-2. חשבו את ערכו.

פתרון

ראשית, נמצא את הנגדי לו על ידי חישוב משלים-1, ונחבר 1:

$$\begin{array}{r} 0110 \\ + \\ 1 \\ \hline 0111 \end{array}$$

התוצאה היא המספר 7+.

לכן ערך המספר 1001 הוא 7-.

דוגמה 1-9

א. כמה סיביות דרושות להצפנת המספרים 0 עד 15 ולהצפנת המספרים השליליים 1-

עד 16-?

ב. הצפינו את המספרים האלה בשיטת משלים-2.

פתרון

- א. לצורך הצפנת 32 מספרים דרושות 5 סיביות כיוון ש- $2^5 = 32$.
 ב.

0	00000		
1	00001	-1	11111
2	00010	-2	11110
3	00011	-3	11101
4	00100	-4	11100
5	00101	-5	11011
6	00110	-6	11010
7	00111	-7	11001
8	01000	-8	11000
9	01001	-9	10111
10	01010	-10	10110
11	01011	-11	10101
12	01100	-12	10100
13	01101	-13	10011
14	01110	-14	10010
15	01111	-15	10001
		-16	10000

טבלה 1.10 הצפנת מספרים בשיטת משלים-2

תרגול

שאלה 1.22

בשאלה זו הניחו כי אורכו של כל מספר בינארי נתון מוגבל ל-8 סיביות בלבד.

- א. מהו תחום המספרים המסומנים הניתנים להצגה? (הניחו שמחצית המספרים המיוצגים חיוביים ומחציתם שליליים).

ב. מצאו את צירופי הסיביות של +47, -82.

ג. חשבו את משלים-2 של המספרים הבאים:

$$10111001_2 \quad I \quad 10111001_2 \quad II$$

ומצאו את הייצוג העשרוני של כל מספר.

ד. מהו משלים-2 של המספר 00000000_2 ? האם התשובה הגיונית?

ה. איזה מספר עשרוני מיוצג על ידי 11111111_2 ?

1.7 חיבור וחיסור מספרים בינאריים מסומנים

בסעיף הקודם למדנו לייצג מספרים שליליים בבסיס 2 בשיטת משלים-2. נפעיל עתה את כללי החיבור והחיסור על המספרים המסומנים, ונבחן את משמעות התוצאות המתקבלות.

א. חיבור מספרים מסומנים

1. המקרה $A + (-B)$

דוגמה 1-10

חברו את המספרים העשרוניים 23 ו-13- לאחר הצגתם בשיטה הבינארית.

פתרון

לייצוג המספר 23 נדרשות 6 סיביות (כולל סיבית הסימן):

$$\begin{aligned} 23 &= 16 + 4 + 2 + 1 = 010111_2 \\ 13 &= 8 + 4 + 1 = 001101_2 \\ -13 &= 110010 + 1 = 110011_2 \end{aligned}$$

ביצוע החיבור:

בינארי	עשרוני
010111	23
+	+
110011	-13
<u>1 001010</u>	<u>10</u>

כפי שהוסבר בסעיף משנה 1.6.1, נתעלם גם כאן מן הספרה השמאלית ביותר המתקבלת.

2. המקרה $-A + (-B)$

דוגמה 1-11

חברו 23- ל-13- לאחר הצגתם בשיטה הבינארית (יש להשתמש ב-7 סיביות. מדוע?).

פתרון

כדי לבטא כל אחד מן המספרים הנתונים בשאלה זו, יש צורך ב-6 סיביות שיבטאו כל מספר בין 32- ל-31+. אולם תוצאת החיבור היא 36-, לכן היא תבטא באמצעות 7 סיביות (תחום המספרים המסומנים שאפשר לבטא בעזרת 7 סיביות הוא מ-64- עד +63).

נבטא תחילה, בשיטת משלים-2, את המספרים הנתונים. לשם כך ניעזר בחישובים שביצענו בדוגמה הקודמת:

$$-23 = 1101000$$

$$-13 = 1110011$$

שימו לב: בערכים השליליים שלעיל מספר ה-1'ים השמאליים תלוי ברצוננו, בדיוק כשם שבערכים החיוביים מספר האפסים השמאליים אינו משנה את ערכו של המספר הבינארי.

ביצוע החיבור:

עשרוני	בינארי
-23	1101001
+	+
-13	1110011
-36	<u>1 1011100</u>

התוצאה הבינארית היא שלילית, כצפוי, לכן נמצא את ערכה החיובי (כלומר את משלים-2 שלה):

1011100	התוצאה
0100011	משלים-1
+	
1	
<u>36 = 0100100</u>	משלים-2

הייצוג העשרוני של המספר הבינארי המתקבל הוא 36, לכן תוצאת החיבור נכונה.

ב. חיסור מספרים מסומנים

1. המקרה $A - (+B)$

דוגמה 1-12

בצעו את החיסור $13 - (+23)$.

פתרון

$$13 - (+23) = 13 + (-23)$$

כלומר, כדי לחסר שני מספרים זה מזה, עלינו למצוא את משלים-2 של המחסר ולחבר אותו למחוסר.

13 = 001101	13
+	+
-23 = 101001	-23
<u>13 + (-23) = 110110</u>	<u>-10</u>

התוצאה הבינארית היא שלילית, כצפוי. נמצא את המספר הנגדי שלה:

$ \begin{array}{r} 110110 \\ 001001 \\ + \\ 1 \\ \hline 10 = 001010 \end{array} $	התוצאה משלים-1
--	---------------------------

כלומר, תוצאת החיסור נכונה.

2. המקרה $-A - (-B)$

דוגמה 1-13

בצעו את החיסור $-13 - (-23)$.

פתרון

$$-13 - (-23) = -13 + 23$$

כלומר, כדי לבצע פעולת חיסור שבה המחסר שלילי, עלינו לחבר למחסר את המספר הנגדי של המחסר.

$$\begin{array}{r}
 -13 = 110011 \\
 + \\
 23 = 010111 \\
 \hline
 10 = 001010
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -13 \\
 + \\
 23 \\
 \hline
 +10
 \end{array}$$

 **תרגול**

שאלה 1.23

נתונים $W=10011110$; $V=01100011$; $U=10110111$ הם מספרים בינאריים מסומנים). חשבו את ערכם של הביטויים שלפניכם בשיטה העשרונית ובשיטה הבינארית:

א. $Y = U + V + W$

ב. $Z = U + V - W$

שאלה 1.24

נתונים: $A = 223_8$, $B = -105_{10}$

חשבו את ערכם של הביטויים שלהלן בשיטה הבינארית:

א. $S = A + B$

ב. $X = A - B$

1.8 ביצוע של פעולות אריתמטיות בבסיס 16

כפי שראינו, העברת מספרים מבסיס אחד למשנהו כרוכה בעבודה לא מעטה. לכן רצוי לצמצם ככל האפשר את הצורך בהעברה מבסיס לבסיס. אפשר לבצע פעולות חיבור וחיסור בבסיס 16 על פי העקרונות ששימשו אותנו בחיבור העשרוני והבינארי.

ננתח את פעולת החיבור העשרונית הבאה:

$$\begin{array}{r} 359_{10} \\ + \\ 245_{10} \\ \hline \end{array}$$

הפעולות שאנו מבצעים הן:

א. $9 + 5 = 14$

ב. 14 גדול מהבסיס (10). לכן אנו מפחיתים את הבסיס ($14 - 10 = 4$), כותבים את התוצאה (4), ומוסיפים יחידה (1) לסיכום שתי הספרות הבאות.

ג. $5 + 4 + 1 = 10$

ד.  מועברת מחיבור שתי הספרות הקודמות ($9+5$)

ה. 10 שווה לבסיס (10), לכן אנו מפחיתים את הבסיס ($10 - 10 = 0$), כותבים את התוצאה (0), ומוסיפים יחידה (1) לסיכום שתי הספרות הבאות.

ו. $3 + 2 + 1 = 6$

ז.  מועברת מחיבור שתי הספרות הקודמות ($9+5$)

ח. 6 קטן מהבסיס (10), לכן אנו כותבים את התוצאה (6) ולא מעבירים דבר לחיבור שתי הספרות הבאות. זוהי התוצאה הסופית (אין ספרות נוספות לחיבור). כלומר:

$$\begin{array}{r} 11 \\ \leftarrow \leftarrow \\ 359_{10} \\ + \\ 245_{10} \\ \hline 604_{10} \end{array}$$

מיומנותנו בביצוע פעולות בבסיס העשרוני היא כה גדולה עד כי איננו שמים לב לפרטי הביצוע של התהליך שתואר לעיל. באותה דרך אפשר לבצע פעולות חיבור בכל בסיס נתון, בלי לעבור תחילה לבסיס העשרוני ולבסוף להעביר את התוצאה לבסיס הנתון.

דוגמה 1-14

יש לבצע את פעולת החיבור הבאה:

$$\begin{array}{r} 3A9_{16} \\ + \\ 7B8_{16} \\ \hline ?_{16} \end{array}$$

פתרון

נפעיל את התהליך שתואר קודם:

$$\begin{array}{r} 11 \\ \text{↻ ↻} \\ 3A9_{16} \\ + \\ 7B8_{16} \\ \hline B61_{16} \end{array}$$

הסבר

א. $8 + 9 = 17$

ב. 17 גדול מהבסיס (16). לכן אנו מפחיתים את הבסיס ($17 - 16 = 1$), כותבים את התוצאה (1), ומוסיפים יחידה (1).

ג. $10(A) + 11(B) = 22$

מועברת מתוצאת חיבור שתי הספרות הקודמות (8+9) 

ד. 22 גדול מהבסיס, לכן אנו מפחיתים את הבסיס ($22 - 16 = 6$), כותבים את התוצאה (6), ומעבירים יחידה (1).

ה. $3 + 7 + 1 = 11(B)$

מועברת מתוצאת חיבור שתי הספרות הקודמות 

ו. B קטן מהבסיס (10), לכן כותבים את התוצאה (6) והפעולה מסתיימת.

* אנחנו מבצעים את החיבור באופן ישיר בבסיס 16, אבל רשמנו את תוצאת החיבור לפי בסיס 10. הדבר אינו פוגע בנכונות התהליך.

שאלה 1.25

בצעו את פעולת החיבור הבאה בבסיס 16 ללא מעבר מבסיס לבסיס.

$$\begin{array}{r} 38B_{16} \\ + \\ 97C_{16} \\ \hline ?_{16} \end{array}$$

תהליך דומה לזה שהצגנו בפעולת החיבור אפשר כעת לבצע בפעולת החיסור, כלומר ללא מעבר מבסיס לבסיס.

שאלה 1.26

בצעו את פעולת החיסור הבאה בבסיס 16 ללא מעבר מבסיס לבסיס.

$$\begin{array}{r} 37B_{16} \\ - \\ 18C_{16} \\ \hline ?_{16} \end{array}$$

1.9 צפנים בינאריים (Binary Codes)**1.9.1 הצורך בצפנים**

עד כה עסקנו בשיטת הספירה העשרונית. נדון עתה בהיבט מיוחד של השיטה הבינארית בצפנים בינאריים.

צופן או קוד משמעותו: סימן או מערכת סימנים המשמשים להעברת מידע. מקובל לחשוב על צפנים כעל אמצעים לשמירת הסודיות של מידע, אולם צפנים משמשים באופן נרחב לא פחות להעברת מידע בצורה מוסכמת, יעילה ונוחה לפענוח. תכונה חשובה של כל קוד היא האפשרות **לקודד** באמצעותו כל מידע. תכונה זו הופכת קוד מסוים לתחליף מלא לאותיות ולשאר הסימנים הקיימים בשפה רגילה. בין הצפנים (הקודים) הידועים ביותר נציין את **צופן ברייל** המשמש בכתב העיוורים (איור 1.2) ואת **צופן מורס** (איור 1.3)

1.2

A	B	C	D	E	F	G	H
● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●
● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●
● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●	● ●

1.3

1 . — — — —	A . —	J . — — —	S ...	נקודה . — . — . — . —
2 .. — — — —	B — ...	K — . —	T —	פסיק — — — — . — — — —
3 ... — — —	C — . — .	L . — ..	U .. —	סימן שאלה .. — — — — ..
4 —	D — ..	M — — —	V ... —	גרש . — — — — . —
5 —	E .	N — .	W . — — —	מקף — — — — . —
6 —	F .. — .	O — — — —	X — .. —	סוגריים — . — — — — . —
7 — — ...	G — — .	P . — — .	Y . — . — —	סימן קריאה . — . — . — . —
8 — — — ..	H	Q — — — —	Z — — ..	
9 — — — — .	I ..	R . — .		
0 — — — — —				

הצפנים שהוזכרו לעיל הם למעשה צפנים בינאריים. התכונה המציינת את הצפנים הבינאריים היא התבססותם על שני סימנים בלבד. הסימנים שבהם משתמשים בצפנים אלה הם:

בצופן ברייל:	יש בליטה בנייר	אין בליטה בנייר
בצופן מורס:	נקודה	קו

בהמשך הלימוד נראה כי אפשר להרכיב צפנים בינאריים נוספים המבוססים על סימנים, כגון:

אין זרם	יש זרם
מגנוט בכיוון אחד	מגנוט בכיוון ההפוך

(כאנשי אלקטרוניקה או מחשבים, אלה הצפנים המעניינים אותנו במיוחד).

בכל המקרים שצוינו לעיל אפשר להשתמש בספרות 0 או 1 לסימול שני המצבים. לכל אחת משתי ספרות אלה נקרא **ספרה בינארית** ("בי", כמו "דו", פירושו שניים), או בקיצור **סיבית**, וברבים **סיביות**.

מספר הסיביות שבאמצעותן מבטאים את כל אחד מהסימנים של צופן מסוים נקרא **אורך הצופן**.

נתבונן שוב בתיאורי הצפנים שהוצגו לעיל. מהאיורים נראה כי אורך צופן ברייל הוא 6. מספר הסיביות אינו משתנה מאות לאות. כל אחת מן הסיביות יכולה לסמן אחד משני המצבים: **יש בליטה או אין בליטה**.

לעומת צופן ברייל שהוא בעל אורך קבוע, צופן מורס אינו בעל אורך קבוע; מספר הסיביות לייצוגה של אות מסוימת **משתנה** מאות לאות. בצופן מורס יש אותיות שהן בעלות סיבית אחת, שתיים, שלוש, ארבע או חמש סיביות.

מכאן ואילך נדון בצפנים שאורכם קבוע.

1.9.2 מספר הצירופים בצופן בינארי

מהו מספר הצירופים השונים בצופן בינארי שאורכו קבוע - n סיביות?

צירוף, לצורך הדיון, הוא סדרה של סימנים המייצגת **תו** אחד. כלומר, אפשר לנסח את השאלה גם כך: כמה תווים שונים ניתן לייצג בצופן בינארי שאורכו n סיביות?

כדי לענות על שאלה זו, נבנה את הצירופים הבינאריים בשיטה המתוארת להלן: נתחיל בצופן באורך של סיבית אחת: $n = 1$ בצופן כזה נוכל לרשום רק סיבית אחת. ערכה של הסיבית יכול להיות 0 או 1.

מסקנה: בצופן בינארי שאורכו סיבית אחת יש 2 צירופים אפשריים. עתה נעבור לצופן באורך $n = 2$, ונבנה את כל הצירופים האפשריים בשתי סיביות:

0	0
0	1
1	0
1	1

בנינו 2 צירופים על ידי הוספת 0 מצד שמאל של שני הצירופים הראשונים, ועוד 2 צירופים על ידי הוספת 1 לשמאלם של אותם שני צירופים.

מסקנה: בצופן בינארי שאורכו 2 סיביות יש 4 צירופים אפשריים.

עתה נעבור לצופן באורך $n = 3$, ונבנה את כל הצירופים האפשריים בשלוש סיביות. ראשית נוסיף 0 לשמאלם של כל הצירופים שבנינו עד כה:

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1

כעת נוסיף עוד 4 צירופים על ידי רישום 1 לשמאלם של אותם צירופים:

1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

מסקנה: בצופן בינארי שאורכו 3 סיביות יש 8 צירופים אפשריים.

שימו לב: בצופן בינארי, הגדלת אורך הצופן בסיבית אחת מכפילה את מספר הצירופים פי 2.

מהי המשוואה המקשרת בין אורך הצופן הבינארי (מספר הסיביות בצופן) לבין מספר הצירופים האפשרי?

לצורך התשובה נבנה את הטבלה הבאה (קראו משמאל לימין):

מספר הסיביות בצופן	מספר הצירופים
1	2

כאמור, הגדלת אורך הצופן הבינארי בסיבית אחת מגדילה את מספר הצירופים פי 2. לכן המשך הטבלה יהיה:

מספר הסיביות בצופן	מספר הצירופים
2	$2 \times 2 = 2^2$
3	$2^2 \times 2 = 2^3$
4	$2^3 \times 2 = 2^4$

המשוואה למציאת מספר הצירופים השונים שמאפשר צופן בינארי, שאורכו קבוע ושווה ל- n סיביות, תהיה:

$$\text{מספר הצירופים} = 2^n$$

דוגמה 1-15

עליכם לבנות צופן בינארי בעל אורך קבוע, אשר יכיל את כל האותיות של השפה האנגלית (26 אותיות), את הספרות 0-9 (10 ספרות), ועוד עשרה סימנים מיוחדים לפחות (כמו: ! , ; , . , -). מה יהיה אורכו המזערי של צופן זה?

פתרון

מספר התווים הוא $26 + 10 + 10 = 46$, כלומר הצופן חייב להכיל לפחות 46 צירופים שונים. נתבונן בטבלה:

מספר הסיביות בצופן	מספר הצירופים
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$
6	$2^6 = 64$

צופן באורך 5 סיביות לא יספיק (32 צירופים בלבד), לכן יש להשתמש בצופן שאורכו 6 סיביות. מספר התווים שנוכל לתאר באמצעות הצופן יהיה 64 (כך שייוותרו עוד 18 צירופים שאינם בשימוש).

תרגול

שאלה 1.27

- א. כתבו את כל הצירופים האפשריים בצופן בינארי שאורכו 4 סיביות.
 ב. עליכם לבנות צופן בינארי בעל אורך קבוע להצפנת 100 תווים. מה יהיה אורך הצופן?

משוואה כללית לחישוב מספר הצירופים בצופן

עד כה עסקנו בצופן בינארי. אם נסמן ב- k את מספר הסימנים הקיימים בצופן, אזי, בצופן בינארי $k = 2$.

בצפנים שאינם בינאריים k אינו שווה 2. לגבי k כלשהו, מספר הצירופים האפשריים בצופן שאורכו n הוא:

$k^n =$ מספר הצירופים
 ההסבר למשוואה זו דומה במלואו להסבר שניתן למקרה שבו $k = 2$. במקום הראשון בצירוף יכולים להופיע k סימנים; בעבור כל אחד מ- k הסימנים הללו יכולים להופיע, במקום השני, k סימנים, וכך הלאה, עד המקום n שבו יכולים להופיע k סימנים. לכן,

$$\underbrace{(k \cdot k \cdot k \cdot \dots \cdot k)}_{n \text{ פעמים}} = k^n$$

ובאופן מקוצר אפשר לרשום את הנוסחה כך:

$$M = k^n$$

$M =$ מספר הצירופים

דוגמה 1-16

בדקו את הנוסחה $M = k^n$ על ידי בניית כל הצירופים האפשריים של צופן טרנארי ($k = 3$) באורך $n = 2$.

פתרון

בצופן טרנארי הסימנים הם 0, 1, 2; הצירופים המתקבלים הם:

00	10	20
01	11	21
02	12	22

מספר הצירופים $k^n = 3^2 = 9$.

תרגול 

שאלה 1.28

בנו את כל הצירופים של צופן המבוסס על ארבע ספרות ($k = 4$):

- א. באורך 2
- ב. באורך 3

לסיכום: בסעיף זה ראינו כי בעזרת ספרות בינאריות אפשר להצפין מידע מסוגים שונים, והכרנו כמה צפנים בינאריים; למדנו לחשב את מספר הצירופים של צופן כאשר נתונים מספר הסימנים בצופן ואורכו.

נעבור עתה להכרת צפנים נוספים.

1.9.3 צפנים משקליים

את המושג צופן או קוד פגשנו כבר בסעיף הקודם. נוסיף כאן כמה דוגמאות.

לשם תזכורת והבהרה:

- כדי להסוות את העברת "מפלצות הפלדה" (הטנקים) לחזית במלחמת העולם הראשונה, נקראו הללו בשם הצופן "טנק" שמשמעותו "מכל" (*Tank*). שמם המקורי נשכח בינתיים מלב כל, והשם המוצפן נקלט במרבית השפות המדוברות.
- כאשר דיבר הנביא ירמיהו בנבואותיו על "ששך" - התכוון לבבל. ירמיהו ניצל והתאים את הצופן שבו מחליפים אותיות באופן סימטרי (כלפי האמצע) באופן הבא:

א	ב	ג	ד	ה	ו	ז	ח	ט	י	כ
↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓
ת	ש	ר	ק	צ	פ	ע	ס	נ	מ	ל

מהו צופן ולשם מה נועד?

צופן או קוד הוא צורת הצגה של מידע. בימי המנדט הבריטי בארץ ישראל השתמשו אנשי המחתרות בצופן כדי להעלים מהאנגלים ידיעות (רובה נקרא "מקל", מחסן נשק - "סליק", אלחוטאי - "גדעוני" וכדומה).

אולם לא תמיד משתמשים בצופן כדי להסתיר מידע או להסוותו. לא תמיד המטרה היא לשמור על סודיות. אגירת מידע ושמירתו במערכות האלקטרוניות של ימינו מחייבת **הצפנה** או **קידוד** (encoding) של המידע, כדי להתאימו לקליטה ולעיבוד בהתאם לתכונותיה ולמגבלותיה של כל מערכת. צורך זה גבר עקב התפתחות מכונות החישוב המכניות והאלקטרוניות. הצופן המתאים ביותר למכונות אלה הוא הצופן הבינארי, המאפשר ייצוג אותיות, ספרות וסימנים אחרים על ידי צירופים של שני סימנים בלבד. כדי לסמן את שני המצבים האפשריים בצופן בינארי נמשיך להשתמש בסמלים 0 ו-1. עם זאת, לא נשכח שלסמלים 0, 1 יש גם ערך מספרי, ושהספרות הללו (הספרות הבינאריות) יוצרות **ערכים** בינאריים שגם הם יכולים לשמש להצפנה, כפי שניווכח בסעיפים הבאים.

צופן משקלי (weighted code)

כל שיטת ספירה מיקומית מייחסת חשיבות למיקומה של הספרה בתוך המספר הנתון. כזכור, ערכה העצמי של כל ספרה במספר מוכפל בערך המיקומי של הספרה. אם נכנה ערך מיקומי של ספרה בשם משקל, כי אז

השיטה הבינארית מקצה את המשקל $2^0 = 1$	לספרה הראשונה מימין.
$2^1 = 2$	לספרה השנייה מימין.
$2^2 = 4$	לספרה השלישית מימין.
$2^3 = 8$	לספרה הרביעית מימין.

וכן הלאה...

השיטה העשרונית מקצה את המשקל $10^0 = 1$	לספרה הראשונה מימין (יחידות).
$10^1 = 10$	לספרה השנייה מימין (עשרות).
$10^2 = 100$	לספרה השלישית מימין (מאות).
$10^3 = 1000$	לספרה הרביעית מימין (אלפים).

וכן הלאה...

לכן המספר הבינארי 11001_2 מייצג את הערך:

$$1 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

ואילו המספר העשרוני 2307 מייצג את הערך:

$$2 \times 1000 + 3 \times 100 + 0 \times 10 + 7 \times 1$$

משקל של ספרה הוא הערך המיוחד **למיקום** שבו היא נמצאת במספר. צופן המבוסס על משקלים קרוי **צופן משקלי**. קיימות שיטות ספירה שאינן מיקומיות, כמו למשל שיטת הספירה הרומית ושיטת הספירה העברית.

שיטות הספירה העשרונית והבינארית הן שיטות מיקומיות. יתרה מזו, בתחילת הסעיף הראינו כי בשיטות אלה משתמשים בחזקות עולות של הבסיס במשקלי הספרות, במקומות שונים בצירוף. אולם לא רק כל שיטת ספירה מיקומית מחייבת לבחור את המשקלים כחזקות של הבסיס.

לדוגמה: אפשר ליצור צופן המבוסס על שיטת ספירה בינארית שבה משקלי הספרות יהיו 5431. בצופן כזה ערכו של הצירוף 1011 יהיה:

$$1 \times 5 + 0 \times 4 + 1 \times 3 + 1 \times 1 = 9$$

עם זאת, אפשר לומר שבכל צופן משקלי בינארי מתקיימים הכללים הבאים:

א. סיבית 1 **מוסיפה** לערך הצירוף את משקל מיקומה.

ב. סיבית 0 **אינה מוסיפה** דבר לערך הצירוף.

כלומר: **בצופן משקלי בינארי, ערך הצירוף הוא סכום המשקלים של המיקומים שבהם נמצאת הסיבית 1.**

כפי שכבר ראינו, בבסיס הספירה הבינארי, משקלי הספרות הם $2^0, 2^1, 2^2$ וכדומה, כלומר 1, 2, 4 וכדומה.

בדוגמה הבאה נתייחס לבסיס הבינארי כאל צופן משקלי.

דוגמה 1-17

כתבו את כל הצירופים האפשריים בצופן בעל המשקלים 8421, והתאימו את ערכיהם הבינאריים למספרים עשרוניים.

פתרון

איור 1.4

המספר העשרוני	הצירוף הבינרי				משקלים
	8	4	2	1	
0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	
2	0	0	1	0	
3	0	0	1	1	
4	0	1	0	0	
5	0	1	0	1	
6	0	1	1	0	
7	0	1	1	1	
8	1	0	0	0	
9	1	0	0	1	
10	1	0	1	0	
11	1	0	1	1	
12	1	1	0	0	
13	1	1	0	1	
14	1	1	1	0	
15	1	1	1	1	

המסגרות המופיעות על העמודות של הצירופים הבינאריים, בדוגמה לעיל, מבליטות את מחזוריות הסיביות במספרים הרשומים לפי סדר עולה, בהתאם למשקלים השונים. מספר הפעמים שכל אחת מהספרות, 0 או 1, מופיעה במסגרת שווה למשקל העמודה שבה נמצאת המסגרת. למשל: בעמודה שמשקלה 2 מופיעה הספרה 0 או הספרה 1 פעמיים בכל מסגרת. תופעה זו מאפשרת לרשום את המספרים העוקבים בבסיס הבינארי הרגיל באופן אוטומטי:

בעמודה שמשקלה k רושמים תחילה k פעמים את הספרה 0 ואחר-כך k פעמים את הספרה 1. חוזרים על פעולה זו פעם אחר פעם, בהתאם למספר הצירופים שמעוניינים לרשום.

שאלה 1.29

חשבו את משקל הסיבית בצופן בינארי רגיל:

א. במקום חמישי מימין.

ב. במקום n מימין.

1.9.4 צופן BCD (Binary Coded Decimal)

היות שמערכות ספרתיות (לדוגמה: מחשבים) פועלות לפי שני מצבים מוגדרים של רמות מתח (רמת מתח אחת ניתנת לסימון על ידי סיבית 1 ורמת מתח אחרת - על ידי סיבית 0), נוח לייצג באמצעות רמות המתח את המספרים הבינאריים.

אולם בחיי יום-יום אנו משתמשים בדרך כלל במספרים עשרוניים, ולפעמים היינו מעדיפים להשתמש בהם גם במערכות ספרתיות. שימוש ישיר כזה אינו בר-ביצוע, אולם אפשרית דרך ביניים שבה נצפין מספרים עשרוניים בצופן בינארי. צופן כזה קרוי: **עשרוני-מוצפן-בינארי** (צופן BCD). צפנים מסוג זה מנצלים את הן את היתרונות של המספרים העשרוניים, והן את יתרונותיהם של המספרים הבינאריים.

בצופן BCD כל ספרה עשרונית תוצפן **בנפרד** בצופן בינארי באורך 4 סיביות, כלומר בצופן 8421.

לדוגמה: המספר העשרוני 15, יוצפן כך:

$$15 = \underbrace{0001}_1 \underbrace{0101}_5$$

נמחיש עיקרון זה באמצעות דוגמה נוספת.

דוגמה 1-18

הצפינו בצופן BCD את המספר 328.

פתרון

$$3 = 0011$$

$$2 = 0010$$

$$8 = 1000$$

$$328 = \underbrace{0011}_3 \underbrace{0010}_2 \underbrace{1000}_8$$

הקריאה מסורבלת במקצת, וכדאי להשאיר רווח בין כל רביעייה של סיביות, כמודגם:

$$328 = 0011\ 0010\ 1000$$

דוגמה 1-19

פענחו את המספר 010101001001 המוצג בצופן BCD והציגו אותו כמספר עשרוני.

פתרון

$$\underbrace{0101}_5 \underbrace{0100}_4 \underbrace{1001}_9 = 549_{10}$$

תרגול

שאלה 1.30

בטאו את המספר 715_8 בצופן BCD.

רמז: תחילה הציגו את המספר בשיטה העשרונית.

כפי שראינו, כל ספרה עשרונית הופכת לקבוצה של 4 סיביות. שימו לב: בצופן BCD הקבוצה 1001 היא בעלת הערך הגבוה האפשרי. במילים אחרות: משתמשים רק ב-10 קבוצות של 4 סיביות (הקבוצות 0000_2 עד 1001_2 המתאימות לספרות 0_{10} עד 9_{10}) מתוך 16 קבוצות אפשריות. צופן BCD זהה אם כן לצופן הבינארי של המספרים העשרוניים 0 עד 9. מעל לערך העשרוני 9, צופן BCD שונה לחלוטין מצופן המספרים הבינאריים.

טבלה 1.11 מציגה אלה מול אלה כמה מספרים המיוצגים בצופן BCD ובצופן בינארי.

עשרוני	בינארי	BCD		
0	0000			0000
1	0001			0001
2	0010			0010
3	0011			0011
≈	≈			≈
9	1001			1001
10	1010		0001	0000
11	1011		0001	0001
12	1100		0001	0010
≈	≈			≈
99	1100011		1001	1001
100	1100100	0001	0000	0000

101	1100101	0001	0000	0001
≈	≈			≈
578	1001000010	0101	0111	1000
≈	≈			≈

טבלה 1.11

ייצוג מספרים עשרוניים בצופן BCD ובצופן בינארי

דוגמה 1-20

הציגו את המספר 12_{10}

א. כמספר בינארי.

ב. בצופן BCD.

פתרון

$$12_{10} = 1100_2$$

$$12_{10} = 0001\ 0010$$

א. לפי צופן בינארי

ב. לפי צופן BCD

תרגול

שאלה 1.31

כיצד מיוצג 24_{10} כמספר בינארי וכיצד הוא מיוצג בצופן BCD?

מסקנה:

הייצוג הבינארי של מספרים גדולים מ- 9_{10} שונה מן הייצוג שלהם בצופן BCD.

שאלה 1.32

הצפינו את המספרים העשרוניים הבאים בצופן BCD:

א. 732

ב. 94685

שאלה 1.33

הצפינו את המספרים הבאים, המוצגים בצופן BCD, כמספרים עשרוניים. לגבי כל מספר –

בדקו אם לא הופרו כללי הייצוג בצופן BCD.

א. 1000 0101 0110 0011

ב. 0011 0101 0001 1001 0111

ג. 0100 1010 0110

יתרונו הבולט של צופן BCD מתבטא בפשטות המעבר ממנו למספרים עשרוניים ולהיפך. משתמשים בייצוגים הבינאריים של המספרים מ-0 עד 9 בלבד, מפני שמצפינים כל ספרה בנפרד. חסרונו של צופן זה הוא שחוקי האריתמטיקה הבינארית אינם מתאימים לכל הצופן, **אלא רק לקבוצות בנות 4 סיביות**. נמחיש חיסרון זה באמצעות הדוגמה הבאה:

דוגמה 1-21

חשבו $9 + 12$ לפי הבסיס העשרוני, לפי הבסיס הבינארי ולפי צופן BCD.

פתרון

צופן BCD		בינארי	עשרוני
0001	0010	1100	12
+	1001	+	+
		1001	9
<u>0001</u>	<u>1011</u>	<u>10101</u>	<u>21</u>

התוצאה 1011 0001 חסרת משמעות משום שהמספר 1011 אינו קיים בצופן BCD. חיבור מספרים בצופן BCD אינו פשוט כמו חיבור מספרים בינאריים רגילים. נושא זה חורג ממסגרת פרק זה, ולכן לא נדון בו כאן.

השם BCD (עשרוני-מוצפן-בינארית) מאפיין למעשה משפחה רחבה יותר של צפינים שבהם מצפינים מידע, לאו דווקא מספרי, בצופן בינארי.

שאלות חזרה לפרק 1

שאלה 1.34

נתונים שני המספרים, A ו-B, המיוצגים בבסיס 10:

$$A = (11)_{10} ; B = (8)_{10}$$

- א. בטאו את הסכום $A + B$ בצופן BCD.
- ב. הציגו את המספרים A ו-B בשיטת המשלים ל-2 (6 סיביות) ובצעו בשיטת המשלים ל-2 את החישובים האלה:

- A-B
- B+A
- B-A

שאלה 1.35

העתיקו את הטבלה הבאה למחברת והשלימו את כל התאים הריקים שמופיע בהם X בנתונים המתאימים.

בצעו את המעברים בשיטה "מקוצרת".

בסיס 2	בסיס 16	בסיס 10
10111100	X	X
X	A9	X
X	X	117

שאלה 1.36

העתיקו את הטבלה הבאה למחברת והשלימו את כל התאים הריקים שמופיע בהם X בנתונים המתאימים.

בצעו את המעברים בדרך ה"רגילה".

בסיס 16	בסיס 2	בסיס 10
10111100	10100111	X
D7	X	X
X	X	166

שאלה 1.37

א. בצעו את הפעולות הבאות בבסיס הקסאדצימלי:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & \begin{array}{r} \text{FFF0}_{16} \\ + \\ \text{8F0}_{16} \end{array} \\ \text{II)} & \begin{array}{r} \text{38F5}_{16} \\ + \\ \text{BCF}_{16} \end{array} \end{array}$$

ב. העבירו את הנתונים בשני התרגילים לבסיס 2 ובצעו את הפעולות שוב.

סיכום פרק 1

בפרק זה למדנו לייצג מספרים בשיטות ספירה שונות ולתארם בבסיסי הספירה 2 ו-16. בסיסים אלה שימושיים ביותר בתחום המערכות הספרתיות בכלל, ובמחשבים בפרט.

בהמשך למדנו שיטות למעבר מקוצר בין בסיסים וביצוע של פעולות חשבון בבסיסים השונים, במספרים חיוביים ובמספרים שליליים, בשיטת משלים ל-1 ול-2.

לסיום, למדנו תיאור של צפנים שונים המשמשים במערכות אלקטרוניות ספרתיות שונות, ובעיקר במערכות מחשבים. לצפנים אלה תפקידים אחדים: הם מאפשרים ארגון נאות של המידע הבינארי בתאי הזיכרון וביחידות אחרות של המחשב; הם אחראים להבטחת הקשר בין הייצוג הבינארי והעשרוני (כמו צופן BCD), והם מרחיבים את תחום הנתונים המיוצג על ידם אל מעבר לתחום המספרים.

פרק 2 - מושגי יסוד בלוגיקה

2.1 פסוקים בלוגיקה

ההבחנה בין היסק נכון להיסק מוטעה היא הבעיה המרכזית שמעסיקה את הלוגיקה (תורת ההיגיון). השיטות והטכניקות של הלוגיקה פותחו, בראש ובראשונה, כדי להבהיר הבחנה זו. השימוש בשפת יום-יום מקשה בדרך כלל על ההבחנה: המילים והביטויים שבהם אנו משתמשים אינם חד-משמעיים, אלא טעונים משמעות רגשית או טקסית (בניסוחו של ביאליק: יש מלים - הררי-אל, ומלים - תהום רבה).

כדי להימנע מקשיים אלה ואחרים נוצרה שפה סמלית **מלאכותית** (להבדיל מהשפות הטבעיות, כדוגמת העברית). הסמלים המיוחדים של הלוגיקה מסייעים להציג טענות בבהירות וביעילות רבות יותר מאשר בשפה הטבעית.

מושג בסיסי בלוגיקה הוא פסוק. בשם פסוק מכנים משפט (בשפת דיבור כלשהי), שאפשר לייחס לו את הערך **אמת** או **שקר**, ורק אחד מהם. להלן דוגמאות אחדות:

- א. ישראל נמצאת במזרח התיכון (אמת).
- ב. פריז היא בירת אנגליה (שקר).
- ג. כל יונק הוא בעל חיים (אמת).
- ד. $12 = 8 + 5$ (שקר).

לא כל משפט הוא פסוק. לדוגמה: המשפט "תן לי, בבקשה, את הסוכר" אינו פסוק, כיוון שאי-אפשר לייחס לו את הערך אמת או שקל. מאותה סיבה, גם ביטוי מספרי כמו " $8+5$ " אינו פסוק. לעתים איננו יודעים מראש מה יהיה ערך הפסוק. לדוגמה: "מדינה פלונית נמצאת במזרח התיכון", הוא פסוק; נוכל לייחס לפסוק את הערך **אמת** או **שקר** כאשר נדע את שם המדינה.

דוגמה 2-1

אלו משפטים ברשימה שלפניך הם פסוקים, ואלו אינם פסוקים? לאלו מהפסוקים ניתן לייחס את הערך אמת, ולאלו את הערך שקר?

נסו להשיב - לפני שתקראו את הפתרון שבהמשך.

- א. סע כבר!
- ב. אני גר בקומה שלישית.
- ג. לכובע שלי שלוש פינות.
- ד. מתי יבוא המשיח?
- ה. המספר 5 גדול מן המספר 3 ($5 > 3$)
- ו. 3 ועוד 4 הם 7 ($3+4=7$)
- ז. 2 גדול מ-11 או שווה ל-11 ($2 \geq 11$)

פתרון

המשפטים א ו-ד אינם פסוקים, כיוון שאינם יכולים לקבל את הערך **אמת** או **שקר**.

המשפטים ב ו-ג הם פסוקים, וכל אחד מהם יכול לקבל אחד מן הערכים **אמת** או **שקר**.

המשפטים ה, ו, ז אף הם פסוקים; הם מתארים **עובדות מתמטיות**. ערכם של הפסוקים ה, ו הוא **אמת**, וערכו של הפסוק ז הוא **שקר**.

תרגול

שאלה 2.1

אלו מהמשפטים שלהלן הם פסוקים?

- א. חוזה, לך ברח!
- ב. לא יברח איש כמוני.
- ג. אין דבר העומד בפני הרצון.
- ד. מה השעה?
- ה. לא כל הנוצץ הוא זהב.
- ו. אסור לחלק באפס!
- ז. אל תחלק באפס!

כאמור, לכל פסוק אפשר לייחס אחד משני הערכים: **אמת** או **שקר**. **אמת** נהוג לסמן באות T (האות הראשונה של המלה האנגלית TRUE, שפירושה **אמיתי**). **שקר** נהוג לסמן באות F (האות הראשונה של המלה האנגלית FALSE, שפירושה **כוזב**).

מקובל לסמן פסוקים באמצעות אותיות. נסמן למשל את הפסוק "למכונית תקלה במנוע" באות Q. אם יש תקלה במנוע המכונית – הפסוק הוא אמיתי. לכן הערך הלוגי של Q יהיה T. אך אם אין תקלה במנוע המכונית, הפסוק הוא שקרי, ולכן ערכו הלוגי של Q יהיה F.

מן הראוי לחזור ולהדגיש, כי הערך של פסוק חייב להיות T או F בלבד, ולא תיתכן כל אפשרות אחרת. דבר זה נובע מעצם הגדרתו של פסוק.

שאלה 2.2

סמנו במחברת את הערך T או F ליד כל אחד מהפסוקים שלהלן ונמקו את הסימון. אם דרושים נתונים נוספים – ציינו זאת.

- א. מדינת ישראל נוסדה בתאריך 14.5.1948.
- ב. כל מה שנוצץ הוא זהב.
- ג. בשנת 2525 יבוא המשיח.
- ד. למלך צרפת יש כובע אדום.
- ה. סוקרטס נובח בקול רם.

2.2 קשרים

2.2.1 פסוקים פשוטים ופסוקים מורכבים

אפשר לבנות פסוק מכמה פסוקים פשוטים יותר. לדוגמה: **יוסף נולד במדינת ישראל, אבל אחיו חיים נולד בחו"ל.** פסוק כזה ייקרא **פסוק מורכב** משום שהוא ניתן לפירוק לפסוקים פשוטים יותר. לעומתו, **פסוק פשוט** אינו ניתן לפירוק כזה.

פסוק מורכב בנוי מצירוף של כמה פסוקים פשוטים. הקשר בין הפסוקים הפשוטים שבפסוק מורכב נעשה באמצעות **קשרים**. לדוגמה: המלה **אבל** בפסוק שהובא לעיל היא **קשר** (connective)

הפסוקים הפשוטים באותו פסוק מורכב הם:

יוסף נולד במדינת ישראל.
אחיו חיים נולד בחו"ל.

להלן דוגמאות נוספות לקשרים בפסוקים מורכבים:

אסע לים, **או** שאסע לבריכה.

השמש זרחה, **והשיטה** פרחה.

לא אחד בלבד עמד עלינו לכלותנו, **אלא** שבכל דור ודור עומדים עלינו לכלותנו.

הים נקי, **וגם** המציל נמצא.

בדוגמה 2-2 נדון בקשרים המקשרים בין פסוקים פשוטים שמהם בנוי פסוק מורכב.

דוגמה 2-2

דן ודנית שוחחו על הרגלי הרחצה שלהם בים.

אמר דן: אני רוחץ בים, אם הים נקי או שקט.

אמרה דנית: אני רוחצת בים, אם הים נקי וגם שקט.

מקץ זמן קצר דבק בדן הכינוי "דן הרחצן", ובדנית דבק הכינוי "דנית הבררנית". נמקו מדוע.

פתרון

דנית דורשת שהים יהיה נקי וגם שקט. היא תרחץ בים רק אם יתקיימו שני תנאים אלה **גם יחד**. דרישותיה של דנית מובהרות היטב בטבלה 2.1, המתארת באילו תנאים תרחץ דנית בים.

שני התנאים גם יחד	תנאי שני	תנאי אחד	
דנית תרחץ בים	הים נקי וגם שקט	הים שקט	הים נקי
לא	שקר	שקר	שקר
לא	שקר	אמת	שקר
לא	שקר	שקר	אמת
כן	אמת	אמת	אמת

טבלה 2.1

טבלת הרחצה בים של דנית

כיצד יש לקרוא את הטבלה?

נתבונן, למשל, בשורה המודגשת בטבלה 2.1.

אם **שקר** הוא שהים נקי, ואם **אמת** היא שהים שקט, אז **שקר** הוא שהים נקי וגם שקט.

ובלשון פשוטה:

אם הים שקט **ולא** נקי, **לא נכון** שהים גם שקט וגם נקי. לכן, במקרה זה דנית לא תרחץ בים.

התבוננות בטבלה 2.1 מלמדת, כי רק באחת מתוך ארבע האפשרויות יהיה למשפט המורכב הערך הלוגי **אמת**. בכל שאר המקרים יהיה הערך הלוגי של המשפט המורכב **שקר**. אם נסמן, כמקובל, שקר ב-F ואמת ב-T, נקבל את טבלה 2.2.

דנית תרחץ בים	הים נקי וגם שקט	הים שקט	הים נקי
לא	F	F	F
לא	F	T	F
לא	F	F	T
כן	T	T	T

טבלה 2.2

טבלת הרחצה בים של דנית – סימון לוגי

דרישתו של דן צנועה יותר. הוא מסתפק בכך שהים יהיה נקי או שהים יהיה שקט. דן ירחץ בים גם אם רק אחד משני תנאים אלה יתקיים. אם שני התנאים יתקיימו - בוודאי ירחץ דן בים. נראה זאת בטבלה 2.3. מטבלה זו אפשר ללמוד, כי רק במקרה אחד יהיה ערך המשפט המורכב שקר.

דן ירחץ בים	הים נקי וגם שקט	הים שקט	הים נקי
לא	F	F	F
כן	T	T	F
כן	T	F	T
כן	T	T	T

טבלה 2.3

טבלת הרחצה בים של דן – סימון לוגי

השוואה בין הטבלאות 2.2 ו-2.3 מלמדת שדנית בררנית יותר מדן, ושדן ירחץ בים גם במקרים שבהם דנית לא תרחץ. לכן אפשר לומר שהכינויים שדבקו בהם, "דן הרחצן" ו"דנית הבררנית", מתאימים להרגלי הרחצה שלהם.

תרגול

שאלה 2.3

אמנון ותמר "ברוגז". שניהם הוזמנו בטעות לאותה מסיבה. אם שניהם יגיעו למסיבה, המסיבה תבוטל. מארגני המסיבה החליטו שגם אם שניהם לא יגיעו למסיבה, המסיבה תבוטל. בכל מקרה אחר תתקיים המסיבה. ערכו, בעזרת סימון לוגי, טבלה של ביטול המסיבה. העמודות בטבלה יהיו: אמנון הגיע למסיבה, תמר הגיעה למסיבה, המסיבה בוטלה.

גם ו-או הם קשרים בסיסיים בין פסוקים. לא אף הוא קשר בסיסי, ונדון בו בהמשך סעיף זה. נפרט מושגים אלה ונמחיש אותם בדוגמאות.

2.2.2 הקשר "גם" (AND)

בשפת הדיבור הטבעית מבוטא הקשר **גם** במילים כגון: **גם, וגם, ו, עם זאת.**

את הקשר **גם** מסמנים על ידי הסימן $\wedge$.

נענין בזוג הפסוקים הפשוטים:

ירושלים היא בירת ישראל (P).

היום יום שני (Q).

מפסוקים פשוטים אלה נוכל להרכיב את הפסוק הבא:

ירושלים היא בירת ישראל והיום יום שני (Q ו-P).

את הפסוק המורכב האחרון נסמן כך: $P \wedge Q$

פסוק המורכב על ידי הקשר גם יקבל את הערך אמת אך ורק כאשר כל אחד משני הפסוקים המרכיבים אותו יקבל את הערך אמת. כל אחד מן המרכיבים (Q ו-P) יכול לקבל כל אחד משני הערכים T, F, לכן לגבי הזוג P, Q יכולים להתקיים $4 (= 2^2)$ מצבים שונים. בטבלה 2.4 רשומים ארבעת המצבים האפשריים של זוג הפסוקים P, Q והערך שמקבל הפסוק המורכב $P \wedge Q$ בכל מצב. טבלה כזו נקראת טבלת אמת. בטבלת אמת מפורטים כל הצירופים האפשריים של ערכי הפסוקים, וגם ערכי התוצאה המתקבלת מקישור הפסוקים באמצעות קשר. בטבלה 2.4 מוצגת טבלת האמת של הקשר גם המקשר בין שני פסוקים.

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

טבלה 2.4

טבלת האמת של הקשר **גם** (AND)

2.2.3 הקשר "או" (OR)

הקשר **או** בין P ו- Q יסומן כך: $P \vee Q$. משמעות הקשר **או** היא כמשמעות המלה **או** במשפט "אני רוחץ בים אם הים שקט או נקי".

כלומר: די לי שהים שקט או נקי כדי לרוחץ בים. אם הים שקט ונקי גם יחד מה טוב, כי אז בוודאי ארוחץ בים.

בשפה העברית יש למלה **או** שתי אפשרויות:

1. או כולל (inclusive OR)

דוגמה לכך הובאה זה עתה. דוגמה נוספת: אקנה נגן-מוסיקה חדש אם אקבל תוספת למשכורת, או אם אזכה בפיס (או אם שניהם גם יחד יקרו).

2. או מוציא (eXclusive OR – XOR)

דוגמה: אלך לשחות בים או בבריכה (אך לא בשניהם).
דוגמה נוספת: אתחיל ללמוד היום או מחר. לא ניתן להתחיל ללמוד גם היום וגם מחר.

בהמשך הספר נשתמש במלה **או** במשמעותה הראשונה (או כולל), * כפי שמקובל בלוגיקה.

בהתאם לכך, טבלת האמת של הקשר **או** מוצגת בטבלה 2.5.

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

טבלה 2.5

טבלת האמת של הקשר **או** (OR)

תרגול 

2.4 שאלה

נתונים שני הפסוקים הפשוטים:

היום קצר.

המלאכה מרובה.

הציבו AND ו-OR (בנפרד) בין שני פסוקים אלה, ורשמו את הפסוקים המורכבים המתקבלים.

* יש המשתמשים בצורה "ו/או" כדי לציין **או כולל**; והצורה "או" משמעותה אצלם **או מוציא**.

2.2.4 הקשר "לא" (NOT)

עד כה עסקנו בקשרים הפועלים בין שני פסוקים, אך קיים גם קשר הפועל על פסוק יחיד. זהו קשר השלילה **לא**. אם נסמן פסוק באות P , שלילת הפסוק תסומן כך: $\sim P$. משמעותו: לא P , כלומר: קשר זה הופך את הערך הלוגי של הפסוק. נדגים זאת:

נתון פסוק P : הים נקי.

שלילת הפסוק P : הים אינו נקי. ($\sim P$).

צורה מילולית נוספת לשלילת הפסוק P : אין זה נכון שהים נקי.

טבלת האמת של קשר השלילה מוצגת בטבלה 2.6.

P	$\sim P$
F	T
T	F

טבלה 2.6

טבלת האמת של קשר השלילה (לא)

שאלות חזרה לפרק 2

שאלה 2.5

1. זהו מי מבין המשפטים הבאים הם פסוקים.

- הזקן של הרצל
- החיפזון מן השטן
- העיניים של יוכבד
- העיניים שלי כחולות
- אם היום חם, אזי המזגן דולק
- קוראים לי יוסף ואני חושב שנחמד במצרים
- כל כלב בא יומו
- צא החוצה!
- $100 = 35 + 48$
- האם העיניים של יוכבד כחולות?

2. מי מבין המשפטים שזיהיתם כפסוקים הם פסוקי אמת ומי מהם הם פסוקי שקר?

3. מי מבין המשפטים שזיהיתם כפסוקים הם פסוקים מורכבים?

שאלה 2.6

נניח שערכי האמת של הפסוקים הבאים הם:

היום יום שבת – מסומן כ- X

נסע לים – מסומן כ- Y

נרחץ בים – מסומן כ- Z

כתבו מילולית את הפסוקים המורכבים הבאים:

א. $X \cdot Y \cdot \sim Z$

ב. $X \cdot Y \cdot Z$

ג. $\sim X \cdot \sim Y \cdot \sim Z$

שאלה 2.7 – רשות

בשפה יום-יומית אין הבחנה ברורה בין קשרים מסוג **או כולל**, כפי שלמדנו בפרק זה, המסומן באמצעות $+$, לבין קשרים מסוג **או מוציא** (exclusive or) המסומן באמצעות $\oplus$.

נתאר את ערכי האמת של שני הפסוקים המורכבים האלו בתלות בפסוקים הפשוטים המרכיבים אותם באמצעות טבלת אמת 2.7

X	Y	$X + Y$	$X \oplus Y$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

טבלה 2.7

טבלת אמת עבור הקשר **או מוציא**

זהו בפסוקים הבאים באיזה סוג של **או** מדובר.

א. רצוי לבחור בגבר (או אישה) שהוא (היא) יפה **או** חכם (חכמה).

ב. בצומת מותר למכוניות להמשיך ישר **או** לפנות ימינה.

ג. התנאים להרשעתו של נאשם הם שהנאשם מודה באשמה **או** ששני עדים מעידים שראו אותו בשעת ביצוע העבירה.

ד. המספר הזוכה הוא מספר ראשוני **או** מספר זוגי הגדול מ-4.

סיכום פרק 2

- ניתן לייחס לפסוק את הערך **אמת** או **שקר** ורק אחד מהם. **אמת** נהוג לסמן על ידי האות **T** ו**שקר** - על ידי האות **F**.
- פסוק מורכב בנוי מצירוף של כמה פסוקים פשוטים. הקשר בין הפסוקים נעשה באמצעות קשרים.
- להלן טבלאות אמת של הקשרים **גם**, **או**, **לא**:

P	$\sim P$
F	T
T	F

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

טבלה 2.8
טבלת קשרים **גם**, **או**

פרק 3 - יסודות האלגברה הבוליאנית

3.1 פעולות, ביטויים, ופונקציות באלגברה הבוליאנית

3.1.1 פעולות בסיסיות

העקרונות המתמטיים שעליהם מבוססת פעולתן של מערכות ספרתיות (ובניהן המחשב) ידועים בשם **אלגברה של מיתוג**. אלגברה זו היא מקרה פרטי של תחום רחב יותר במתמטיקה המכונה **אלגברה בוליאנית**. *

באלגברה של המיתוג דנים בפעולות על משתנים שיכולים לקבל אחד **משני ערכים בלבד: 0 ו-1**. מבחינה זו, קיים דמיון רב בין האלגברה של המיתוג לבין תחשיב הפסוקים, שבו יכולים הפסוקים לקבל את הערך אמת** (T) או שקר (F) בלבד. בפרק זה ניוכח שקיים דמיון בין שני התחומים שהזכרנו, גם באשר לפעולות על המשתנים או בין הפסוקים.

הדמיון נעוץ בכך שתחשיב הפסוקים הוא מקרה פרטי של האלגברה הבוליאנית. במקרים רבים משתמשים בשם אלגברה בוליאנית גם כאשר מתכוונים לאלגברה של המיתוג. ***

באלגברה של המיתוג מניחים שקיימים הסמלים 0 ו-1, וכן שקיימות שלוש הפעולות AND, OR, NOT. פעולות אלה נקראות **פעולות בוליאניות**.

שלוש פעולות בוליאניות אלה מוגדרות בצורה זהה לגמרי לפעולות גם, או ולא שהגדרנו בפרק הקודם. הפעולות מופעלות על משתנים בינאריים, על קבועים בינאריים או על צירוף שלהם. **משתנה בינארי** הוא משתנה היכול לקבל את אחד משני הערכים: 0 או 1. **קבועים בינאריים** הם כל אחד משני הערכים: 0 או 1. משתנים בינאריים וקבועים בינאריים מכונים לעתים קרובות גם **משתנים בוליאניים וקבועים בוליאניים**, בהתאמה.

בסעיף 2.2 השתמשנו בסימנים $\wedge, \vee, \sim$ לסימול הפעולות AND, OR, NOT – בהתאמה.

האם נוכל להשתמש בסמלים המקובלים באלגברה הרגילה כדי לסמן את הפעולות הבוליאניות?

* עקרונות האלגברה הבוליאנית הונחו על ידי המתמטיקאי האנגלי ג'ורג' בול (George Boole, 1864-1815). שפיתח את "המתמטיקה של החשיבה" וקרא לה **אלגברה של המיתוג**.

** T=TRUE, F=FALSE

*** אחד ההבדלים בין אלגברה בוליאנית לבין אלגברה של המיתוג נעוץ בכך שבראשונה מספר הערכים שהמשתנים יכולים לקבל אינו מוגבל בהכרח לשניים.

כדי לבדוק רעיון זה, נכתוב להלן את פעולות החיבור והכפל בין המספרים 0, 1.

כפל	חיבור
$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$
$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 2$

עתה נרשום את הפעולות AND, OR. נשתמש בסימנים $(\cdot, +)$, אך במשמעות שונה.*

AND	OR
$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$
$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 1$

השוואה בין הטבלאות מלמדת שקיים דמיון מלא בין תוצאות פעולת הכפל (עבור המספרים 0, 1) לבין תוצאות פעולת AND. לכן מקובל לסמן את פעולת AND בסימן הכפל ($\cdot$) ולכנות אותה **כפל בוליאני**: " $A \cdot B$ " (וגם B). לפעמים מוותרים על הנקודה ורשמים " AB ").

פעולת הכפל ופעולת הכפל הבוליאני הן שתי פעולות שונות, אבל בשל הדמיון ביניהן הן מסומלות באותו סימן.

באיזה סימן נשתמש לסימול הפעולה OR?

אנו רואים שאין דמיון מלא בין טבלת הפעולה OR לבין טבלת החיבור, ובכל זאת משתמשים בסימן "+" לסימול פעולת OR. מקובל לקרוא לפעולה OR **חיבור בוליאני**:

$A+B$ (או B או שניהם).

לצורך סימון פעולת NOT נשתמש בקו מעל לביטוי הלוגי: $\bar{A}$ (קראו: לא A). פעולה זו נקראת גם **היפוך בוליאני**. $\bar{A}$ נקרא גם בשם **המשלים הבוליאני** של A . תוצאת פעולת NOT על הקבועים הבוליאניים הן:

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

* שימו לב לשלוש משמעויות שונות של הפעולות $1 + 1$:

חיבור בבסיס 10: $1 + 1 = 2$

חיבור בבסיס 2: $1 + 1 = 10$

פעולת OR: $1 + 1 = 1$

3.1.2 ביטויים בוליאניים וסדר הביצוע של פעולות בוליאניות

ביטוי בוליאני הוא צירוף מסוים של משתנים בוליאניים (כגון X, Y) וקבועים בוליאניים (0 ו-1), הקשורים ביניהם בפעולות בוליאניות (NOT, OR, AND) לדוגמה: $X + Y$ הוא ביטוי בוליאני המורכב מהמשתנים X, Y והם קשורים ביניהם על ידי חיבור בוליאני.

אם נתונים שני ביטויים בוליאניים כגון:

$$P = X + Y$$

$$Q = Z \cdot U$$

ונפעיל עליהם פעולות בוליאניות כלשהן, התוצאה שתתקבל תהיה אף היא ביטוי בוליאני.

למשל: אם נקשור את P ואת Q על ידי כפל בוליאני, נקבל ביטוי חדש R :

$$R = P \cdot Q = (X + Y) \cdot Z \cdot U$$

הסוגריים בביטוי האחרון קובעים את סדר ביצוע הפעולות בעת חישוב ערכו של הביטוי R : תחילה מבצעים את הפעולה בתוך הסוגריים (כדי לקבל את ערך הביטוי P), ולאחר מכן מכפילים ב- Q .

באופן כללי, סדר ביצוע הפעולות הבוליאניות נקבע, כמו באלגברה הרגילה, לפי הסוגריים – מן הסוגריים הפנימיים אל הסוגריים החיצוניים.

בהיעדר סוגריים, יבוצעו הפעולות הלוגיות בהתאם לסדר הקדימויות הבא:

קדימות ראשונה: שלילה (NOT)

קדימות שנייה: גם (AND)

קדימות שלישית: או (OR)

פעולות בוליאניות בעלות אותה קדימות יבוצעו לפי הסדר, משמאל לימין.

כדי לחשב את ערכו של ביטוי בוליאני עבור ערכים נתונים של משתנים, יש להציב תחילה את כל ערכי המשתנים המופיעים בו. לאחר מכן יש לבצע את הפעולות כפי שהן מופיעות בביטוי – ולפי הסדר שתואר לעיל. נבהיר את התהליך בעזרת דוגמה 3-1.

דוגמה 3-1

חשבו את ערך הביטוי הבוליאני $\bar{A} + C + A + \bar{B} \cdot C + A \cdot \bar{C}$

אם נתון: $A=0; B=0; C=1$

פתרון

נציב בביטוי את הערכים הנתונים:

$$1 + 1 + 0 + \overbrace{1 \cdot 1}^{\text{ב}} + \overbrace{0 \cdot 0}^{\text{ב}} = 1 + 1 + 1 = ?$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{א} & \text{א} & \text{א} \end{array}$$

א – קדימות ראשונה.

ב – קדימות שנייה: הכפל הבוליאני.

ולבסוף – החיבור.

מה תוצאת החיבור הבוליאני $1 + 1 + 1$?

$$1 + 1 + 1 = \underbrace{(1 + 1)}_1 + 1 = 1 + 1 = 1$$

 תרגול

שאלה 3.1

חשבו את ערכי הביטויים הבוליאניים הבאים. אם נתון כי:

$$A=0 \quad ; \quad B=1 \quad ; \quad C=0$$

$$\text{א. } \bar{A} \cdot B + C + \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$\text{ב. } B \cdot C + A \cdot \bar{C} + B$$

$$\text{ג. } \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B + B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{C}$$

3.1.3 פונקציות בוליאניות

נניח שנתון ביטוי בוליאני המכיל n משתנים $(X_n, \dots, X_2, X_1)$. מאחר שכל משתנה יכול לקבל רק אחד משני הערכים (0 או 1), קיימים 2^n צירופים אפשריים שונים של ערכי המשתנים. פונקציה בוליאנית $f(X_n, \dots, X_2, X_1)$ היא כלל-התאמה המייחד ערך בוליאני מסוים לכל אחד מ- 2^n הצירופים האפשריים של n משתני הפונקציה.

אפשר לתאר פונקציה בוליאנית באמצעות ביטוי בוליאני. לדוגמה:

$$f(A, B, C) = \bar{A} \cdot B + C$$

עבור $C=0, B=0, A=0$ נקבל:

$$f(0,0,0) = \bar{0} \cdot 0 + 0 = 0$$

כדי לקבל את ערכי הפונקציה $f(A, B, C)$, נצטרך להמשיך ולהציב את כל ערכי המשתנים C, B, A בביטוי של $f(A, B, C)$; עבור כל צירוף כזה נקבל ערך מסוים של הפונקציה. בדוגמה הנתונה יש $8 (=2^3)$ צירופים שונים של משתני הפונקציה.

דרך נוספת לתיאור פונקציה בוליאנית היא להשתמש בטבלת אמת, שמציגה את כל הצירופים האפשריים של משתני הפונקציה ואת ערך הפונקציה עבור כל צירוף.

לעתים מעוניינים להמיר תיאור פונקציה - המתוארת באמצעות ביטוי בוליאני - בתיאור באמצעות טבלת אמת. דוגמה 3-2 תמחיש זאת.

דוגמה 3-2

רשמו את טבלת האמת של הפונקציה

$$f(A, B, C) = \bar{A} \cdot B + C$$

פתרון

זוהי פונקציה של שלושה משתנים: A, B ו- C . לכן קיימים $8 (=2^3)$ צירופים שונים של ערכי המשתנים הללו. נרשום את כל הצירופים (טבלה 3.1) ונחשב את ערך הפונקציה של כל הצירופים. שימו לב לעמודות העזר שנוספו לטבלת האמת. תפקידן של עמודות עזר לסייע בחישוב ערכי הפונקציה.

עמודות עזר

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{A} \cdot B$	$f(A, B, C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

טבלה 3.1

טבלת האמת של הפונקציה $f(A, B, C) = \bar{A} \cdot B + C$

נתבונן בסימון $f(A, B, C)$ שבחרנו לפונקציה שהדגמנו זה עתה, ונשווה אותו לסימול $f(X_n, \dots, X_2, X_1)$ המופיע בהגדרת הפונקציה הבוליאנית. ניתן להבחין כי האות C מתאימה ל- X_1 , B מתאימה ל- X_2 ו- A מתאימה ל- X_3 . התאמה זו היא **שרירותית**. באותה מידה יכולנו לסמן את הפונקציה באמצעות $f(C, B, A)$ ואז ההתאמה הייתה בסדר הפוך.

אם נתבונן בצירוף האותיות ABC כמספר בינארי, אזי A היא הסיבית המשמעותית ביותר (MSB) ו- C – הסיבית הפחות משמעותית (LSB). זהו המצב, למשל, בטבלת האמת המוצגת בטבלה 3.1. לעומת זאת, בצירוף CBA , האות A היא הסיבית הפחות משמעותית והאות C היא הסיבית המשמעותית ביותר. ואמנם ישנם ספרים שבהם רושמים את המשתנים הבוליאניים בפונקציות או בטבלאות אמת לפי הסדר C, B, A וכדומה.

מאחר שהבחירה שרירותית ושתי שיטות הסימון נפוצות בחרנו, לאורך יחידת הלימוד הזו, בסימון $f(A, B, C)$.

 תרגול

שאלה 3.2

רשמו את טבלת האמת של הפונקציה $f(A, B, C) = \bar{A} \cdot A \cdot \bar{B} + \bar{C}$

3.2 כללים יסודיים באלגברה בוליאנית

בסעיף זה נלמד כללים של אלגברה בוליאנית. באמצעות כללים אלה נוכל לפשט ביטויים בוליאניים או לשנות את המבנה שלהם. בדרך זו אפשר לקבל ביטוי זהה לביטוי נתון.

הביטוי הזהה יקבל אותם ערכים כמו הביטוי הנתון, בכל צירוף אפשרי של ערכי המשתנים בביטוי הנתון.

תחילה נלמד כיצד מוכיחים, באמצעות טבלת אמת, ששני ביטויים הם זהים. בהמשך נשתמש בכללים ליצירת ביטוי זהה לביטוי נתון.

3.2.1 זהויות בוליאניות

בשם **זהות בוליאנית** מכנים שני ביטויים בוליאניים השווים עבור כל צירופי הערכים האפשריים של משתני הביטויים. אחת הדרכים להוכיח זהות היא לבדוק אם השוויון מתקיים ביחס לכל צירוף אפשרי של המשתנים המופיעים משני צדי סימן השוויון. לשם כך נעזרים בטבלת אמת.

דוגמה 3-3

הוכיחו בעזרת טבלת אמת את הזהות:

$$\overline{(A \cdot B + B)} = \bar{B}$$

שימו לב: הקו הארוך מעל לביטוי השמאלי מתאר היפוך של כל הרשום מתחתיו.

פתרון

זוהי פונקציה של שני משתנים: A ו-B. קיימים $2^2 = 4$ צירופים אפשריים של ערכי המשתנים הללו. נרשום את כל הצירופים (טבלה 3.2) ונחשב את ערך הפונקציה של כל הצירופים. שימו לב לעמודות העזר שנוספו לטבלת האמת. הן נועדו לסייע בחישוב ערכי הפונקציה.

עמודות המשתנים		עמודות עזר				
A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \cdot B$	$\bar{A} \cdot B + B$	$\overline{\bar{A} \cdot B + B}$	$\bar{B}$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

טבלה 3.2

טבלת האמת להוכחת הזהות $\overline{\bar{A} \cdot B + B} = \bar{B}$

בשני האגפים (טבלה 3.2) קיבלנו אותם ערכים. עובדה זו מוכיחה את הזהות המבוקשת.

תרגול

שאלה 3.3

- הוכיחו בעזרת טבלת אמת כי: $X \cdot (X + \bar{X}) = X$.
- הוכיחו בעזרת טבלת אמת את הזהות: $\overline{\bar{X} + Y} + X = X$.
- בדקו בעזרת טבלת אמת אם הביטוי $A + (\bar{A} \cdot B)$ מקבל ערך 1 לכל צירוף של המשתנים A ו-B.
- האם לביטוי $(P \cdot Q) \cdot (\overline{P + Q})$ ערך 0 עבור כל צירוף של P ו-Q?

שאלה 3.4

הוכיחו בעזרת טבלת אמת את הזהויות הבאות:

- $(\overline{P + Q}) + \bar{P} \cdot Q = \bar{P}$
- $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} + A \cdot \bar{C}$

3.2.2 כללים בוליאניים לגבי משתנה אחד

בתת-סעיף זה נעסוק בכללים של האלגברה הבוליאנית החלים על משתנה אחד. בהמשך נכיר כללים נוספים הקשורים לשני משתנים או יותר. אין חובה לזכור את שמות הכללים, אך יש לדעת לרשום את הזהויות הנקבעות על ידם.

חלק מהכללים שנכיר בתת-סעיף זה ננסח באמצעות דוגמאות.

דוגמה 3-4

- א. רשמו את טבלת האמת של הביטוי $A \cdot \bar{A}$
- ב. רשמו את הזהות הבוליאנית שאפשר להסיק מטבלת האמת שרשמתם.
- ג. נסחו במלים את הזהות שקיבלתם.

פתרון

- א. טבלת האמת של הביטוי $A \cdot \bar{A}$ מוצגת בטבלה 3.3.

עמודת עזר

A	$\bar{A}$	$A \cdot \bar{A}$
0	1	0
1	0	0

טבלה 3.3

טבלת אמת של הביטוי $A \cdot \bar{A}$

- ב. לפי טבלת האמת בטבלה 3.3 אפשר לרשום:

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

זוהי זהות, מאחר שבדקנו את ערך הביטוי $A \cdot \bar{A}$ לגבי כל האפשרויות (יש רק שתי אפשרויות: $A=1$, $A=0$), וביחס לכל אפשרות קיבלנו אותה תוצאה: 0. זהות זו נקראת **כלל ההיפוך הכפלי**.

- ג. תוצאת פעולת AND בין משתנה בוליאני לבין שלילתו היא תמיד 0.

כדי להבין היטב את משמעותה של הזהות $A \cdot \bar{A} = 0$, מובאת כאן דוגמה מהתחום של תחשיב פסוקים: סמדר אומרת למוכר, "אני מעוניינת בשטיח שאורכו עולה על 200 ס"מ ושאורכו גם אינו עולה על 200 ס"מ". ברור שדרישה כזו לא תתקיים לעולם.

תרגול

שאלה 3.5

יורם טוען: "אני צופה בטלוויזיה בכל תכנית שנמשכת פחות משעה, או שנמשכת שעה ויותר".

א. כתבו ביטוי בוליאני המתאים לתנאי שלו. סמנו באות A את הפסוק: "תכנית הטלוויזיה נמשכת שעה ויותר".

ב. כתבו טבלת אמת על פי טענתו של יורם.

ג. איזו זהות אפשר להסיק מטבלת האמת?

ד. בטאו את הזהות באופן מילולי.

ה. אילו תכניות טלוויזיה ממלאות את דרישותיו של יורם?

דוגמה 3-5

א. כתבו את טבלת האמת של הביטוי $\bar{\bar{A}}$.

ב. איזו זהות אפשר להסיק מטבלת אמת זו?

פתרון

א. טבלת האמת של הביטוי $\bar{\bar{A}}$ מוצגת בטבלה 3.4

A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$
0	1	0
1	0	1

טבלה 3.4

טבלת אמת של הביטוי $\bar{\bar{A}}$

ב. מטבלה 3.4 אפשר להסיק את הזהות הבאה:

$$\bar{\bar{A}} = A$$

זהות זו נקראת כלל השלילה הכפולה.**

הזהות שקיבלנו בדוגמה 3-5 ידועה גם מהשימוש הרגיל בלשון: אם שוללים פעמיים טענה כלשהי מקבלים שוב אותה טענה.

לדוגמה: קיבלתי תעודת "הנדסאי".

*משמעות הביטוי $\bar{\bar{A}}$ היא $(\bar{\bar{A}})$ כלומר שלילה של השלילה.

** כלל השלילה הכפולה $\bar{\bar{A}} = A$

שלילה כפולה:

זה לא נכון שלא קיבלתי תעודת "הנדסאי".

מהי תוצאת פעולת OR, ומהי תוצאת פעולת AND בין ביטוי לוגי לבין עצמו?

נמחיש את השאלה באמצעות שני הפסוקים הבאים:

אני רוחץ בים, אם הוא נקי וגם נקי.

אני רוחץ בים, אם הוא נקי או נקי.

האם קיימות כפילויות מיותרות בפסוקים אלה?

נשיב על שאלות אלה בעזרת טבלאות אמת. לשם כך נסמן ב- A את הפסוק "הים נקי".

השאלה לעיל תקבל עתה את הצורה: מה ערכם של הביטויים הבוליאניים הבאים:

$$A + A = ? \quad A \cdot A = ?$$

נוכל לחשב את ערכי הביטויים באמצעות טבלאות אמת, כמתואר בטבלה 3.5.

A	A	$A \cdot A$	$A + A$
0	0	0	0
1	1	1	1

טבלה 3.5

טבלאות אמת של הביטויים $A \cdot A$ ו- $A + A$

מתוך הטבלאות ברור שמתקיימות הזהויות הבוליאניות הבאות:

$$A + A = A \quad \text{כלל הכפילות החיבורית}$$

$$A \cdot A = A \quad \text{כלל הכפילות הכפלית}$$

כלומר: תוצאת פעולת OR ופעולת AND בין משתנה בוליאני לבין עצמו שווה למשתנה המקורי. קיימת אפוא כפילות מיותרת בשני הפסוקים שלעיל.

3.2.3 פעולות בין משתנה בוליאני לקבועים בוליאניים

עד כה עסקנו בפעולות בין משתנים. כעת נביא כללים לפעולות בין משתנה בוליאני לבין קבוע בוליאני.

דוגמה 3-6

הוכיחו את כלל האפס הכפלי: $A \cdot 0 = 0$.

פתרון

התבוננו בטבלה 3.6:

A	0	$A \cdot 0$
0	0	0
1	0	0

טבלה 3.6

טבלת אמת עבור כלל האפס

תוצאת פעולת AND בין משתנה בוליאני לבין הקבוע 0 היא תמיד 0.

תרגול

שאלה 3.6

הוכיחו בעזרת טבלת אמת את כלל האפס החיבורי:

$$A + 0 = A$$

שאלה 3.7

הוכיחו בעזרת טבלת אמת את כללי היחידה*:

א. $A \cdot 1 = A$

ב. $A + 1 = 1$

* כללי היחידה: $A \cdot 1 = A$ כלל הכפל ביחידה

$A + 1 = 1$ כלל חיבור היחידה

כלל הכפל ביחידה מתקיים גם באלגברה רגילה.

כלל חיבור היחידה **שונה** באלגברה רגילה (מלבד עבור $A = 0$).

3.2.4 כללים לגבי מספר משתנים

נכיר כעת כמה כללים נוספים שיעזרו לנו לטפל בביטויים בוליאניים מורכבים. כללים אלה חלים על שני משתנים או יותר.

כללי החילוף (commutation rules)

בפעולת חיבור או כפל בין ביטויים בוליאניים מותר להחליף את הסדר בין הביטויים והתוצאה לא תשתנה. כלומר:

א. $X + Y = Y + X$

ב. $X \cdot Y = Y \cdot X$

אלה כללי החילוף. נוכיח כללים אלה בעזרת טבלאות האמת הבאות (בטבלה 3.7):

		אגף שמאל	אגף ימין
X	Y	$X \cdot Y$	$Y \cdot X$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1

ב

		אגף שמאל	אגף ימין
X	Y	$X + Y$	$Y + X$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1

א

טבלה 3.7

כללי החילוף בחיבור (א) ובכפל (ב)

כללי הקיבוץ (association rules)

בפעולות AND או OR בין ביטויים בוליאניים אפשר לקבץ כל שני ביטויים (או יותר) בלי שתוצאת הפעולות תשתנה. כלומר:

א. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

ב. $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$

שאלה 3.8

בדקו את נכונות כללי הקיבוץ באמצעות טבלת אמת.

כללי הפילוג (distribution rules)

א. כלל הפילוג של כפל בוליאני ביחס לחיבור בוליאני

כלל פילוג זה קושר את פעולת הכפל והחיבור הבוליאניים בצורה הבאה:

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$$

כלל זה מוכר לנו מהאלגברה הרגילה.

נוכיח כלל זה בעזרת טבלת אמת. ערכי אגף ימין (טבלה 3.8) זהים לערכי אגף שמאל עבור כל אחד מהמצבים האפשריים, ובכך הוכח הכלל.

				אגף שמאל			אגף ימין
X	Y	Z	Y + Z	$X \cdot (Y + Z)$	$X \cdot Y$	$X \cdot Z$	$X \cdot Y + X \cdot Z$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

טבלה 3.8

כלל הפילוג של כפל בוליאני ביחס לחיבור בוליאני

ב. כלל הפילוג של חיבור בוליאני ביחס לכפל בוליאני

כלל פילוג זה כולל אף הוא פעולות כפל וחיבור, אך בצורה שונה:

$$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$$

כלל פילוג ב אינו מתקיים באלגברה הרגילה, אך מתקיים באלגברה הבוליאנית. בסעיף הבא נוכיח בדרך קצרה את כלל פילוג ב באמצעות כלל פילוג א.

שאלה 3.9

הוכיחו את נכונותו של כלל הפילוג ב – באלגברה בוליאנית

3.3 עקרון הדואליות

לכל ביטוי בוליאני אפשר להתאים **ביטוי דואלי** על ידי הפיכת כל פעולת AND בביטוי המקורי לפעולת OR, וכל פעולת OR - לפעולת AND, וכן על ידי החלפת כל ערך 0 בביטוי המקורי לערך 1 ולהיפך. את המשתנים עצמם נשאיר ללא שינוי.

לדוגמה: נתון הביטוי

$$(1 + A) \cdot (B + 0)$$

הביטוי הדואלי שלו הוא

$$(0 \cdot A) + (B \cdot 1)$$

לכל אחד מכללי האלגברה הבוליאנית קיים כלל דואלי. במלים אחרות: אם נחליף את האגפים של שוויון בוליאני מסוים בביטויים הדואליים המתאימים, השוויון ימשיך להתקיים. לדוגמה: נתבונן בכלל האפס

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A + 0 = A$$

אם נציב בשני האגפים של שתי זהויות אלה את הביטויים הדואליים, נקבל:

$$A + 1 = 1$$

$$A \cdot 1 = A$$

כלומר: קיבלנו את כללי היחידה.

תכונה זו, שמאפשרת להחליף את האגפים של זהות נתונה בביטויים הדואליים שלהם ולקבל זהות חדשה, מכונה **עקרון הדואליות**. לפי עיקרון זה:

הצורה הדואלית של כלל באלגברה בוליאנית גם היא כלל באלגברה זאת

במלים אחרות: נתון שוויון בוליאני כלשהו. נרשום את הביטוי הדואלי של כל אחד מאגפי השוויון. לפי עקרון הדואליות, גם בין שני הביטויים הדואליים יתקיים שוויון.

אפשר לאמת קביעה זו באמצעות שימוש בצורה הדואלית של כל צעד בהוכחת השוויון המקורי. למשל, במקרה הקודם: $B = (B + 0) \cdot (1 + A)$.

מיד ניווכח כי מתקיים גם השוויון הדואלי: $B = (B \cdot 1) + (0 \cdot A)$.

שלבי ההוכחה של השוויון המקורי

$$\begin{aligned} & (1 + A) \cdot (B + 0) \\ &= 1 \cdot (B + 0) \\ &= 1 \cdot B \\ &= B \end{aligned}$$

הביטוי הדואלי – בכל שלב

$$\begin{aligned} & (0 \cdot A) + (B \cdot 1) \\ &= 0 + (B \cdot 1) \\ &= 0 + B \\ &= B \end{aligned}$$

במקרה זה, האגף הימני בשוויון המקורי ובשויון הדואלי שווה ל-B, כי הביטוי הדואלי של B אף הוא B.

 תרגול

שאלה 3.10

- א. כתבו את הביטויים הדואליים לאגפי השוויון: $(X \cdot 1) \cdot (0 + \bar{X}) = 0$.
- ב. הוכיחו את נכונות השוויון המקורי (כלומר, הוכיחו שזוהי זהות), ורשמו את הביטויים הדואליים – בכל שלב ושלב.
- ג. כתבו את הביטויים הדואליים לאגפי השוויון: $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$.

3.4 כללי צמצום

מלבד הכללים שהוכחנו עד כה, קיימים כללים נוספים לפישוט ביטויים לוגיים. כללים אלה נקראים **כללי צמצום** (absorption rules) או **כללי ספיגה**.

פישוט (או צמצום) משמעותו, מציאת ביטוי לוגי זהה לביטוי המקורי, אך כזה שמכיל בדרך כלל פחות משתנים ופחות פעולות לוגיות.

את הכללים היסודיים שלמדנו בסעיפים הקודמים אפשר היה להוכיח אך ורק בעזרת טבלת אמת. את הכללים שנלמד בסעיף זה אפשר להוכיח גם ללא טבלת אמת. נעשה זאת תוך הסתמכות על הכללים היסודיים (שחלקם נלמד כבר) בדרך הוכחה הנקראת **הוכחה אלגברית**.

הוכחת זהויות בוליאניות בעזרת טבלת אמת היא דרך יעילה כל עוד מספר הצירופים הדורש בדיקה אינו גדול. במקרים שבהם מספר הצירופים גדול, עדיפה שיטת ההוכחה האלגברית. בסעיף זה נכיר את כללי הצמצום העיקריים, ונוכיח כל אחד מהם בדרך אלגברית.

[1] כלל הצמצום הראשון

$$X + (X + Y) = X$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} X + (X \cdot Y) &= X \cdot 1 + X \cdot Y \\ &= X \cdot (1 + Y) \\ &= X \cdot 1 \\ &= X \end{aligned}$$

לפי כלל הכפל ביחידה

לפי כלל הפילוג

לפי כלל חיבור היחידה

לפי כלל הכפל ביחידה

[2] כלל הצמצום השני

כלל זה דואלי לכלל הצמצום הראשון:

$$X \cdot (X + Y) = X$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} X \cdot (X + Y) &= X \cdot X + X \cdot Y \\ &= X + (X \cdot Y) \end{aligned}$$

לפי כלל הפילוג

לפי כלל הכפילות

$$X + X \cdot Y = X$$

אבל לפי כלל הצמצום הראשון שהוכחנו זה עתה

$$X \cdot (X + Y) = X$$

ולכן:

[3] כלל הצמצום השלישי

$$X + \bar{X} \cdot Y = X + Y$$

הוכחה:

במקום X באגף שמאל נציב את הביטוי $X + X \cdot Y$ * ונקבל

$$X + X \cdot Y + \bar{X} \cdot Y$$

* לפי כלל הצמצום הראשון: $X = X + X \cdot Y$

$X + X \cdot Y + \bar{X} \cdot Y$ $= X + (X + \bar{X}) \cdot Y$ $= X + 1 \cdot Y$ $= X + Y$	במקום X באגף שמאל נציב את הביטוי $X + X \cdot Y$ ונקבל נוציא את Y אל מחוץ לסוגריים, לפי כלל הפילוג: לפי כלל ההיפוך החיבורי לפי כלל היחידה
---	--

[4] כלל הצמצום הרביעי

כלל זה דואלי לכלל הצמצום השלישי:

$$X \cdot (\bar{X} + Y) = X \cdot Y$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
 X \cdot (\bar{X} + Y) &= X \cdot \bar{X} + X \cdot Y \\
 &= 0 + X \cdot Y \\
 &= X \cdot Y
 \end{aligned}$$

לפי כלל הפילוג

לפי כלל ההיפוך

לפי כלל האפס

 תרגול

שאלה 3.11

הוכיחו בעזרת טבלאות אמת את ארבעת כללי הצמצום שהוצגו בסעיף זה.

כאמור, ניתן להשתמש בכללי הצמצום בהמרת ביטויים בוליאניים מורכבים לביטויים פחות מורכבים.

נדגים זאת בעזרת דוגמה 3-7 שלהלן.

דוגמה 3-7

פשטו את הביטויים הבאים:

א. $AB + AB\bar{C}D$

ב. $A + B\bar{C} + (A + B\bar{C})\bar{A}$

* לפי כלל הצמצום הראשון: $X = X + X \cdot Y$

* מעתה נוותר לעתים על הסימן "·" לציון פעולת AND.

פתרון

א. לפי כלל הצמצום הראשון:

$$AB + AB\bar{C}D = (AB) + (AB) \cdot (\bar{C}D) = (AB)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & X & + & X & \cdot & Y & = & X \end{array}$$

ב. לפי כלל הצמצום השלישי:

$$\underbrace{(A + B\bar{C})}_X + \underbrace{\overline{(A + B\bar{C})}}_{\bar{X}} \underbrace{(\bar{A}B)}_X + \underbrace{(\bar{A}B)}_Y$$

$= (A + \bar{A}B) + B\bar{C}$	לפי כלל הקיבוץ וכלל החילוף
$= A + B + B\bar{C}$	לפי כלל הצמצום השלישי
$= A + (B + B\bar{C})$	לפי כלל הקיבוץ
$= A + B \cdot (1 + \bar{C})$	לפי כלל הפילוג
$= A + B \cdot 1$	לפי כלל היחידה
$= A + B$	לפי כלל היחידה

תרגול

שאלה 3.12

הוכיחו באופן אלגברי את הזהויות הבוליאניות הבאות:

א. $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$

ב. $(A + B\bar{C} + C) \cdot \bar{C} = AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$

ג. $(X + Y) \cdot (\bar{X} + Z) = \bar{X}Y + XZ$

3.5 כללי דה-מורגן

לעתים יש לבצע פעולת היפוך בוליאני על ביטוי מורכב (ולא על משתנה בודד), כגון:

$$\overline{X + Y \cdot Z}$$

טיפול בביטויים מורכבים מסוג זה, בעזרת הכללים שהכרנו עד כה, עלול להיות מסורבל.

דה-מורגן* הוכיח שני כללים המאפשרים פישוט ביטויים המכילים פעולות היפוך מורכבות:

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

A, B הם משתנים או ביטויים בוליאניים כלשהם. שני כללים אלה דומים זה לזה והם נקראים **כללי דה- מורגן** (De-Morgan's rules). נוכיח כללים אלה בעזרת טבלאות אמת (טבלאות 3.9, 3.10).

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cdot \bar{B}$	A+B	$\overline{A + B}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

טבלה 3.9

הוכחה לכלל $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} + \bar{B}$	A·B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

טבלה 3.10

הוכחה לכלל $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$



שאלה 3.13

הראו כי כללי דה-מורגן דואליים זה לזה.

דוגמה 3-8

רשמו את הביטוי המורכב $\overline{(XY + Z) + (\bar{X}Z + Y)}$ כמכפלת ביטויים.

* דה מורגן (De-Morgan, 1806-1871), מתימטיקאי אנגלי, עסק במיוחד ביסודות האלגברה ובפיתוח סימול יעיל במתימטיקה ובלוגיקה.

פתרון

נרשום:

$$U = XY + Z$$

$$V = \bar{X}Z + Y$$

לפי הכלל הראשון של דה-מורגן:

$$\overline{U + V} = \bar{U} \cdot \bar{V}$$

עתה נחליף את U ואת V בביטויים המקוריים, ונקבל:

$$\begin{aligned}\overline{(XY + Z) + (\bar{X}Z + Y)} &= \overline{(XY + Z)} \cdot \overline{(\bar{X}Z + Y)} = \\ &= (\overline{XY} \cdot \bar{Z}) \cdot (\overline{\bar{X}Z} \cdot \bar{Y})\end{aligned}$$

כללי דה-מורגן, החלים על שני משתנים, הם מקרה פרטי של כללים דומים החלים על מספר כלשהו של משתנים (כלומר כללים אלו נכונים לגבי 3, 4, 5 ומעלה משתנים).

אם $X_n, \dots, X_2, X_1$ הם n משתנים בוליאניים, אזי מתקיימות הזהויות:

$$\overline{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \dots \cdot \bar{X}_n \quad (1)$$

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n \quad (2)$$

הוכחת כללי דה-מורגן בצורתם הכללית (עבור n משתנים) היא מסובכת ודורשת שימוש בשיטת האינדוקציה המתמטית. אולם עבור מספר משתנים נתון אפשר להוכיח כללים אלה בקלות.

במסגרת הדיון הנוכחי נסתפק בהוכחה עבור שלושה משתנים בלבד. לצורך ההוכחה נשתמש בכללי דה-מורגן לגבי שני משתנים:

(1)

$$\begin{aligned}\overline{X + Y + Z} &= \overline{X + (Y + Z)} \\ &= \bar{X} \cdot \overline{(Y + Z)} \\ &= \bar{X} \cdot (\bar{Y} \cdot \bar{Z}) \\ &= \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overline{X \cdot Y \cdot Z} &= \overline{X \cdot (Y \cdot Z)} \\ &= \bar{X} \cdot \overline{(Y \cdot Z)} \\ &= \bar{X} \cdot (\bar{Y} + \bar{Z}) \\ &= \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}\end{aligned}$$



תרגול

שאלה 3.14

השתמשו בכללי דה-מורגן ובכללים נוספים כדי לקבל צורה פשוטה יותר של הביטוי

$$\overline{(XY + Z)} \cdot \overline{(\bar{X}Z + Y)}$$

נסיים סעיף זה בסיכום הכללים שלמדנו עד כה:

כללי ההיפוך:

$$X + \bar{X} = 1$$

$$X \cdot \bar{X} = 0$$

כלל השלילה הכפולה:

$$X = \bar{\bar{X}}$$

כללי הכפילות:

$$X + X = X$$

$$X \cdot X = X$$

כללי האפס:

$$0 + X = X$$

$$0 \cdot X = 0$$

כללי היחידה:

$$1 + X = 1$$

$$1 \cdot X = X$$

כללי החילוף:

$$X + Y = Y + X$$

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

כללי הקיבוץ:

$$X + (Y + Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$$

$$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$$

כללי הפילוג:

$$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$$

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$$

כלל צמצום 1:

$$X + X \cdot Y = X$$

כלל צמצום 2:

$$X \cdot (X + Y) = X$$

כלל צמצום 3:

$$X + \bar{X} \cdot Y = X + Y$$

כלל צמצום 4:

$$X \cdot (\bar{X} + Y) = X \cdot Y$$

כללי דה-מורגן:

$$\overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$\overline{X \cdot Y} = \bar{X} + \bar{Y}$$

3.6 הפעולות NOR, NAND, XOR ו-NOR

3.6.1 פונקציות בוליאניות המוגדרות על משתנה אחד ועל שני משתנים

הפונקציה $f(P) = \bar{P}$ אינה היחידה שאפשר להגדיר לגבי המשתנה היחיד P . ארבע פונקציות כאלה מתקבלות בעזרת התאמת ערכים שונים של הפונקציה לשני ערכי המשתנה הבלתי תלוי. ראו טבלה 3.11.

מבין פונקציות אלה נשתמש בהמשך בעיקר בפונקציה $f(P) = \bar{P}$, שהיא פונקציית השלילה.

P	$f(P)$	$g(P)$	$h(P)$	$r(P)$
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0

טבלה 3.11

כל הפונקציות המוגדרות על ידי משתנה אחד.*

כמה פונקציות אפשר ליצור בעזרת משתנה המקבל שני ערכים שונים?

* הפונקציה $f(P)$ נקראת פונקציית השלילה.

הפונקציה $g(P)$ נקראת טאוטולוגיה. ערכה 1 עבור כל ערכי המשתנים הבלתי תלויים.
הפונקציה $h(P)$ נקראת פונקציה שוות-ערך. היא מקבלת אותם ערכים כמו המשתנה P .
הפונקציה $r(P)$ נקראת סתירה. ערכה 0 עבור כל ערכי המשתנים הבלתי תלויים.

המשתנה יכול לקבל שני ערכים. לכל ערך של משתנה הפונקציה יכולה לקבל שני ערכים; לכן ייתכנו $2^2 = 4$ פונקציות, כפי שמראה טבלה 3.11. למעשה טבלה 3.11 מציגת ארבע טבלאות אמת של הפונקציות הללו.

נדון עתה בשאלה הבאה:

נתונים שני משתנים, שכל אחד מהם יכול לקבל שני ערכים שונים 0, 1. כמה פונקציות בוליאניות (שונות זו מזו) ניתן להגדיר, ומהן?

התשובה: משני משתנים אפשר ליצור $2^2 = 4$ צירופים שונים. לגבי כל צירוף של המשתנים, הפונקציה שנרצה להגדיר יכולה לקבל את הערך 0 או 1. כלומר יתקבלו $2^4 = 16$ פונקציות שונות (טבלה 3.12).

P	Q	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
שם הפונקציה		0	AND		P		Q	XOR	OR	NOR		$\overline{Q}$		$\overline{P}$		NAND	1

טבלה 3.12

פונקציות המוגדרות על ידי שני משתנים

בשורה האחרונה **הדגשנו** את שמות הפונקציות, שנעסוק בהן בהמשך. מתוך 16 הפונקציות המוגדרות על שני משתנים, אנו מכירים כבר את הפונקציות AND ו-OR. * הפונקציות f_3 ו- f_5 אינן מעוררות עניין מיוחד, מכיוון שהן זהות למשתנים P ו-Q, בהתאמה. f_{10} ו- f_{12} הן השלילה של P ו-Q, בהתאמה, וכבר נדונו בהקשר של פונקציות המוגדרות על משתנה אחד. f_0 היא פונקציית הסתירה ו- f_{15} היא פונקציית הטאוטולוגיה.

טרם דנו בפונקציות XOR, NAND ו-NOR (f_8, f_{14}, f_6 בטבלה 3.12), ונדון בהן בהמשך הסעיף.

* עד כה כינינו את הפונקציות AND, OR ו-NOT בשם פעולות. פעולה היא מקרה פרטי של פונקציה, לכן כל פעולה היא פונקציה, אך לא להיפך. גם הפונקציות XOR, NAND ו-NOR הן פעולות. בהמשך נחזור ונכנה שש פונקציות אלה בשם פעולות.



שאלה 3.15

נתונות הפונקציות

$$f(A, B) = A + B$$

$$g(A, B) = AB$$

$$h(A, B) = A\bar{B} + \bar{A}B$$

א. מצאו בטבלה 3.12 פונקציה זהה לכל פונקציה שלעיל (מלבד שמות המשתנים).

ב. מצאו בטבלה 3.11 פונקציה מתאימה לכל פונקציה שלעיל, בהנחה כי $A = B$.

3.6.2 הפעולה XOR

בסעיף 2.2.3 הבהרנו את ההבדל בין שתי המשמעותות של המלה **או**: **או כולל** (OR) ו**או מוציא** (XOR)*. הפעולה XOR בין P ו-Q מסומנת כך: $P \oplus Q$. תחילה נדגים את משמעות פעולה זו בעזרת תחשיב פסוקים. לשם כך נסמן באות P את הפסוק "אני נמצא כרגע בתל אביב", ובאות Q נסמן את הפסוק "אני נמצא כרגע בירושלים". $P \oplus Q$ משמעותו: "אני נמצא כרגע בתל אביב או בירושלים" (אך לא בשני המקומות). טבלת האמת של הפעולה XOR מתוארת בטבלה 3.13.

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

טבלה 3.13

טבלת האמת של הפעולה XOR



שאלה 3.16

א. הוכיחו באמצעות טבלת אמת את הזהות

* XOR – קיצור של exclusive OR

$$A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B$$

ב. נסמן כדלקמן את פעולת ההשוואה בין A ל- B : $A \& B$
נניח כי:

$$A \oplus B = X$$

$$A \& B = Y$$

הוכיחו כי:

$$X \cdot Y = 0$$

$$X + Y = 1$$

מה הקשר בין X ל- Y ?

3.6.3 הפעולה NAND (NOT AND)

הפעולה $NAND^*$ בין המשתנים A ו- B מוגדרת כך: $\overline{A \cdot B}$, ומסומנת בצורה: $A \uparrow B$. היות שהפעולה $A \cdot B$ היא הכפל הבוליאני, הרי שהפעולה $\overline{A \cdot B}$ היא שלילת המכפלה הבוליאנית. בטבלה 3.14 מוצגת טבלת האמת של פעולת NAND.

A	B	$\overline{A \cdot B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

טבלה 3.14
טבלת האמת של הפעולה NAND

3.6.4 הפעולה NOR (NOT OR)

את הפעולה NOR^* בין המשתנים A ו- B מגדירים כך: $\overline{A + B}$. נהוג לסמן פעולה זו בסמל $\downarrow$, כלומר:

$$A \downarrow B = \overline{A + B}$$

* NAND – קיצור של Not AND

* NOR – קיצור של Not OR

$A+B$ היא פעולת החיבור הבוליאני, לכן הפעולה $\overline{A+B}$ היא שלילת החיבור הבוליאני.

בטבלה 3.15 מוצגת טבלת האמת של פעולת NOR.

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

טבלה 3.15

טבלת האמת של הפעולה NOR

תרגול 

שאלה 3.17

הפעילו את הפעולות של NAND ו-NOR על משתנה אחד ($A \uparrow A$, $A \downarrow A$), ורשמו את התוצאות שיתקבלו.

3.7 הפעולות NAND ו-NOR כבסיס למערכות שלמות – רשות

בתחילת הפרק הכרנו את הפעולות AND, OR ו-NOT.

פעולות אלה הן **פונקציות היסוד** של האלגברה הבוליאנית. באמצעותן אפשר לבטא כל קשר בין משתנים בוליאניים. כלומר, כל פונקציה בוליאנית ניתנת לתיאור באמצעות המשתנים והפעולות AND, OR ו-NOT. צירוף זה של פעולות משמש **מערכת שלמה** במובן זה שניתן לבטא באמצעותו כל פונקציה בוליאנית.*

נבדוק עתה אם אוסף פעולות זה הוא היחיד המקיים תכונה זו - או אולי קיימים אוספים אחרים, מצומצמים יותר, שבאמצעותם אפשר לבטא כל פונקציה בוליאנית. אוסף מצומצם כזה, אם אמנם קיים, יאפשר מימוש של כל פונקציה בוליאנית באמצעות מספר קטן יותר של פעולות. בתנאים מסוימים יש בכך חיסכון במימוש.

* בסעיף זה נהוג לרשום ביטויים הכוללים את הפעולות NAND ו-NOR. במקרים רבים נהוג לרשום $\overline{A \cdot B}$ במקום $A \uparrow B$ וכן $\overline{A+B}$ במקום $A \downarrow B$. וכך נהג גם אנחנו.

3.7.1 מערכות שלמות מזעריות

מערכת ללא שער OR

נבדוק תחילה אם אפשר להחליף את אחת הפעולות היסודיות בשניים האחרות, וכך ליצור מערכת שלמה בעזרת שתי פעולות בלבד. לשם כך נבחן אם אפשר לייצג את פעולת OR $(A+B)$ בעזרת פעולות AND ו-NOT בלבד. נשתמש בכללי דה-מורגן, שכוללים את AND, OR ו-NOT.

לפי כללי דה-מורגן:

$$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

אבל (כלל השלילה הכפולה):

$$\overline{\overline{A+B}} = A+B$$

לכן:

$$A+B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$$

מתוך צורת ההצגה האחרונה שקיבלנו ניתן להסיק כי

פעולת OR ניתנת לביטוי על ידי פעולות AND ו-NOT

דוגמה 3-9

הציגו את הפונקציה הבאה באמצעות פעולות AND ו-NOT בלבד:

$$f(X,Y,Z) = \bar{X} \cdot Y + Z$$

פתרון

ניעזר במשתני העזר הבאים:

$$A = \bar{X} \cdot Y$$

$$B = Z$$

בהתאם לכללי דה-מורגן:

$$A+B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$$

נציב מחדש את המשתנים המקוריים ונקבל:

$$f(X,Y,Z) = \overline{\overline{\bar{X} \cdot Y} \cdot \bar{Z}}$$

שאלה 3.18

הציגו את הפונקציה הבאה על ידי פעולות AND ו- NOT בלבד:

$$f(D, E, F) = \bar{E} + D \cdot F$$

ראינו כי הפעולות AND ו- NOT יכולות להחליף פעולת OR המופיעה בביטוי אלגברי. אם בפונקציה בוליאנית מופיעות פעולות OR, נחליף כל פעולה כזאת בפעולות AND ו- NOT. נקבל פונקציה בוליאנית זהה שיש בה רק AND ו- NOT. אפשר אפוא להשתמש בשתי פעולות אלה בלבד כדי לבטא כל פונקציה בוליאנית מורכבת. מכאן שגם הפעולות AND ו- NOT **מרכיבות מערכת שלמה**.

מערכת ללא שער AND

בצורה דומה נוכל להחליף את הפעולה AND, הפועלת על שני המשתנים A ו- B, בפעולות OR ו- NOT, כלהלן:

$$A \cdot B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$A \cdot B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$$

מסקנה: גם פעולות OR ו- NOT מרכיבות מערכת שלמה.

דוגמה 3-10

הציגו את הפונקציה הבאה בעזרת פעולות OR ו- AND בלבד:

$$f(X, Y, Z) = \bar{X} \cdot Y \cdot Z$$

פתרון

נרשום משתני עזר:

$$A = \bar{X}, \quad B = Y, \quad C = Z$$

לפי כללי דה-מורגן:

$$A \cdot B \cdot C = \overline{\overline{A \cdot B \cdot C}} = \overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}$$

נציב את המשתנים המקוריים ונקבל:

$$f(X, Y, Z) = \overline{\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}} = \overline{X + Y + Z}$$

ראינו כי AND ו-NOT הם מערכת שלמה וכן גם הפעולות OR ו-NOT. האם הפעולות OR ו-AND מרכיבות אף הן מערכת שלמה?

לא. ההוכחה לכך חורגת ממסגרת ספר זה. נסתפק כאן בטענה שאי-אפשר לקבל את NOT באמצעות OR ו-AND.

3.7.2 הפעולה NAND כמערכת שלמה

ההיפוך הבוליאני של פעולת AND הוא הפעולה NAND (ראו תת-סעיף 3.6.3). עתה נראה כיצד לייצג את הפעולות NOT, OR ו-AND בעזרת הפעולה NAND; כך נמצא שהפעולה NAND היא מערכת שלמה.

א. ייצוג הפעולה NOT

לפי כלל הכפילות

$$A \cdot A = A$$

על ידי שלילת שני האגפים נקבל:

$$\overline{A \cdot A} = \overline{A}$$

כלומר, הפעולה NAND בין משתנה כלשהו לבין אותו משתנה עצמו שקולה לשלילת המשתנה:

$$A \uparrow A = \overline{A}$$

ב. ייצוג הפעולה OR

כבר הוכחנו כי $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$. אולם ביטוי זה כולל גם פעולות שלילה. כדי להימנע מכך נציב, על פי הנאמר לעיל, במקום $\overline{A}$ את $\overline{A \cdot A}$, ובמקום $\overline{B}$ את $\overline{B \cdot B}$. נקבל

$$A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A \cdot A} \cdot \overline{B \cdot B}}$$

ג. ייצוג הפעולה AND

מתוך השוויון $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$ ניתן להסיק כי $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot B}}$; כלומר – ניתן לייצג את הפעולה AND בעזרת פעולות NAND בלבד.

הפעולות AND, OR, NOT הן מערכת שלמה. כל אחת מפעולות אלה ניתנת לייצוג על ידי פעולות NAND, ולכן ניתן לייצג כל פונקציה בוליאנית באמצעות פעולות NAND בלבד. כלומר: **הפעולה NAND היא מערכת שלמה**. אפשר אפוא לממש כל פונקציה בוליאנית באמצעות פעולות NAND בלבד.

דוגמה 3-11 שלהלן ממחישה את דרך רישומה של פונקציה נתונה באמצעות פעולות NAND בלבד.

דוגמה 3-11

מצאו את ייצוגה של הפונקציה

$$f(X, Y, V, W) = X\bar{Y} + V\bar{W}$$

באמצעות פעולות NAND בלבד.

פתרון

נפעיל על הפונקציה הנתונה את כללי דה-מורגן:

$$f(X, Y, V, W) = X\bar{Y} + V\bar{W} = \overline{\overline{X\bar{Y} + V\bar{W}}} = \overline{\overline{X\bar{Y}} \cdot \overline{V\bar{W}}}$$

כדי למנוע סרבול, השארנו בביטוי האחרון של f את הרישום $\bar{Y}$ ו- $\bar{W}$ ולא $(Y \cdot Y)$ ו- $(W \cdot W)$, כפי שמתחייב לפי הכללים שלעיל. גם להבא ננהג כך.

כדי להמחיש את העובדה שהפונקציה f רשומה באמצעות פעולות NAND בלבד, נוכל לעשות את ההצבות הבאות:

$$B = \overline{V\bar{W}} ; A = \overline{X\bar{Y}}$$

המשתנים A ו-B רשומים באמצעות פעולות NAND בלבד. אם נציב אותם בפונקציה f , נקבל:

$$f(X, Y, V, W) = \overline{A \cdot B}$$

 תרגול

שאלה 3.19

רשמו ביטויים שיכילו פעולות NAND בלבד, כך שיהיו שקולים לפונקציות הבוליאניות הבאות:

א. $f(A, B, C, D, E) = (AB + C)(DE)$

ב. $g(A, B, C, D, E, F) = \bar{A}B + C\bar{D} + \bar{E}F$

ג. $h(A, B, C, D, E, F) = (A + \bar{B})(CD + \bar{E}F)$

3.7.3 הפעולה NOR כמערכת שלמה

בתת-סעיף 3.6.4 ראינו שההיפוך הבוליאני של פעולת OR נותן את הפעולה NOR. עתה נראה שאפשר לייצג את הפעולות AND, OR ו-NOT בעזרת הפעולה NOR, כלומר: גם פעולה זו היא מערכת שלמה.

א. ייצוג הפעולה NOT

לפי כלל הכפילות (של החיבור):

$$A = A + A$$

על ידי שלילת שני האגפים של השוויון הזה נקבל:

$$\bar{A} = \overline{A + A}$$

כלומר, הפעלת NOR בין משתנה כלשהו לבין אותו משתנה עצמו שקולה להפעלת NOT על אותו משתנה.

ב. ייצוג הפעולה AND

לפי כלל השלילה הכפולה

$$A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$$

ולפי כללי דה-מורגן:

$$\overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$$

נוכל לרשום במקום $\bar{A}$ את הביטוי $\overline{A + A}$ הזזה לזו, ובמקום $\bar{B}$ את $\overline{B + B}$, וכך נקבל

$$A \cdot B = \overline{(\overline{A + A}) + (\overline{B + B})}$$

מתוך השוויון $A \cdot B = \overline{\bar{A} + \bar{B}}$ ניתן להסיק כי $A \cdot B = \overline{(\overline{A + A}) + (\overline{B + B})}$; כלומר - ניתן לייצג את הפעולה AND בעזרת פעולות NOR בלבד.

ג. ייצוג הפעולה OR

לפי כלל השלילה הכפולה

$$A + B = \overline{\overline{A + B}}$$

לפי כלל הכפילות

$$\overline{\overline{A + B}} = \overline{\bar{A} + \bar{B}} + \overline{\bar{A} + \bar{B}}$$

לכן

$$A + B = \overline{\overline{\bar{A} + \bar{B}} + \overline{\bar{A} + \bar{B}}}$$

כלומר – אפשר לייצג פעולת OR בעזרת הפעולה NOR.

שלושת הקשרים שפורטו לעיל, בין הפעולה NOR לפעולות AND, OR ו-NOT, מובילים למסקנה הבאה:

ניתן לייצג כל פונקציה בוליאנית באמצעות פעולות NOR

כלומר: פעולת NOR היא מערכת שלמה.

דוגמה 3-12

בדוגמה 3-11 ביקשנו לייצג, באמצעות פעולות NAND בלבד את הפונקציה

$$f(X, Y, V, W) = X\bar{Y} + V\bar{W}$$

הפעם עלינו לייצג פונקציה זו על ידי פעולות NOR בלבד.

פתרון

נפעיל שתי פעולות שלילה על הפונקציה הנתונה ונקבל:

$$\begin{aligned} f(X, Y, V, W) &= \overline{\overline{X\bar{Y} + V\bar{W}}} \\ &= \overline{\overline{X\bar{Y}} \cdot \overline{V\bar{W}}} = \overline{(\bar{X} + \bar{\bar{Y}}) \cdot (\bar{V} + \bar{\bar{W}})} \\ &= \overline{(\bar{X} + Y) + (\bar{V} + W)} \\ &= \overline{(\bar{X} + Y)} + \overline{(\bar{V} + W)} \end{aligned}$$

בשלב האחרון של הפתרון הפעלנו שוב שלילה כפולה, כדי לבטא את הפונקציה הנתונה באמצעות NOR בלבד.

 תרגול

שאלה 3.20

מצאו ביטוי שיכלול פעולות NOR בלבד עבור הפונקציה:

$$f(A, B, C, D, E, F) = (A + \bar{B})(CD + \bar{E}F)$$

יש להיזהר בשימוש בפונקציות המיוצגות באמצעות NAND או NOR. שתי פעולות אלה אינן מקיימות את כל הכללים שלמדנו לגבי הפעולות AND ו-OR. למשל, הן מקיימות את כלל החילוף, אך אינן מקיימות את כלל הקיבוץ. כלומר:

$$\overline{A + B} = \overline{B + A}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{B \cdot A}$$

$$\overline{A + \overline{B + C}} \neq \overline{\overline{A + B} + C}$$

$$\overline{A \cdot \overline{B \cdot C}} \neq \overline{\overline{A \cdot B} \cdot C}$$

נוכיח כאן כי

$$\overline{A + \overline{B + C}} \neq \overline{\overline{A + B} + C}$$

כדי להוכיח זאת, די להראות כי קיים צירוף אחד של ערכי המשתנים שלגביו השוויון אינו מתקיים (כדי שיתקיים שוויון, חייבים כל הצירופים של ערכי המשתנים להיות שווים בשני האגפים).

נבחר את הצירוף $A = 1; B = 0; C = 0$ ונציב אותו בנפרד בשני אגפי אי-השוויון.

$$\overline{1 + \overline{0 + 0}} = \text{אגף שמאל:} \quad \overline{1 + 1} = 0$$

$$\overline{\overline{1 + 0} + 0} = \text{אגף ימין:} \quad \overline{0 + 0} = 1$$

הראינו כי אגף ימין שונה מאגף שמאל עבור צירוף אחד, ומכאן שהשוויון אינו נכון.

שאלה 3.21

הוכיחו את שלושת הקשרים שלהלן:

- א. $\overline{A + B} = \overline{B + A}$
- ב. $\overline{A \cdot B} = \overline{B \cdot A}$
- ג. $\overline{A \cdot \overline{B \cdot C}} \neq \overline{\overline{A \cdot B} \cdot C}$

* כבר ראינו כי כדי להוכיח נכונות שוויון, יש לבדוק את כל הצירופים של ערכי המשתנים, ואפשר לעשות זאת באמצעות טבלת אמת. ניתן להשתמש בטבלת אמת גם למציאת צירופים שעבורם אין השוויון מתקיים.

שאלות חזרה לפרק 3

שאלה 3.22

פשטו את הביטוי הבא לביטוי המזערי האפשרי.

$$A \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + \bar{C})$$

שאלה 3.23

הוכיחו את הזהויות הבאות:

$$AB + CD = (A + C) \cdot (A + D) \cdot (B + C) \cdot (B + D) \quad \text{א.}$$

$$A + \overline{BC} + AD = (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C} + D) \quad \text{ב.}$$

$$A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}C = A\bar{B} + \bar{B}C \quad \text{ג.}$$

$$\bar{A}B + B\bar{C} = \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} \quad \text{ד.}$$

שאלה 3.24

שלושה מבין ארבעת הביטויים הבאים זהים זה לזה. מצאו את הביטוי שאינו זהה לאחרים.

$$\overline{XY} + YZ \quad \text{א.}$$

$$(Y + \bar{Z}) \cdot (\bar{X} + Z) \quad \text{ב.}$$

$$\bar{X} + YZ + \overline{XYZ} \quad \text{ג.}$$

$$\bar{X}Y + \overline{XZ} + YZ \quad \text{ד.}$$

שאלה 3.25

א. הפעילו את עקרון הדואליות על הזהות שהופיעה בסעיף ד בשאלה 3.23.

ב. הוכיחו את הזהות שהתקבלה.

שאלה 3.26

בדקו אם הזהויות הבאות נכונות. רשמו את בדיקתכם.

$$\overline{(ABC)} \cdot D + ACD \cdot (BC + B) = \overline{DC} + \bar{D} \quad \text{א.}$$

$$XY + \overline{XY} + \bar{X}YZ = XY\bar{Z} + \overline{XY} + YZ \quad \text{ב.}$$

שאלה 3.27

פשטו את הביטויים הבאים באמצעות, בין השאר, שימוש בכללי דה-מורגן.

$$\overline{\overline{AB} + AB} \quad \text{א.}$$

$$\overline{(X + Y) \cdot \bar{X} \cdot (\bar{Y} + \bar{Z})} + \bar{X} \cdot (\bar{Y} + \bar{Z}) \quad \text{ב.}$$

$$\overline{\bar{X} + \bar{Y} + XY\bar{Z}} \quad \text{ג.}$$

$$\bar{A} + ABC\bar{C} + \overline{(\bar{A} + B)} \cdot (ABC\bar{C} + \bar{A}) \quad \text{ד.}$$

שאלה 3.28

הוכיחו את הזהות הבאה. היעזרו, בין השאר, בכללי דה-מורגן.

$$\overline{\overline{(A + \bar{B})} \cdot (C + \bar{D})} + \bar{A} = AC + A\bar{D} + A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{D}$$

שאלה 3.29

נתון ש- $A\bar{B} + \bar{A}B = C$.

הראו ש- $A\bar{C} + \bar{A}C = B$.

שאלה 3.30

פתרו את מערכות המשוואות הבאות (ערכי המשתנים המקיימים את כל המשוואות בו-זמנית).

$$1. \quad A \oplus B = 0$$

$$2. \quad D(\bar{A}B + \bar{B} + A) = 0$$

$$3. \quad A + \bar{A}B = \bar{C}\bar{D} + C$$

$$4. \quad AC = \bar{B}D$$

סיכום פרק 3

- משתנה בוליאני הוא משתנה היכול לקבל את אחד משני הערכים: 0 או 1.
- 0 או 1 הם קבועים בוליאניים.
- ביטוי בוליאני הוא צירוף מסוים של משתנים וקבועים הקשורים ביניהם באמצעות פעולות בוליאניות.
- פונקציה בוליאנית של n משתנים משמשת **כלל התאמה**: לכל אחד מ- 2^n הצירופים האפשריים של המשתנים מתאים ערך בוליאני מסוים.
- תוצאות הפעולות NOT, OR, ו-AND בין הקבועים 0 ו-1 ובינם לבין עצמם, הן:

AND	OR	NOT
$0 \cdot 0 = 0$	$0 + 0 = 0$	
$0 \cdot 1 = 0$	$0 + 1 = 1$	$\bar{0} = 1$
$1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	$\bar{1} = 0$
$1 \cdot 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	

- סדר ביצוע הפעולות הבוליאניות: NOT $\leftarrow$ AND $\leftarrow$ OR.
- זהות בוליאנית מורכבת משני ביטויים בוליאניים השווים עבור כל הצירופים האפשריים של משתני הביטויים.
- להלן טבלאות האמת של NOR, NAND ו-XOR:

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A + B}$	$A \oplus B$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

- בסעיף 3.5 סוכמו כללי האלגברה הבוליאנית. נחזור ונביא רק חלק מהם:

$$\begin{array}{ll}
 X + \bar{X} = 1 & X \cdot \bar{X} = 0 \\
 X + X = X & X \cdot X = X \\
 X + 0 = X & X \cdot 1 = X \\
 X + 1 = 1 & X \cdot 0 = 0
 \end{array}$$

$$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$$

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$$

$$X + X \cdot Y = X$$

$$X \cdot (X + Y) = X$$

$$X + \bar{X} \cdot Y = X + Y$$

$$X \cdot (\bar{X} + Y) = X \cdot Y$$

כללי דה-מורגן

$$\overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$\overline{X \cdot Y} = \bar{X} + \bar{Y}$$

- על פי עקרון הדואליות, לכל ביטוי בוליאני קיים ביטוי דואלי המתקבל לאחר ההחלפות שלהלן:
 הסימן "+" הופך ל- ".".
 הסימן "." הופך ל- "+".
 הקבוע הבוליאני 0 הופך ל-1.
 הקבוע הבוליאני 1 הופך ל-0.
- אם נתון שוויון בוליאני, נרשום את הביטוי הדואלי לכל אגף בשוויון הזה. שני הביטויים המתקבלים אף הם שווים.

פרק 4 - פונקציות בוליאניות ופישוטן

4.1 יצירת פונקציות בוליאניות

בסעיף זה נפרט כיצד בונים ביטוי של פונקציה בוליאנית כדי לפתור בעיה כלשהי. נעשה זאת תוך שימוש באלגברה בוליאנית. במקרים רבים, נוח יותר לבנות תחילה את טבלת האמת המתאימה לבעיה הנתונה, ורק אחר כך לעבור מן הטבלה אל הביטוי המתאר את הפונקציה. למעבר זה יש כללים ברורים שננסח כאן, אולם תחילה נדגים את הדברים.

דוגמה 4-1

אחד מאמצעי הביטחון בבנק הפדרלי* בארצות הברית הוא הזרמת גז מרדים לחדר הכספות. מחמת קטלנותו של אמצעי זה (במקרים מסוימים עלול גז זה להמית), אפשר להפעיל מערכת זו או להזרים גז רק תוך כדי העלאת שלושה מתגים גם יחד: המתג בחדר המפקד (B), המתג בחדר הקצין לתפקידים מיוחדים (K) והמתג בתחנת המשטרה הקרובה (M).

א. כתבו טבלת אמת שתתאר באילו מקרים יוזרם הגז המרדים. סמנו בספרה 1 - "מתג למעלה", ובספרה 0 - "מתג למטה". על הטבלה להכיל את כל הצירופים האפשריים של מצבי המתגים.

ב. השתמשו בטבלת האמת לכתיבת הביטוי הבוליאני המתאר את התנאי לזרימת הגז.

פתרון

א. כל אחד משלושת המתגים עשוי להימצא באחד משני מצבים: 1 - "מתג למעלה"; 0 - "מתג למטה". לכן קיימים 8 צירופים שונים של מצבי המתגים, כמפורט בטבלה 4.1. בעמודה הימנית של הטבלה מוצג ערך הפונקציה "יוזרם גז מרדים" המסומן באות f . הפונקציה f תקבל את הערך 1 רק כאשר כל שלושת המתגים יקבלו ערך 1.

B	K	M	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

טבלה 4.1 טבלת אמת לדוגמה 4-1

* הבנק הפדרלי בארצות הברית הוא הבנק המרכזי של המדינה, בדומה לתפקיד בנק ישראל.

ב. מתוך התבוננות בטבלת האמת רואים כי:

$$f = B \cdot K \cdot M$$

תרגול

שאלה 4.1

אמצעי פחות קטלני מזה שראינו בדוגמה 4-1 הוא הזרמת גז מדמיע. אמצעי זה מופעל כאשר מעלים רק שניים מתוך שלושת המתגים. כאשר מעלים את שלושת המתגים, מוזרם גז מרדים ולא גז מדמיע.

- א. בנו טבלת אמת שתתאר באילו מקרים יוזרם גז מדמיע.
 ב. רשמו את הביטוי הבוליאני המתאים לטבלת האמת.

בתשובה 4.1 נתונה פונקציה בצורת טבלת אמת. בסעיף ב של התשובה ראינו את השיקולים לקבלת פונקציה בצורת ביטוי בוליאני - על פי טבלת אמת.

ננסח עתה את הכלל למעבר מטבלת אמת לביטוי בוליאני של הפונקציה.

נתונה פונקציה בוליאנית בעלת מספר משתנים המיוצגת על ידי טבלת אמת. כדי לתאר את הפונקציה באמצעות ביטוי בוליאני, בצעו את השלבים המפורטים להלן:

1. סמנו את כל השורות בטבלת האמת שבהן הפונקציה מקבלת את הערך 1.
2. עבור כל שורה כזאת, רשמו את מכפלת המשתנים או את היפוכיהם בהתאם לכלל הבא:
 עבור כל משתנה שערכו הבינארי בשורה הוא אפס, רשמו את היפוכו (כלומר את שלילתו); ועבור כל משתנה שערכו הבינארי הוא 1, רשמו את המשתנה עצמו.
3. לאחר שקיבלתם את מכפלות המשתנים של כל השורות שבהן לפונקציה יש ערך 1, חברו את כל הביטויים (חיבור בוליאני).

רישום פונקציה בצורה זו נקרא **הצגת הפונקציה כסכום מכפלות**.

דוגמה 4-2

נתונה פונקציה המתוארת בטבלה 4.2.

X	Y	Z	$f(X, Y, Z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

שורה שלישית

שורה חמישית

שורה שישית

טבלה 4.2

טבלת אמת לדוגמה 4-2

רשמו ביטוי עבור הפונקציה הבוליאנית המתוארת בטבלת אמת זו.

פתרון

נפעל על פי הכללים שלמדנו זה עתה:

1. הפונקציה מקבלת את הערך 1 בשורה השלישית, החמישית והשישית של הטבלה. מכל

שאר השורות שבהן ערך הפונקציה אפס אפשר להתעלם.

2. בשורה השלישית; $X = Z = 0$; $Y = 1$; נרשום את הביטוי $\bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z}$

עבור השורה החמישית נרשום את הביטוי $X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$

עבור השורה השישית נרשום $X \cdot \bar{Y} \cdot Z$

3. עתה נפעיל פעולת OR על כל הביטויים שרשמנו ונקבל:

$$f = \bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z} + X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} + X \cdot \bar{Y} \cdot Z$$

תרגול

שאלה 4.2

בנו שני ביטויים בוליאניים עבור טבלת האמת שלהלן (טבלה 4.3): האחד – כדי לתאר את

הפונקציה S, והשני – כדי לתאר את הפונקציה C.

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

טבלה 4.3*

טבלת אמת לשאלה 4.2

* השוו עם טבלת האמת של החיבור הבינארי (תת-סעיף 3.1.1)

שאלה 4.3

רשמו את הפונקציות הבוליאניות שמייצגות הטבלאות הבאות:

A	B	C	D	x
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

ב.

X	Y	Z	t
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

א.

שאלה 4.4

למוסך יש שתי כניסות: כניסה ראשית, A, וכניסה אחורית, B. יש לבנות מערכת אזעקה שתתריע בעת פריצה למוסך. המערכת צריכה להבחין בין הרשאים להיכנס למוסך לבין שאר האנשים. לשם כך צוידו הראשונים במפתח, שבאמצעותו הם מנתקים את פעולת המתג הראשי C של מערכת האזעקה בטרם ייכנסו למוסך. בכל פעם שאחת הכניסות לפחות נפתחת, והמתג הראשי מחובר - צריכה המערכת להפעיל פעמון.

א. רשמו את טבלת האמת של מערכת האזעקה.

ב. רשמו, על סמך טבלת האמת, את הפונקציה המתאימה למערכת האזעקה.

ג. פשטו את הביטוי שקיבלתם.

הדרכה:

סמנו: $C=1$ מתג ראשי מחובר

$A=1$ כניסה ראשית פתוחה

$B=1$ כניסה אחורית פתוחה

4.2 פישוט פונקציות בוליאניות

בסעיף 4.1 עסקנו בבניית פונקציה בוליאנית המתאימה לבעיה לוגית. תחילה רשמנו את טבלת האמת, וממנה רשמנו את הפונקציה. לעתים קרובות, הפונקציה המתקבלת בדרך זו ניתנת לפישוט. כלומר: אפשר למצוא ביטוי שקול (מבחינת ערכי האמת) לפונקציה המקורית, אך זה יהיה בעל מספר קטן יותר של משתנים בוליאניים או של פעולות בוליאניות. אחת הדרכים לפישוט פונקציה בוליאנית (minimization of Boolean function) היא להשתמש בכללים שלמדנו בפרק הקודם. נתרכז בכך בסעיף זה.

לפישוט הפונקציה הבוליאנית יש חשיבות רבה כאשר רוצים לממשה. על ידי פישוט הפונקציה, לפני מימושה, אפשר בדרך כלל לחסוך מספר ניכר של רכיבים אלקטרוניים.

דוגמה 4-3

פשטו את הפונקציה

$$f = \bar{X}\bar{Y}Z + YZ + XZ$$

פתרון

$$f = \bar{X}\bar{Y}Z + YZ + XZ$$

לפי כלל הפילוג:

$$f = (\bar{X}\bar{Y} + Y + X)Z$$

לפי כלל החילוף:

$$f = Z(X + \bar{X}\bar{Y} + Y)$$

לפי כלל הצמצום השלישי:

$$X + \bar{X}\bar{Y} = X + \bar{Y}$$

לכן נקבל:

$$f = Z(X + \bar{Y} + Y)$$

לפי כלל ההיפוך:

$$f = Z(X + 1)$$

ולפי כלל היחידה:

$$f = Z \cdot 1 = Z$$

אנו רואים אפוא שהפונקציה f אינה תלויה כלל במשתנים X ו- Y , אלא ב- Z בלבד, כפי שמסתבר מהביטוי הפשוט $f = Z$.

לרוב אפשר לפשט ביטוי בוליאני בכמה דרכים. נדגים זאת בשאלה 4.5.

תרגול

שאלה 4.5

פשטו בשתי דרכים שונות את הפונקציה

$$f = XY + XYZ + XY\bar{Z} + \bar{X}YZ$$

דרך א: הוציאו מחוץ לסוגריים את XY מהאיבר הראשון ומהאיבר השלישי ; ואת YZ הוציאו מהאיבר השני ומהרביעי.

דרך ב: הוציאו את XY מחוץ לסוגריים – משלושת האיברים הראשונים.

פישוט פונקציות המכילות פעולת היפוך (NOT) דורש בדרך כלל שימוש בכללי דה-מורגן, כפי שתקראו בדוגמה 4-4.

דוגמה 4-4

פשטו את הפונקציה

$$g = XY + \overline{X + Y} + \bar{X}\bar{Y}Z$$

פתרון

לפי כללי דה-מורגן:

$$\overline{X + Y} = \bar{X}\bar{Y}$$

לכן:

$$g = XY + \bar{X}\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y}Z$$

על שני האיברים האחרונים ניתן להפעיל את כלל הפילוג, לכן:

$$\bar{X}\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y}Z = \bar{X}\bar{Y}(1 + Z) = \bar{X}\bar{Y}$$

ולכן:

$$g = XY + \bar{X}\bar{Y}$$

תרגול

שאלה 4.6

א. פשטו את הפונקציה

$$f = \overline{XY} + XZ + \overline{X\bar{Y}Z}$$

ב. בדקו את תשובותיכם על ידי טבלת אמת, כלומר: השוו בין הערכים המתקבלים בפונקציה המקורית ובפונקציה המפושטת.

שאלה 4.7

נתונה הפונקציה

$$f = ABCD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD$$

פשטו פונקציה זו.

4.3 צורות קנוניות של פונקציות בוליאניות

לאחר שהבהרנו את הצורך בפישוט פונקציות בוליאניות, ונוכחנו שאפשר לעשות זאת בעזרת הכללים היסודיים וכללי הצמצום שהכרנו, נציין עתה את חסרונן של תהליך פישוט כזה: יש להשתמש בכללים רבים ושונים (או בצירופים שלהם) כדי לפשט פונקציה. צירוף הכללים, שמפעילים על פונקציה אחת כדי לפשט אותה, אינו מתאים בדרך כלל לפישוט פונקציה אחרת, כי הצירוף תלוי בפונקציה שרוצים לפשט.

בסעיף הבא נלמד שיטה שמסייעת להתגבר על המגבלה שתיארנו. השיטה מתבססת על תהליך קבוע ואחיד. באמצעות השיטה נשיג גם פישוט מרבי של הפונקציה הבוליאנית.

כדי לתאר את שיטת הפישוט האחידה, עלינו להגדיר ולהסביר כמה מושגים חדשים הקשורים לצורות הצגה תקינות של פונקציות בוליאניות. בכך נעסוק בהמשך סעיף זה.

4.3.1 סכום של מכפלות קנוניות

אחת הדרכים שבהן הצגנו עד כה פונקציות בוליאניות היא סכום של מכפלות. בפונקציה

$$f(ABC) = A\bar{B} + BC$$

כל אחד מהביטויים $A\bar{B}$ ו- BC הוא מכפלה של משתנים (או של היפוכי המשתנים) שבעזרתם מבטאים את הפונקציה. בהמשך נכנה את כל אחד ממשתני הפונקציה או את היפוכו – בשם **ליטרל**. למשל – בביטוי $A\bar{B}$ מופיעים שני ליטרלים: A ו- $\bar{B}$.

בשם **איבר כפלי** נכנה כל ביטוי בוליאני המורכב מליטרלים הקשורים ביניהם באמצעות פעולות כפל בוליאני בלבד. כך, למשל, הביטויים AB ו- BC המופיעים בפונקציה לעיל, הם איברים כפליים. לעומת זאת, ביטוי מן הצורה $A(B + \bar{C})$ אינו איבר כפלי, בגלל פעולת החיבור.

ביטוי המורכב מסכום של איברים כפליים מכונה **סכום מכפלות**. למשל: הפונקציה f הנתונה לעיל היא סכום מכפלות. ישנן פונקציות שאינן מבטאות בהכרח בצורת סכום המכפלות.

לדוגמה:

$$f(A, B, C, D) = (A + \bar{B}C) \cdot (B + \bar{C}D)$$

בהמשך נראה כי החוקים שלמדנו בפרק הקודם מאפשרים להציג כל פונקציה באמצעות סכום של מכפלות.

איבר כפלי ייקרא **איבר כפלי קנוני*** אם הוא מכיל ליטרל של כל אחד ממשתני הפונקציה. למשל: בפונקציה $f(A, B, C) = A\bar{B} + BC$ אף אחד מהאיברים הכפליים אינו קנוני. אילו כללה פונקציה זו איבר כפלי כגון $A\bar{B}C$, איבר זה היה קנוני.

פונקציה בוליאנית המורכבת מסכום של איברים כפליים קנוניים נקראת **סכום של מכפלות קנוניות**.

למשל: הפונקציה

$$f(X, Y, Z) = \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}Y\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + XYZ$$

היא סכום של מכפלות קנוניות. כדי להפוך פונקציה לסכום של מכפלות קנוניות, נשתמש בכלל הפילוג $A(B + C) = AB + AC$, ובכלל ההיפוך $A + \bar{A} = 1$. אם בפונקציה מופיע ביטוי הכולל שני ליטרלים ויותר, ועל הביטוי מופעלת פעולת NOT, משתמשים תחילה בכללי דה-מורגן. כלומר, תחילה מביאים את הפונקציה לצורת סכום מכפלות, ואחר כך הופכים צורה זו לסכום של מכפלות קנוניות. בדוגמה 4-5 נראה כיצד מתבצע התהליך.

דוגמה 4-5

הפכו את הפונקציה $f(A, B, C) = \overline{A + \bar{B}C}$ לסכום של מכפלות קנוניות.

פתרון

תחילה נפעיל את כללי דה-מורגן:

$$f(A, B, C) = \overline{A + \bar{B}C} = \overline{A \cdot \bar{B}C} = \bar{A}(B + \bar{C})$$

* קנוני פירושו תקני או מושלם.

עתה נפעיל את חוק הפילוג:

$$f(A, B, C) = \bar{A}(B + \bar{C}) = \bar{A}B + \bar{A}\bar{C}$$

האיברים הכפליים כאן אינם קנוניים. באיבר $\bar{A}B$ לא מופיע C (או $\bar{C}$), ובאיבר $\bar{A}\bar{C}$ לא מופיע B (או $\bar{B}$). נכפיל אפוא את $\bar{A}B$ בביטוי $C + \bar{C}$, ואת $\bar{A}\bar{C}$ נכפיל בביטוי $B + \bar{B}$.

כתוצאה מהכפל אנו "מסרבליים" אמנם את האיברים, איך איננו משנים את ערכם, כי אנו מכפילים כל איבר ב-1.

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= \bar{A}B + \bar{A}\bar{C} = \bar{A}B(C + \bar{C}) + \bar{A}\bar{C}(B + \bar{B}) \\ &= \bar{A}BC + \underline{\bar{A}B\bar{C}} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \\ &= \bar{A}BC + \underline{\bar{A}B\bar{C}} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \quad (\text{כלל הכפילות}) \end{aligned}$$

 תרגול

שאלה 4.8

הביאו את הפונקציות הבאות לצורת סכום של מכפלות קנוניות.

א. $f(A, B, C) = \overline{AB} \cdot \bar{C}$

ב. $g(P, Q, R, S) = P\bar{Q} + Q\bar{R}S + P\bar{R}S$

4.3.2 ייצוג מספרי של פונקציות

בסעיף 4.1 למדנו ליצור ביטוי בוליאני עבור פונקציה נתונה בצורת טבלת אמת. בסעיף הקודם ראינו שניתן להציג פונקציה בוליאנית כסכום של מכפלות קנוניות. אפשר לומר שמתוך טבלת האמת נוכל לקבל ביטוי של סכום המכפלות הקנוניות.

קיימת צורת רישום נוספת, קצרה יותר, לפונקציה המבוטאת כסכום של מכפלות קנוניות. לשם כך נעזרים בייצוג עשרוני שנוכל להתאים לכל איבר כפלי קנוני.

→ שורה ראשונה

X	Y	Z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

טבלה 4.4

צירוף המשתנים XYZ בשורה הראשונה יוצר את המספר הבינארי 000, אשר ייצוגו העשרוני 0;

צירוף המשתנים בשורה השנייה יוצר את המספר הבינארי 001, אשר ייצוגו העשרוני 1;

צירוף המשתנים בשורה השלישית יוצר את המספר הבינארי 010, אשר ייצוגו העשרוני 2;

וכך הלאה, עד שנקבל את טבלה 4.5.

שורה ראשונה→

1			2	3	4	5	6
המשתנים			המספר הבינארי הנוצר בצירוף המשתנים	המספר העשרוני המתאים		המספר העשרוני עבורו $f=1$	האיבר הכפלי הקנוני המתאים
X	Y	Z			f		
0	0	0	000	0	0	-	
0	0	1	001	1	1	1	$\bar{X}\bar{Y}Z$
0	1	0	010	2	1	2	$\bar{X}Y\bar{Z}$
0	1	1	011	3	0	-	
1	0	0	100	4	1	4	$X\bar{Y}\bar{Z}$
1	0	1	101	5	0	-	
1	1	0	110	6	0	-	
1	1	1	111	7	1	7	XYZ

טבלה 4.5

באמצעות טבלה זו נוכל לרשום את הפונקציה בשתי צורות:

סכום של מכפלות קנוניות (ראו עמודה 6)

$$f(X, Y, Z) = \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}Y\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z} + XYZ$$

ייצוג מספרי מקוצר (ראו עמודה 5)

$$f = \Sigma(1,2,4,7)$$

הייצוג המספרי משתמש בסמל Σ^* כדי להדגיש שזהו סכום. האיברים הכפליים הנכללים בסכום זה הם אלה שעבורם $f=1$ (עמודה 4). המספרים המופיעים בסוגריים בתוך הסכום Σ , רשומים בעמודה 5. מספרים אלה הם הייצוג העשרוני של צירופי המשתנים אשר באיברים הכפליים הקנוניים. שימו לב: הסכום של מכפלות קנוניות, והייצוג המספרי המקוצר – הם שתי צורות שונות לרישום אותה פונקציה עצמה.

תרגול

שאלה 4.9

רשמו את הייצוג המספרי של הפונקציות הבוליאניות

- א. $t(X, Y, Z) = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}Y\bar{Z} + X\bar{Y}\bar{Z}$
 ב. $x(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
 ג. $x(A, B, C, D) = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + ABCD$

שאלה 4.10

- א. לגבי הפונקציה $f(X, Y, Z)$ נתון: $f = \Sigma(0, 3, 5)$. רשמו את טבלת האמת המתאימה ובטאו את הפונקציה כסכום של מכפלות קנוניות.
 ב. לגבי הפונקציה $f(A, B, C)$ נתון:

$$f(A, B, C) = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + ABC$$

רשמו את טבלת האמת המתאימה ובטאו את הפונקציה בייצוג מספרי.

4.3.3 מכפלה של סכומים קנוניים – רשות

צורה תקנית נוספת לתיאור פונקציות בוליאניות היא **מכפלה של סכומים קנוניים**, כלומר מכפלה של איברים חיבוריים קנוניים. איבר חיבורי קנוני הוא ביטוי בוליאני המכיל את כל הליטרלים המופיעים בפונקציה, כשהם קשורים ביניהם בפעולת חיבור בוליאני בלבד. הפונקציה הבאה רשומה כמכפלה של סכומים קנוניים.

$$f(A, B, C) = (A + \bar{B} + C)(A + B + \bar{C})$$

לעומת זאת, הפונקציה

$$f(A, B, C) = \bar{A} + BC$$

אינה רשומה בצורת מכפלה של סכומים קנוניים.

כדי לרשום אותה בדרך זו, נשתמש בשני הכללים הבאים:

* Σ (האות היוונית סיגמה גדולה) מסמלת פעולת חיבור של האיברים שמימינה.

כלל הפילוג $A + BC = (A + B)(A + C)$ וכלל ההיפוך $A \cdot \bar{A} = 0$. אלה הכללים הדואליים לכללים, שבעזרתם הופכים פונקציה לסכום של מכפלות קנוניות (ראו תת-סעיף 4.3.1)

דוגמה 4-6

הפכו את הפונקציה $f(A, B, C) = \bar{A} + BC$ למכפלה של סכומים קנוניים.

פתרון

ננישם את כלל הפילוג כדי לקבל מכפלה של סכומים:

$$f(A, B, C) = (\bar{A} + B)(\bar{A} + C)$$

האיברים שקיבלנו אינם קנוניים, לכן נוסיף לראשון את האיבר $C \cdot \bar{C} = 0$, ולשני - את האיבר $B \cdot \bar{B} = 0$, וננישם את כלל הפילוג:

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= (\bar{A} + B + C\bar{C})(\bar{A} + C + B\bar{B}) \\ (\bar{A} + B) + C\bar{C} &= [(\bar{A} + B) + C] \cdot [(\bar{A} + B) + \bar{C}] \\ (\bar{A} + C) + B\bar{B} &= [(\bar{A} + C) + B] \cdot [(\bar{A} + C) + \bar{B}] \end{aligned}$$

ומכאן:

$$f(A, B, C) = (\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + C + \bar{B})$$

שני האיברים $(\bar{A} + B + C)$, $(\bar{A} + C + \bar{B})$ הם זהים. קל לראות זאת אם רושמים את האיברים בסדר אלפביתי. לפי כלל הכפילות, $Y \cdot Y = Y$ ולכן:

$$f(A, B, C) = (\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)$$

 תרגול

שאלה 4.11

הביאו את הפונקציה

$$f(A, B, C, D, E) = (A + \overline{BC})(\overline{ABD + BCE})$$

לצורת מכפלה של סכומים קנוניים.

למדתם כיצד לרשום פונקציה הנתונה בטבלת אמת כסכום של מכפלות קנוניות. לצורך זה, כל איבר כפלי מייצג שורה בטבלת האמת, שעבורה מקבלת הפונקציה את הערך 1.

כיצד נייצג פונקציה הנתונה בטבלת אמת גם כמכפלה של סכומים קנוניים?

יש להבחין בין הגישה המיוצגת בסכום המכפלות הקנוניות לבין הגישה המיוצגת במכפלת הסכומים הקנוניים.

סכום המכפלות הקנוניות מייצג את המקרים שבהם מקבלת הפונקציה את הערך 1, ואילו מכפלת הסכומים הקנוניים מייצגת את המקרים שבהם מקבלת הפונקציה את הערך 0, כפי שיתברר להלן. המכפלה מקבלת את הערך 0 אם אחד (לפחות) מהאיברים החיבוריים שלה הוא 0; ואיבר חיבורי הוא 0 אם כל הליטרלים שלו שווים 0.

כדי לייצג פונקציה הנתונה בטבלת אמת כמכפלה של סכומים קנוניים, יש לרשום את הליטרלים המתאימים לכל שורה בטבלת האמת שבה מקבלת הפונקציה את הערך 0. סכום הליטרלים בכל איבר יהיה 0.

נדגים זאת בעזרת טבלת אמת (טבלה 4.6)

עשרוני	X	Y	Z	t
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

טבלה 4.6

ערך הפונקציה t הוא 0 בשורות שערך העשרוני הוא 2, 5, 7.

הצירוף שבשורה שערך העשרוני 2 הוא 0, 1, 0, לכן האיבר החיבורי המתאים הוא $A + \bar{B} + C$. שימו לב: כאשר $A=0, B=1, C=0$, ערך האיבר החיבורי $A + \bar{B} + C$ הוא 0.

הצירוף שבשורה שערך העשרוני 5 הוא 1, 0, 1, לכן האיבר החיבורי המתאים הוא $(\bar{A} + B + \bar{C})$.

הצירוף שבשורה שערך העשרוני 7 הוא 1, 1, 1, לכן האיבר החיבורי המתאים הוא $(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$.

והפונקציה תהיה המכפלה של האיברים החיבוריים האלה, כלומר:

$$t = (A + \bar{B} + C) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

הפונקציה t תקבל את הערך 0, כנדרש בטבלת האמת, כאשר אחד מכל האיברים החיבוריים יהיה 0. ערך כל איבר חיבורי יהיה 0 עבור צירופי המשתנים המתאימים לשורות שערך העשרוני 2, 5 ו-7 בטבלת האמת שלעיל.

מכאן נוכל לנסח את הכלל הבא:

את הביטוי הבוליאני המתקבל מטבלת אמת אפשר לרשום גם כמכפלה של סכומים. כל סכום מכיל מספר ליטרלים כמספר המשתנים המופיעים בטבלה. מספר הסכומים במכפלה הוא כמספר הצירופים שעבורם הפונקציה מקבלת את הערך 0. הכלל לרישום האיברים החיבוריים (הסכום) הוא כדלקמן:

אם משתנה מסוים מקבל את הערך 0 בשורה שבה הפונקציה צריכה לקבל את הערך 0, הוא יופיע בסכום ללא היפוך. אם ערכו בשורה האמורה הוא 1, יופיע המשתנה עם היפוך בסכום. בצורה זו יקבל הסכום כולו את הערך 0 בשורה הנידונה.

הייצוג המספרי של מכפלת סכומים קנוניים יירשם בעזרת הסימן Π^* . הייצוג המספרי של הפונקציה שהובאה בדוגמה לעיל יירשם כך: $t = \Pi(2,5,7)$.

בתוך הסוגריים מופיעים מספרים המייצגים את הערכים העשרוניים של האיברים החיבוריים, שעבורם הפונקציה מקבלת את הערך 0.

 תרגול

שאלה 4.12

- א.** נתונה הפונקציה $f(X, Y, Z) = \Pi(0,1,2,5,6)$. רשמו את טבלת האמת המתאימה ובטאו את הפונקציה בצורת מכפלה של סכומים קנוניים.
- ב.** רשמו את הפונקציה שקיבלתם בחלק א של השאלה בצורת סכום של מכפלות קנוניות, ובייצוג המספרי המתאים.

4.3.4 הקשר בין הצורות הקנוניות של פונקציות בוליאניות

ראינו שאפשר לתאר פונקציה בוליאנית הן כסכום של מכפלות קנוניות, והן כמכפלה של סכומים קנוניים. מאחר שמדובר באותה פונקציה ובשתי צורות רישום שונות, נשאל: האם תמיד ניתן לעבור מצורה אחת של הפונקציה לצורה האחרת?

כדי לענות על שאלה זו, נציג תחילה שני מונחים. **כפלן** (מסומן m) – מציין איבר כפלי קנוני, והשני – **יספן** (מסומן M) – מציין איבר חיבורי קנוני. כך, למשל, בפונקציה מסוימת $f(A, B, C)$, הביטוי $A\bar{B}C$ הוא כפלן, ואילו הביטוי $\bar{A} + B + C$ הוא יספן. יתרה מזו, לכל כפלן נצמיד אינדקס הזהה לייצוג העשרוני שלו. למשל הכפלן $A\bar{B}C$ יסומן m_5 , כי הייצוג העשרוני

* Π (האות היוונית פי גדולה) מסמלת פעולת כפל של האיברים שמימינה.

של $\bar{A}\bar{B}C$ הוא 5 (טבלה 4.7). בעשותנו כך, הנחנו למעשה שלכל משתנה שאינו נשלל (כגון A) מייחסים את הסיבית 1, ואילו למשתנה נשלל (כגון $\bar{B}$) מייחסים את הסיבית 0.

ABC	מספר השורה	הכפלן	תיאור הכפלן בעזרת C,B,A	היספן*	תיאור היספן בעזרת C,B,A
000	0	m_0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	M_0	$A + B + C$
001	1	m_1	$\bar{A}\bar{B}C$	M_1	$A + B + \bar{C}$
010	2	m_2	$\bar{A}B\bar{C}$	M_2	$A + \bar{B} + C$
011	3	m_3	$\bar{A}BC$	M_3	$A + \bar{B} + \bar{C}$
100	4	m_4	$A\bar{B}\bar{C}$	M_4	$\bar{A} + B + C$
101	5	m_5	$A\bar{B}C$	M_5	$\bar{A} + B + \bar{C}$
110	6	m_6	$AB\bar{C}$	M_6	$\bar{A} + \bar{B} + C$
111	7	m_7	ABC	M_7	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

טבלה 4.7

סימון הכפלנים והיספנים

בטבלת האמת שבה $f = 0$, מקבלים את היספן על ידי שלילת המשתנים שערכם 1 באותה שורה. לפיכך, נסמן את היספן $A + \bar{B} + C$ על ידי M_2 . לאיבר זה מתאים הצירוף הבינארי 010. בטבלה 4.7 מופיעים כל הצירופים האפשריים של שלושה משתנים A, B ו-C, וכן הכפלנים והיספנים המתאימים לצירופים השונים.

פונקציה מסוימת $f(A, B, C)$ מתוארת על ידי כפלנים. מה יהיה התיאור השקול של הפונקציה על ידי יספנים? אם, למשל,

$$f(A, B, C) = \Pi(1,2,5,6)$$

הרי שאותה פונקציה ניתנת לתיאור גם בצורה

$$f(A, B, C) = \Pi(0,3,4,7)$$

כלומר, אם הפונקציה $f(A, B, C)$ מקבלת את הערך $f = 1$ עבור השורות 6,5,2,1 בטבלת האמת, היא תקבל – בהכרח – את הערך $f = 0$ עבור השורות 7,4,3,0.

מכאן שתיאור הפונקציה הנתונה $f(A, B, C)$ יהיה – באמצעות כפלנים:

$$f(A, B, C) = m_1 + m_2 + m_5 + m_6$$

ובאמצעות יספנים יהיה התיאור של אותה פונקציה:

* בחלק מהספרים מסומנים היספנים בסדר הפוך. למשל:

$$\begin{aligned} A + B + C &= M_7 \\ \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} &= M_0 \end{aligned}$$

$$f(A, B, C) = M_0 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_7$$

נציב את הביטויים המפורשים של הכפלים והיספנים המתאימים (ראו טבלה 4.7) ונקבל:

$$f(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$$

או

$$f(A, B, C) = (A + B + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

באופן כללי, אם m_k אינו מופיע בתיאור הפונקציה כסכום של מכפלות קנוניות, אז יופיע M_k (בתיאור אותה פונקציה) כמכפלה של סכומים קנוניים, ולהיפך.

 תרגול

שאלה 4.13

א. נתונה הפונקציה

$$f(A, B, C) = \Sigma(2, 5, 6)$$

כתבו את הפונקציה ברישום מספרי מקוצר כמכפלה של סכומים קנוניים.

ב. כתבו שני ביטויים מפורשים במקום הרישומים המקוצרים, והשתמשו בכללי הצמצום המוכרים לכם כדי להוכיח שהם שווים.

4.4 פישוט פונקציות בוליאניות באמצעות מפות קרנו

4.4.1 מפת קרנו ל-2, 3 ו-4 משתנים

בתחילת הסעיף הקודם הבלטנו את הצורך למצוא שיטה אחידה לפישוט פונקציות בוליאניות. נלמד עתה שיטת פישוט שתתבסס על תהליך קבוע, ללא תלות בפונקציה מסוימת.

השיטה נקראת **מיפוי קרנו** (Karnaugh mapping). כדי לפשט פונקציה על סמך שיטה זו, יש להציגה באמצעות טבלת אמת, או לרשום אותה באחת משתי הצורות הקנוניות שהכרנו.

מפת קרנו (או מפת K^*) היא טבלת אמת הבנויה בצורה מיוחדת. אופן בניית המפה מאפשר פישוט נוח ומהיר של פונקציות בוליאניות. כאשר לפונקציה יש n משתנים, מורכבת מפת קרנו

* את מפת קרנו פיתח Maurice Karnaugh, מהנדס במפעלי בל בארצות הברית. השיטה יעילה ונוחה לפישוט פונקציות המכילות 3, 4 או 5 משתנים. עבור פונקציות המכילות יותר מ-5 משתנים משתמשים בשיטות משוכללות יותר, כדוגמת שיטת Quine-McClusky. פירוט שיטות אלה חורג ממסגרת ספר זה.

מ- 2^n משבצות המייצגות את כל הצירופים האפשריים של משתני הפונקציה. כלומר, מספר המשבצות במפת קרנו זהה למספר השורות שבטבלת האמת המתאימה. סדר המשבצות במפה נקבע על פי חוקיות מוגדרת שעליה נעמוד בהמשך.

להלן נתאר בצורה מפורטת את מבנה מפת קרנו עבור 2, 3 ו-4 משתנים, ואת הקשר בינה לבין טבלת האמת המתאימה.

באיור 4.1 (עמוד 135) מופיעה טבלת הצירופים של שני משתנים ומפת קרנו המתאימה.

מספר השורה	A	B
0	0	0
1	0	1
2	1	0
3	1	1

א. טבלת צירופים

		A	
		0	1
B	0	0 00	2 10
	1	1 01	3 11

ג. גם צירופי המשתנים

מועתקים למפת קרנו

		A	
		0	1
B	0		2
	1		3

ב. מספר השורות

מועתקים למפת קרנו

כאמור, מפת קרנו מכילה משבצת אחת לכל שורה של טבלת הצירופים. המשבצות סומנו בשתי צורות: האחת – על ידי מספרי השורות בטבלת הצירופים (איור 4.1ב); השנייה – על ידי הצירופים של ערכי המשתנים A ו-B (איור 4.1ג). למשל: למשבצת שבה רשום 2, מיוחס הצירוף הבינארי 10 המתקבל מהערכים המתאימים של המשתנים A ו-B. ברור ששני סימונים אלה זהים, כי לצירוף $AB=10$, למשל, אכן מתאים המספר העשרוני 2.

צורת סימון נוספת של המשבצות במפת קרנו היא רישום הליטרלים המתאימים לכל משבצת.

תרגול

שאלה 4.14

שרטטו שתי מפות קרנו עבור שני משתנים, וסמנו בהן ליטרלים: במפה אחת – כדי ליצור כפלים, ובמפה השנייה – כדי ליצור יספנים. באיור 4.2 (עמוד 136) נתונות שתי דוגמאות למשבצת אחת של כל מפה:

		A	
		0	1
B	0	A+B	2 10
	1		

יספנים

		A	
		0	1
B	0		
	1		AB

כפלים

טבלת הצירופים עבור שלושה משתנים, ומפת קרנו המתאימה – מוצגות באיור 4.3 (עמוד 136)

		A			
		00	01	11	10
B	0	0	2	6	4
	1	1	3	7	5

ב. מפת קרנו

מספר השורה	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

א. טבלת צירופים

מעל לכל עמודה במפה רשום צירוף ספרות המייצג את ערכי המשתנים A ו-B. A הוא הספרה המשמעותית ביום (MSD) בייצוג העשרוני של הצירוף, ואחריו – לפי הסדר - B ו-C.

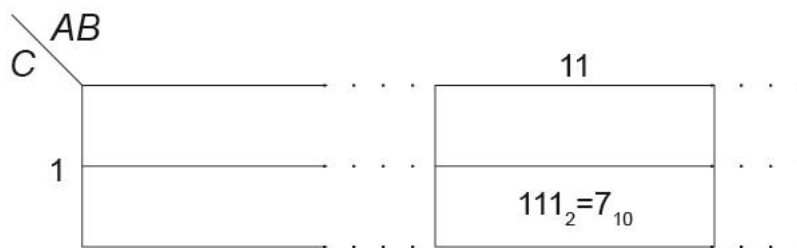
את מפת קרנו של שלושה משתנים אפשר ליצור – באמצעות שיקוף – מתוך המפה של שני משתנים. ציר השיקוף הוא X-Y (איור 4.3ב).

תרגול

שאלה 4.15

א. בכל תא של המפה שבאיור 4.3ב רשמו את המספר הבינארי המתקבל מצירוף ערכי המשתנים ABC, והראו כי ייצוגו העשרוני מתאים לרשום בכל תא.

דוגמה



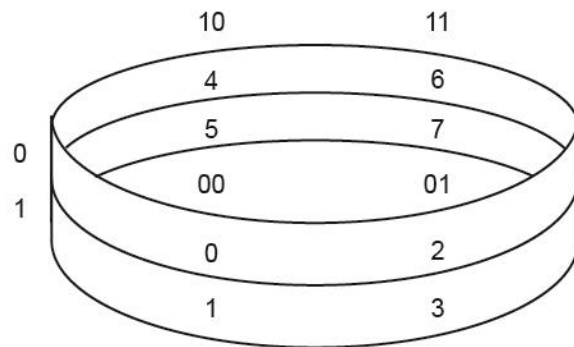
ב. רשמו את הכפולים המתאימים בכל תא של מפת קרנו לשלושה משתנים.

בתשובה 4.15 רואים שהתכונה המייחדת את מפת קרנו מתבטאת בכך שצירופים סמוכים שונים זה מזה בליטרל אחד בלבד.

תאים סמוכים (או: תאים שכנים) הם תאים השונים זה מזה בערכו של ליטרל אחד בלבד. הסמיכות קיימת בין תאים בעלי צלע משותפת, אך לא בין תאים בעלי קדקוד משותף. במלים אחרות: מעבר מתא לתא בכיוון אופקי או אנכי (אך לא באלכסון) גורר שינוי בערכו של ליטרל יחיד.

השוואת התאים שבקצה הימני לתאים שבקצה השמאלי מראה שגם בין שני תאים אלה חל שינוי בליטרל אחד בלבד. לכן, תא הנמצא בקצה הימני של מפת קרנו נחשב סמוך לתא הנמצא בקצה השמאלי - באותו "גובה". בדומה לכך, התאים העליונים והתאים התחתונים של המפה נחשבים סמוכים זה לזה. כדי להבהיר את הסמיכויות, נחשוב על מפת קרנו כעל מבנה בעל צורה גלילית (ראו איור 4.4)

		A			
		00	01	11	10
B	0	0	2	6	4
	1	1	3	7	5



נעבור עתה למפת קרנו של ארבעה משתנים. מפה כזאת מכילה $2^4 = 16$ תאים. כל תא מתאים לאחד מבין 16 הצירופים הקיימים (איור 4.4).

תרגול 

שאלה 4.16

הסבירו כיצד מתקבלת מפת קרנו של ארבעה משתנים על סמך המפה של שלושה משתנים. מטעמי נוחות, נכנה מעתה את תאי המפה במספריהם הסיידוריים. המספר הרשום בכל תא הוא הייצוג העשרוני של המספר הבינארי המתקבל על ידי צירוף המשתנים לאותו תא. למשל: המספר 7 הוא הייצוג העשרוני של הצירוף $ABCD = 0111$. משקלו של A הוא המשמעותי ביותר, ואחריו – לפי הסדר – משקלי B, C, ו-D.

איור 4.5 - מפת קרנו של ארבעה משתנים

B \ A				
	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

שאלה 4.17

שרטטו מפת קרנו של ארבעה משתנים. בכל תא רשמו את האיבר הכפלי המתאים לו.

שאלה 4.18

התבוננו באיור 4.5 וציינו עבור התאים הרשומים בהמשך מהם התאים הסמוכים להם, מה צירופיהם הבינאריים ומה השוני ביניהם.

א. תא 5

ב. תא 2

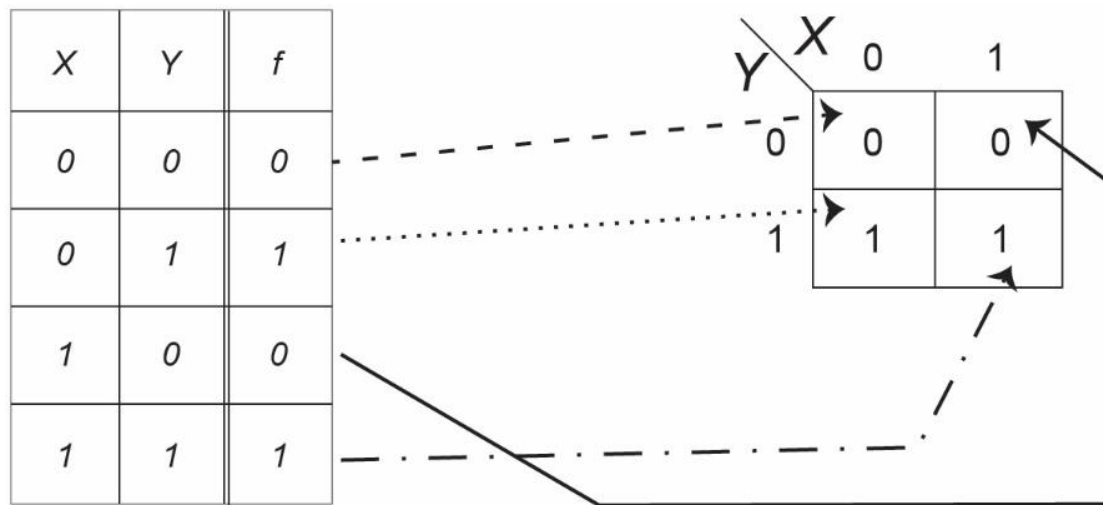
4.4.2 רישום פונקציה בוליאנית במפת קרנו

כדי לרשום פונקציה בוליאנית במפת קרנו, נוח להציג אותה תחילה באחת הצורות הקנוניות שהכרנו. בשלב זה נדון בפונקציות הנתונות בצורת סכום של מכפלות קנוניות, ואם אינן נתונות כך - נביא אותן לצורה זו. כאמור, תיאור פונקציה באמצעות טבלת אמת שקול להצגתה בצורה קנונית. למעשה, מפת קרנו משמשת תחליף לטבלת אמת, ואפשר לרשום את הפונקציה, הנתונה בצורה קנונית, ישירות בתוך מפת קרנו. מאחר שפעולה כזו דורשת מידה מסוימת של מיומנות, ניעזר בשלבים הראשונים גם בטבלת אמת.

נתונה הפונקציה

$$f(X,Y) = \bar{X}Y + XY$$

טבלת האמת המתאימה לה נתונה באיור 4.6.



כדי לרשום את הפונקציה במפת קרנו, יש לרשום 1 בכל תא במפה, המייצג את הצירופים שבהם מקבלת הפונקציה את הערך 1. למשל, התא הימני התחתון מייצג את הצירוף $X \cdot Y$. עבור צירוף זה מקבלת הפונקציה את הערך 1, ולכן רושמים בתא זה את המספר 1. בשאר התאים (כלומר, צירופים שבהם הפונקציה מקבלת את הערך 0) רושמים 0. במלים אחרות - יש לרשום בכל תא את ערך הפונקציה עבור הצירוף המתאים לאותו תא.

תרגול

שאלה 4.19

רשמו את הפונקציות הבאות בטבלת אמת, והעבירו אותן למפת קרנו:

- א. $f(A, B, C) = ABC + \bar{A}\bar{B}C$
 ב. $f(W, X, Y, Z) = W\bar{X}Y\bar{Z} + \bar{W}X\bar{Y}Z + \bar{W}XY\bar{Z} + W\bar{X}YZ$

אם הפונקציה רשומה בצורה מקוצרת (ייצוג מספרי), נוכל לרשום אותה ישירות במפת קרנו - בעזרת המספרים הסידוריים של התאים. נרשום 1 בתאים שמספריהם הסידוריים זהים למספרי השורות (בטבלת האמת) שבהן מקבלת הפונקציה את הערך 1. מספרים אלה זהים לייצוג העשרוני של האיבר הכפלי המתאים לאותה שורה בטבלת האמת, או לאותו תא של מפת קרנו.

נדגים את הנאמר לעיל ברישום הפונקציה הבאה במפת קרנו:

$$f(X, Y, Z) = \Sigma(0,1,2,4,7)$$

		XY			
		00	01	11	10
Z	0	0 1	2 1	6 0	4 1
	1	1 1	3 0	7 1	5 0

באיור 4.7 רשמנו 1 במשבצות, אשר מספריהן זהים למספרי השורות שבהן מקבלת הפונקציה את הערך 1.

שאלה 4.20

רשמו את הפונקציות הבאות במפת קרנו:

א. $f(A, B, C) = \Sigma(0,1,4,5)$

ב. $f(X, Y, Z) = \Sigma(1,3,7,8,9,10,12,15)$

4.4.3 דוגמאות לפישוט פונקציות בעזרת מפות קרנו

המאפיין את מפות קרנו הוא שתאים סמוכים, אופקית או אנכית (אבל לא באלכסון), מתאימים לאיברים כפליים (או חיבוריים) הנבדלים זה מזה בליטרל אחד בלבד. כדי להמחיש את היתרון הטמון בכך, נתבונן במפת קרנו שבאיור 4.8. התאים 8 ו-12 נמצאים בשורה הראשונה של מפת קרנו, והם סמוכים זה לזה (אופקית). ערך הפונקציה המתאים לתאים אלה הוא 1. הכפלנים השייכים לתאים אלה הם:

* תזכורת: באות m מסמנים כפלן (minterm). m_8 הוא הכפלן בתא 8.

$$m_8 = A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

$$m_{12} = AB\bar{C}\bar{D}$$

		$AB \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}B \quad A\bar{B}$			
		$CD \quad 00 \quad 01 \quad 11 \quad 10$			
$\bar{C}\bar{D}$	00	0 ⁰ 0	4 ⁰ 0	12 ¹ 1	8 ¹ 1
$\bar{C}D$	01	1 ⁰ 0	5 ⁰ 0	13 ⁰ 0	9 ⁰ 0
CD	11	3 ¹ 1	7 ⁰ 0	15 ⁰ 0	11 ⁰ 0
$C\bar{D}$	10	2 ¹ 1	6 ⁰ 0	14 ⁰ 0	10 ⁰ 0

שני כפלנים אלה נבדלים בליטרל אחד בלבד ($\bar{B}, B$). אפשר לצרפם יחד ואז נקבל:

$$m_8 + m_{12} = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} = A\bar{C}\bar{D}(\bar{B} + B) = A\bar{C}\bar{D}$$

כך החלפנו שני איברים בעלי 4 משתנים באיבר בעל 3 משתנים, כלומר - איחדנו שני איברים. איחוד איברים במפת קרנו מסומל על ידי הקפת הספרות '1' בתאים סמוכים באמצעות עקום סגור אחד (ראו איור 4.8).

אילו נרשמו שני איברים אלה בביטוי המורכב גם מאיברים אחרים, ייתכן שהיינו מבחינים (על ידי השוואה בין אחד האיברים לבין כל האחרים) שניתן לאחד אותם לאיבר אחד. אבל אפשר שלא היינו מבחינים בכך כלל בשל ריבוי הגורמים בביטוי המורכב, או שהיינו מבחינים בכך רק לאחר חיפוש ממושך. אולם באמצעות מפת קרנו מבחינים מיד שאיברים כפליים אלה ניתנים לאיחוד בשל היותם בתאים סמוכים.

נתבונן שוב בתאים הסמוכים 8 ו-12 באיור 4.8. לכל אחד משני תאים אלה מתאימים ארבעה ליטרלים; שלושה מהם - $\bar{D}, \bar{C}, A$ - זהים. לעומת זאת, המשתנה B מופיע פעם כליטרל B ופעם כליטרל $\bar{B}$ בשני התאים. המשותף לשני תאים אלה הוא אפוא $A\bar{C}\bar{D}$. תוצאה זהה קיבלנו כבר לפני מספר שורות, אלא שאז הפעלנו לשם כך כללי צמצום. באותו אופן נוכל לקבל כי (ראו איור 4.8):

$$m_2 + m_3 = \bar{A}\bar{B}C$$

המשתנה D מופיע בשני תאים אלה פעם כליטרל D ופעם כליטרל $\bar{D}$, ולכן אינו מופיע באיבר שלעיל.

לסיכום: לולא היינו מפשטים את הפונקציה, היינו מקבלים ממפת קרנו (איור 4.8) ארבעה כפלנים:

$$f(A, B, C, D) = A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$

כל אחד מהכפלנים מתאים לאחד התאים במפת קרנו שבהם מקבלת הפונקציה את הערך 1. לאחר איחוד התאים הסמוכים קיבלנו שני איברים כפליים, שלכל אחד מהם 3 ליטרלים:

$$f(A, B, C, D) = A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C$$

מפת קרנו סייעה לנו אפוא לפשט את הפונקציה.

 תרגול

שאלה 4.21

נתונה הפונקציה

$$f(A, B, C, D) = \Sigma(1, 2, 5, 6, 8, 9, 15)$$

רשמו את הפונקציה בצורת סכום מכפלות מפושט (לא קנוני).

נדון עתה בתאים סמוכים שאינם נוגעים זה בזה.

הנה דוגמאות אחדות: כל תא בעמודה הקיצונית השמאלית במפת קרנו, סמוך לתא שבעמודה הקיצונית הימנית באותה שורה. כך, למשל, m_0 סמוך ל- m_8 , m_1 סמוך ל- m_9 וכדומה. באותו אופן, השורה העליונה סמוכה לשורה התחתונה כך ש- m_0 סמוך ל- m_4 , m_2 סמוך ל- m_6 וכן הלאה.

נתבונן באיברים המסומנים במפת קרנו אשר באיור 4.9.

		AB			
		CD			
		00	01	11	01
00	0	0	0	1	1
01	1	0	0	0	0
11	3	1	0	0	0
01	2	1	0	0	1

$m_8 + m_{10}$

$m_2 + m_{10}$

מפה זו מכילה אותם נתונים כמו אלה שבאיור 4.8, אולם נוסף הערך 1 בתא m_{10} . איבר זה, m_{10} , ניתן לאיחוד עם m_2 וגם עם m_8 :

$$m_2 + m_{10} = \bar{B}C\bar{D}$$

$$m_8 + m_{10} = A\bar{B}\bar{D}$$

נשתמש באחת משתי האפשרויות, למשל בראשונה ($m_2 + m_{10}$). במקרה זה נקבל:

$$(4-1) f(A, B, C, D) = \Sigma(2, 3, 8, 10, 12)$$

$$= \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD + AB\bar{C}\bar{D}$$

$$= A\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{B}C\bar{D} *$$

$$\begin{array}{ccccc} & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ m_8 + m_{12} & m_2 + m_3 & & m_2 + m_{10} & \end{array}$$

* m_2 התחבר פעמיים. מותר לעשות זאת בשל כלל הכפילות.

איור 4.10

		AB			
		CD			
		00	01	11	10
00	0	0	0	1	1
01	1	0	0	0	0
11	3	1	0	0	0
10	2	1	0	0	1

אם נשתמש בצירוף השני $(m_8 + m_{10})$, נקבל:

$$\begin{aligned}
 (4-2) \quad f(A, B, C, D) &= \Sigma(2, 3, 8, 10, 12) \\
 &= \bar{A}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{D} \\
 &= \bar{A}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{B}C\bar{D}^{**} \\
 &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\
 &\quad m_8 + m_{12} \quad m_2 + m_3 \quad m_2 + m_{10}
 \end{aligned}$$

בעת פיתוח המשוואה (4-1) השתמשנו פעמיים בכפלן m_2 : פעם אחת צירפנו אותו לכפלן m_3 , ופעם אחרת – לכפלן m_{10} (ראו איור 4.9). ובעת פיתוח המשוואה (4-2) השתמשנו פעמיים בכפלן m_8 : צירפנו אותו הן לכפלן m_{12} , והן לכפלן m_{10} (בנפרד).

האם מותר להשתמש פעמים אחדות באותו איבר לצורך פישוט פונקציה? כן. שימוש זה מותר לפי כלל הכפילות. למשל,

$$\bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \dots + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} = \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$$

לא רק ששימוש זה מותר, אלא שהוא נחוץ לעיתים לצורך פישוט פונקציה, כפי שנראה בהמשך.

** m_8 התחבר פעמיים.

שאלה 4.22

השתמשו במפות קרנו כדי לפשט את הפונקציות שלהלן.

א. $f(A, B, C) = \Sigma(0, 1, 5, 7)$

ב. $f(X, Y, Z) = \Sigma(1, 2, 5, 6)$

4.4.4 יצירת קבוצות במפת קרנו

ראינו שאפשר לצרף במפת קרנו שני תאים הסמוכים זה לזה, ולקבל איבר אחד שממנו הוצא אחד המשתנים. בדרך דומה אפשר לצרף 4 תאים סמוכים, ולקבל איבר אחד שממנו הוצאו שני משתנים. קבוצות אופייניות של 4 תאים סמוכים מתוארות באיור 4.11 א-ד. לא כל 4 תאים סמוכים ניתנים לצירוף לאיבר אחד. באיור 4.11 מתואר מקרה כזה.

כיצד נדע אם ארבעה תאים סמוכים ניתנים לצירוף לקבוצה אחת?

אם לכל אחד מארבעת התאים יש **שני תאים סמוכים**, אפשר לצרף את ארבעתם לקבוצה אחת.*

לכל אחד משני התאים המודגשים באיור 4.11 יש רק תא סמוך אחד, ולכן לא ניתן לצרף את ארבעת התאים לקבוצה אחת.

אין צורך לבדוק כל ארבעה תאים סמוכים כדי לדעת אם ניתן לצרפם לקבוצה אחת. די להתבונן באיור 4.11 כדי להיווכח בהבדל בין שני סוגי התאים הסמוכים.

* באופן כללי, אם נתונים 2^m תאים סמוכים, צריכים להיות לכל תא m תאים סמוכים, כדי שיהיה אפשר לצרף את 2^m התאים לקבוצה אחת. במקרה שלנו $m = 2$, $2^m = 4$.

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0 0	4 0	12 0	8 0
	01	1 1	5 1	13 1	9 1
	11	3 0	7 0	15 0	11 0
	10	2 0	6 0	14 0	10 0

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0 0	4 0	12 0	8 0
	01	1 1	5 1	13 0	9 0
	11	3 1	7 1	15 0	11 0
	10	2 0	6 0	14 0	10 0

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0 0	4 1	12 1	8 0
	01	1 0	5 0	13 0	9 0
	11	3 0	7 0	15 0	11 0
	10	2 0	6 1	14 1	10 0

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0 1	4 0	12 0	8 1
	01	1 0	5 0	13 0	9 0
	11	3 0	7 0	15 0	11 0
	10	2 1	6 0	14 0	10 1

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0 0	4 0	12 0	8 0
	01	1 0	5 1	13 1	9 1
	11	3 0	7 0	15 0	11 1
	10	2 0	6 0	14 0	10 0

מהצירוף $m_1 + m_3 + m_5 + m_7$ באיור 4.11א, מקבלים:

$$\begin{aligned}
 m_1 + m_3 + m_5 + m_7 &= \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD \\
 &= \bar{A}\bar{C}D(\bar{B} + B) + \bar{A}CD(\bar{B} + B) \\
 &= \bar{A}\bar{C}D + \bar{A}CD \\
 &= \bar{A}D(\bar{C} + C) = \bar{A}D
 \end{aligned}$$

באופן דומה, נקבל עבור איור 4.11ב את המשוואה

$$f(A, B, C, D) = \Sigma(1, 5, 9, 13) = \bar{C}D$$

באיור 4.11 ג תאי הפינות נחשבים לשכנים, ולכן

$$g(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 8, 10) = \bar{B}\bar{D}$$

זו הצורה הפשוטה ביותר של פונקציה g.

לתוצאות אלה אפשר להגיע מתוך הסתכלות בלבד. למשל, בפונקציה g, ערכם של המשתנים B ו-D הוא 0, B=0, D=0 בכל ארבעת התאים השייכים לקבוצה אחת. לכן האיבר הכפלי המתאים ביותר הוא $\bar{B}\bar{D}$.

 תרגול

שאלה 4.23

א. רשמו בסימון מספרי מקוצר את הפונקציה $h(A, B, C, D)$ המתקבלת מאיור 4.11, ופשטו את הפונקציה.

ב. מצאו צורה מפשטת של הפונקציה המתוארת על ידי מפת קרנו באיור 4.12.

WX \ YZ		WX			
		00	01	11	10
YZ	00	0	0	1	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	1	0

באיור 4.12 מתוארות קבוצות בעלות שמונה תאים. לאיברי קבוצות אלה ליטרל משותף אחד בלבד; באיור 4.13 א: $f_1 = \bar{A}$ ובאיור 4.13 ב: $f_2 = \bar{D}$ (השתדלו להסיק מסקנות אלה מתוך התבוננות במפות!).

איור 4.13

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1

$f_2 = \bar{D}$
ב

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	1	1	0	0	0
01	1	1	0	0	0
11	1	1	0	0	0
10	1	1	0	0	0

$f_1 = \bar{A}$
א

שאלה 4.24

שתי הפונקציות שלהלן הן של ארבעת המשתנים (A, B, C, D) . שרטטו את מפת קרנו של כל פונקציה.

א. $f = A$

ב. $f = C$

שאלה 4.25

במפת קרנו רשום '1' בכל תא ותא. מה משמעות הדבר?

4.4.5 פישוט מרבי של פונקציות לוגיות בעזרת מפת קרנו

נתונה פונקציה שהובאה לצורת סכום של מכפלות קנוניות, או לצורה של ייצוג עשרוני מקוצר. כדי לפשט את הפונקציה באמצעות מפת קרנו, יש להשתמש בעקרונות הבאים:

1. בבחירת קבוצות התאים הסמוכים חייבים לכלול כל תא לפחות פעם אחת, וכפי שכבר נאמר, אפשר להשתמש פעמים אחדות בכל תא, לפי הצורך.
2. רצוי לכלול בכל קבוצה את המספר המרבי האפשרי של תאים.
3. מספר הקבוצות צריך להיות קטן ככל האפשר.

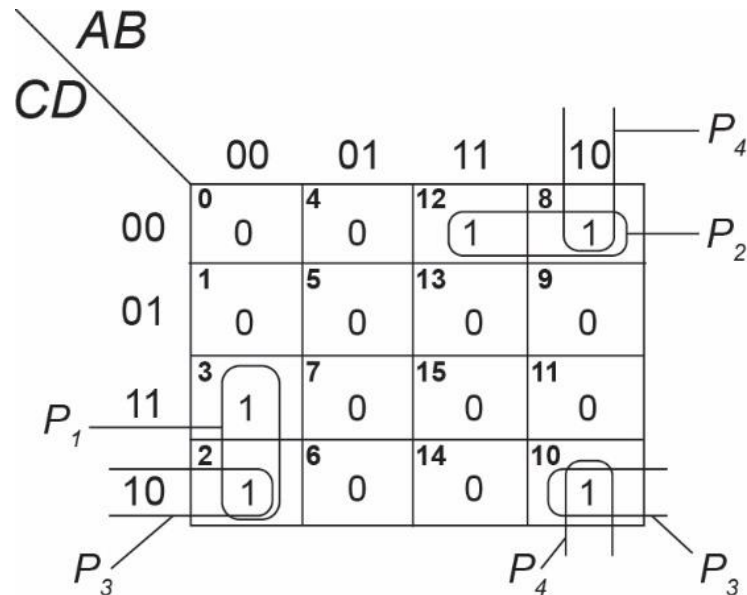
קבוצות התאים הסמוכים מכונות לפעמים רכיבים ראשוניים (prime implicants). נסמן רכיב ראשוני באות P . בדוגמה שראינו באיור 4.9 (הדוגמה מובאת שוב באיור 4.14, תוך סימון הרכיבים הראשוניים) הופיע מקרה מסוג זה. שם היו הרכיבים הראשוניים $P_4 = m_8 +$

ניתנת הפונקציה המתאימה $m_{10}; P_3 = m_2 + m_{10}; P_2 = m_8 + m_{12}; P_1 = m_2 + m_3$ לביטוי באחת משתי דרכים:

$$f = P_1 + P_2 + P_3$$

$$f = P_1 + P_2 + P_4$$

איור 4.14



בשני המקרים היה הכרחי להשתמש ב- P_1 ; אחרת m_3 לא היה נכלל. לכן קוראים ל- P_1 רכיב ראשוני חיוני (essential prime implicant). גם P_2 הוא רכיב חיוני, כיוון שבלעדיו לא היה m_{12} נכלל בביטוי. לעומת זאת, P_3 אינו רכיב חיוני, מפני שאיננו חייבים לבחור אותו. שיקול דומה קיים עבור P_4 . ובכל זאת, יש לבחור את P_3 או את P_4 .

השאיפה למצוא במפת קרנו רכיבים ראשוניים, אשר יכללו מספר גדול ככל האפשר של תאים, עשויה לעורר בעיה. ראו דוגמה לבעיה כזאת באיור 4.15. אנו עלולים לבחור את הקבוצה $m_5 + m_7 + m_{13} + m_{15}$, המסומנת במסגרת המקווקו. אילו עשינו כך, לא היינו יכולים להימנע מהוספת ארבעת רכיבים ראשוניים חיוניים $(m_5 + m_4, m_7 + m_3, m_5 + m_9, m_{14} + m_{13})$ שבהם "1" שנשארו (m_9, m_{14}, m_3, m_4) .

איור 4.15

AB \ CD		00 01 11 10			
		0	4	12	8
00	1	1	0	0	
01	1	0	0	1	
11	1	1	0	0	
10	1	0	0	1	

ב

AB \ CD		00 01 11 10			
		0	4	12	8
00	0	1	0	0	
01	0	1	1	1	
11	1	1	1	0	
10	0	0	1	0	

א

לאחר שנעשה זאת, יתברר לנו שכל ארבעת התאים של הקבוצה הראשונה נכללו ממילא. ולכן הקבוצה הראשונה, שהיא הגדולה ביותר (מבחינת מספר התאים), היא למעשה מיותרת. דוגמה דומה מתוארת באיור 4.15.

שתי דוגמאות אלה מראות שלא תמיד כדאי לחפש את הקבוצות שכוללות את מספר התאים הגדול ביותר. כמו כן הן מלמדות כי יש לוודא שהפתרון המוצע לא ישתמש ברכיבים ראשוניים גדולים - אך מיותרים.

תרגול

שאלה 4.26

כתבו בצורה הפשוטה ביותר את הפונקציות המתקבלות מן המפות שבאיור 4.15.

אלגוריתם לשימוש במפת קרנו

כדי לקבל את הצורה הפשוטה ביותר של פונקציה בוליאנית, וכדי להימנע מן הבעיה שהוזכרה לעיל, נפעל לפי האלגוריתם* המפורט להלן:

1. כל תא שלא ניתן לצרפו לקבוצה אחת (כדי ליצור רכיב ראשוני בן שני תאים), יש להקיפו ולהתייחס אליו כאל רכיב ראשוני חיוני.
2. יש להקיף כל שני תאים המשמשים רכיב ראשוני, אם אין רכיבים ראשוניים אחרים המכילים את שני התאים.
3. יש לזהות כל תא שניתן לצרפו **בדרך אחת ויחידה** לשלושה תאים אחרים, כך שיתקבל רכיב ראשוני. גם אם חלק מארבעת התאים המעורבים שייכים כבר לרכיבים ראשוניים.

* **אלגוריתם** הוא סדרת הוראות, מוגדרות היטב, לפתרון בעיה.

בני שני תאים, יש להקיף את כל הארבעה. נדגיש פעם נוספת, כי יש להתעלם זמנית מתא שאפשר לצרפו לרכיב ראשוני של ארבעה תאים **בשתי דרכים ויותר**.

4. יש לחזור על הנאמר לעיל עבור רכיבים ראשוניים של שמונה תאים, שישה-עשר תאים, ובאופן כללי: 2^n תאים.

5. בגמר תהליך זה, נבדוק אם נותרו עדיין תאים שלא נכללו בשום קבוצה. תאים כאלה אפשר לצרף זה לזה, או לרכיבים ראשוניים (או לחלק מהם) שכבר סומנו בדרך שרירותית. מובן שנשאף ליצור מתאי שארית אלה מספר קטן ככל האפשר של קבוצות.

להלן דוגמה לשימוש באלגוריתם שתואר לעיל. בדוגמה זו מתקבל פתרון יחיד כתוצאה מהשימוש באלגוריתם.

דוגמה 4-7

נתונה הפונקציה

$$f(A, B, C, D) = \Sigma(0,1,3,5,6,9,11,12,13,15)$$

השתמשו במפת קרנו כדי לפשט פונקציה זו.

פתרון

איור 4.16

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	0	1	0	1	0
01	1	1	1	1	1
11	3	1	0	1	1
10	2	0	1	0	0

ב

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	0	1	0	1	0
01	1	1	1	1	1
11	3	1	1	1	1
10	2	0	1	0	0

א

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	0	1	0	1	0
01	1	1	1	1	1
11	3	1	0	1	1
10	2	0	1	0	0

ד

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	0	1	0	1	0
01	1	1	1	1	1
11	3	1	0	1	1
10	2	0	1	0	0

ג

באיור 4.16 מוצגת מפת קרנו עבור הפונקציה הנתונה בדוגמה 4-7. נתייחס לצעדים שבאלגוריתם:

1. תא m_6 אינו ניתן לצירוף לכל תא אחר. לכן נקיף אותו ונקבל אותו כרכיב ראשוני חיוני. שאר התאים ניתנים לצירוף לתאים אחרים
2. את התאים m_0 ו- m_{12} אפשר לצרף זוגות - בדרך אחת ויחידה. אנו מקיפים את זוגות התאים הללו, כמתואר באיור 4.16ב.
3. התאים m_3, m_5, m_{15} ניתנים לצירוף לקבוצות בנות ארבעה תאים בדרך אחת בלבד. קבוצות הארבעה שנוצרו כוללות תאים נוספים, שלא כולם נכללו בקבוצות של הזוגות. לכן נקיף את שלוש הקבוצות שהן בעלות ארבעה תאים, כמתואר באיור 4.16ג.
4. מאחר שאין שמונה תאים הניתנים לצירוף, נעבור לשלב 5 של האלגוריתם.
5. באיור 4.16ד הובאו כל הקבוצות המסומנות, וברור שכל התאים הובאו בחשבון.

מקריאה במפה אנו מסיקים כי

$$f(A, B, C, D) = \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C + ABC + \bar{C}D + \bar{B}D + AD$$

בשאלה שלהלן אפשר לקבל פתרונות שונים כתוצאה מהשימוש באלגוריתם. יש להפעיל שיקול דעת כדי למלא את הדרישות של צעד 5 שבאלגוריתם.

 תרגול

שאלה 4.27

נתונה פונקציה בעלת ארבעה משתנים:

$$f(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 15)$$

השתמשו במפת קרנו כדי לפשט פונקציה זו ולהביאה לצורה מינימלית.

שאלה 4.28

פשטו, בעזרת מפת קרנו, את הפונקציות שלהלן:

א. $f(A, B, C) = \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 5)$

ב. $f(X, Y, Z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$

ג. $f(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13)$

ד. $f(A, B, C, D) = \Sigma(1, 3, 6, 8, 9, 11, 13, 15)$

4.4.6 מיפוי פונקציה שאינה נתונה בצורתה הקנונית

בתת-סעיף 4.4.1 כתבנו כי לצורך פישוט פונקציה באמצעות מפת קרנו, יש להציג פונקציה זו בצורה קנונית. להלכה הדבר נכון, אולם באופן מעשי כאשר פונקציה אינה מוצגת בצורה קנונית, אין צורך לטרוח ולהרחיב אותה לצורתה זו. במקום זאת תיעשה ההרחבה לאיברים כפליים קנוניים – בעת רישום איברי הפונקציה במפת קרנו.

נניח שברצוננו להעביר למפת קרנו את הפונקציה:

$$f(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + \bar{A}\bar{C} + A$$

בפונקציה זו רק האיבר הכפלי הראשון מופיע בצורה קנונית, והוא יירשם כפי שהוא במפת קרנו (איור 4.17א). האיבר השני, $B\bar{C}D$, מתאים – במפת קרנו – למקומות שעבורם $B=1$, $C=1$, $D=1$ ואשר אינם תלויים ב- A . לכן, איבר זה יירשם במקומות שבהם $B=1$, $C=1$, $D=1$ עבור שני הערכים של A , כמתואר באיור 4.17ב. באופן דומה, האיבר השלישי יירשם כמתואר

באיור 4.17ג. במקומות שבהם $A=0$, נקבל כי $C=0$ עבור שני הערכים של B ו-D. לבסוף, עבור האיבר A יסומן 1 (איור 4.17ד) בכל תא במפה שבו $A=1$, ועבור שני הערכים של כל אחד משלושת המשתנים האחרים. מפת קרנו המלאה של הפונקציה f מתקבלת מתוך צירוף המפות החלקיות של כל איברי הפונקציה (איור 4.17ה). מתוך איור 4.17ה רואים כי $f(A, B, C, D) = A + \bar{C}$.

איור 4.17

$\overline{A}\overline{B} . \text{ג}$					$B\overline{C}D . \text{ב}$					$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} . \text{א}$																																																																															
<table><tr><td>$CD \backslash AB$</td><td>00</td><td>01</td><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>00</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>01</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>					$CD \backslash AB$	00	01	11	10	00	1	1	0	0	01	1	1	0	0	11	0	0	0	0	10	0	0	0	0	<table><tr><td>$CD \backslash AB$</td><td>00</td><td>01</td><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>00</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>01</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>					$CD \backslash AB$	00	01	11	10	00	0	0	0	0	01	0	1	1	0	11	0	0	0	0	10	0	0	0	0	<table><tr><td>$CD \backslash AB$</td><td>00</td><td>01</td><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>00</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>01</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>					$CD \backslash AB$	00	01	11	10	00	1	0	0	0	01	0	0	0	0	11	0	0	0	0	10	0	0	0	0
$CD \backslash AB$	00	01	11	10																																																																																					
00	1	1	0	0																																																																																					
01	1	1	0	0																																																																																					
11	0	0	0	0																																																																																					
10	0	0	0	0																																																																																					
$CD \backslash AB$	00	01	11	10																																																																																					
00	0	0	0	0																																																																																					
01	0	1	1	0																																																																																					
11	0	0	0	0																																																																																					
10	0	0	0	0																																																																																					
$CD \backslash AB$	00	01	11	10																																																																																					
00	1	0	0	0																																																																																					
01	0	0	0	0																																																																																					
11	0	0	0	0																																																																																					
10	0	0	0	0																																																																																					
<table><tr><td>$CD \backslash AB$</td><td>00</td><td>01</td><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>00</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>01</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> $f=A+\overline{C} . \text{ה}$					$CD \backslash AB$	00	01	11	10	00	1	1	1	1	01	0	1	1	1	11	0	0	1	1	10	0	0	1	1	<table><tr><td>$CD \backslash AB$</td><td>00</td><td>01</td><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>00</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>01</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> $A . \text{ד}$					$CD \backslash AB$	00	01	11	10	00	0	0	1	1	01	0	0	1	1	11	0	0	1	1	10	0	0	1	1																														
$CD \backslash AB$	00	01	11	10																																																																																					
00	1	1	1	1																																																																																					
01	0	1	1	1																																																																																					
11	0	0	1	1																																																																																					
10	0	0	1	1																																																																																					
$CD \backslash AB$	00	01	11	10																																																																																					
00	0	0	1	1																																																																																					
01	0	0	1	1																																																																																					
11	0	0	1	1																																																																																					
10	0	0	1	1																																																																																					

תרגול 

שאלה 4.29

העבירו למפת קרנו את הפונקציה

$$f(A, B, C, D) = AB + \bar{A}C + AD + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}D$$

ופשטו אותה.

4.4.7 פישוט פונקציות הנתונות כמכפלה של סכומים קנוניים – רשות

עד כה עסקנו בפישוט פונקציה, תוך שימוש במפת קרנו. כפי שכבר ראינו, בשעה שפונקציה מוצגת כמכפלה של סכומים, יש להתייחס לצירופי המשתנים שעבורם מקבלת הפונקציה את הערך 0. לכן, עבור פונקציות המוצגות כמכפלת סכומים, נרשום 0 במפת קרנו, בתאים המייצגים את האיברים החיבוריים.

האלגוריתם לצירוף איברים כפליים מתאים בכל לאלגוריתם לצירוף איברים חיבוריים. עם זאת, יש שינוי במינוח: בהתאמה למונח רכיב ראשוני, נשתמש במונח **מורכב ראשוני** עבור קבוצת תאים שבהם ערך הפונקציה הוא 0.

נדגים את תהליך הפישוט במקרה זה בעזרת פונקציה בעלת ארבעה משתנים:

$$f(A, B, C, D) = \prod(0, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15)$$

נשתמש במפת קרנו לפישוט הפונקציה:

איור 4.18

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	0	1	1
	01	0	0	0	0
	11	1	0	0	0
	10	1	0	0	1

מפת קרנו המתארת את הפונקציה נתונה באיור 4.18. באיור זה סימנו במפורש את הצירופים שהפונקציה מקבלת בהם ערך 0. המשבצות הריקות מציינות צירופים שערך הפונקציה שלהם הוא 1. האלגוריתם שראינו בתת-סעיף 4.4.5 מוליך באופן חד-משמעי לקבוצות שתוארו במפה זו. אולם, במקרה זה יתחלפו תפקידי ה-1 וה-0: משתנה שערכו 0 במשבצת מסוימת יופיע

בפונקציה ללא היפוך; כאשר ערך המשתנה 1, הוא יופיע במהופך. לפיכך נוכל לרשום ישירות מן המפה כי הפונקציה היא:

$$f(A, B, C, D) = \underbrace{(A + C + D)}_א + \underbrace{(\overline{C} + \overline{D})}_ב + \underbrace{(\overline{B} + \overline{D})}_ג \underbrace{(\overline{B} + \overline{C})}_ד$$

תרגול 

שאלה 4.30

השתמשו במפת קרנו לפישוט הפונקציות הבאות:

א. $g(A, B, C, D) = \Pi(0, 1, 2, 5, 7, 10, 12)$

ב. $f(W, X, Y, Z) = \Pi(0, 2, 8, 10)$

4.4.8 צירופי ברירה במפת קרנו

את משמעות הכותרת של סעיף זה נבהיר בעזרת דוגמה 4-8.

דוגמה 4-8

צופן BCD נועד לייצג מספרים עקרוניים בצורה בינארית, כך שכל ספרה עשרונית מבוטאת בעזרת ארבע סיביות. טבלה 4.8 מתארת צופן BCD. אפשר להניח שכל אחת מארבע הסיביות D, C, B, A היא משתנה בוליאני. הפונקציה f בעמודה הימנית של טבלה 4.8 מקבלת את הערך 1 בכל שורה שבה המספר העשרוני זוגי (0 הוא מספר זוגי).

יש לפשט את הפונקציה f .

מספר עשרוני	צופן BCD				f
	A	B	C	D	
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	Φ
11	1	0	1	1	Φ
12	1	1	0	0	Φ
13	1	1	0	1	Φ
14	1	1	1	0	Φ
15	1	1	1	1	Φ

צירופי
ברירה

טבלה 4.8

הפונקציה עבור דוגמה 4-8

פתרון

מספר הצירופים האפשריים עבור ארבעת המשתנים של הפונקציה $2^4 = 16$. בטבלת האמת של הפונקציה יש לקבוע אפוא 16 ערכים שונים. אולם אנו מתעניינים רק בעשרת הצירופים המתאימים לספרות 0-9, הרשומות בצופן BCD. משמע, איננו מתעניינים בערך הפונקציה של ששת הצירופים הנותרים (10,11,12,13,14,15). במילים אחרות: עבור הצירופים הנותרים אנו יכולים לקבוע – באופן שרירותי לחלוטין – אם לתת לפונקציה ערך 0 או 1. משום כך נהוג לכנות את הצירופים הללו **צירופי ברירה** (don't care). רישום צירופי הברירה בטבלת אמת ובמפת קרנו נעשה לרוב באמצעות האות היוונית Φ , ראו טבלה 4.8 ואיור 4.19.

בשיטת הרישום המספרי תירשם הפונקציה f כך:

$$f = \Sigma(0,2,4,6,8) + \Sigma_{\Phi}(10,11,12,13,14,15)$$

מפת קרנו המתאימה לפונקציה f מוצגת באיור 4.19.

		AB			
		CD			
		00	01	11	10
		0	4	12	8
00		1	1	ϕ	1
01		0	0	ϕ	0
11		0	0	ϕ	ϕ
10		1	1	ϕ	ϕ

צירופי הברירה עוזרים לנו ליצור רכיבים ראשוניים גדולים יותר במפת קרנו, מפני שניתן לבחור שרירותית את ערכם כ-0 או 1. נוכל אם כן לפשט אף יותר את הפונקציה הדרושה.

במקרה זה נוכל ליצור רכיב ראשוני יחיד (איור 4.20).

		AB			
		CD			
		00	01	11	10
		0	4	12	8
00		1	1	ϕ	1
01		0	0	ϕ	0
11		0	0	ϕ	ϕ
10		1	1	ϕ	ϕ

כך נקבל את הפונקציה f בצורתה הפשוטה ביותר:

$$f = \bar{D}$$

בדוגמה 4-8 יצרנו פישוט מרבי של הפונקציה באמצעות שימוש בחלק מהמשבצות המסומנות בצירופי ברירה. נרשום אם כן את הכלל:

אם פונקציה בוליאנית מסוימת כוללת צירופי ברירה, אפשר להכליל חלק מצירופים אלה (או את כולם) ברכיבים ראשוניים, לשם השגת פישוט מרבי של הפונקציה

באיור 4.20 קבענו, לפי הכלל שלעיל, את הערך 1 לתאים המתאימים לכפלים m_{10}, m_{12}, m_{14} ואילו לתאים המתאימים לכפלים m_{11}, m_{13}, m_{15} קבענו את הערך 0.

תרגול

שאלה 4.31

פשטו את הפונקציות הבאות בעזרת מפת קרנו:

א. $f(A, B, C, D) = \Sigma(0,1,2,4,5,8,9,14) + \Sigma_{\Phi}(6,10,12,13)$

ב. $f(A, B, C, D) = \Sigma(2,8,9,10,13) + \Sigma_{\Phi}(0,5,7,14)$

ג. $f(A, B, C, D) = \Pi(0,5,8,10) \cdot \Pi_{\Phi}(2,7,15)$

הסימון Π_{Φ} מצין שבצירופים המתאימים במפת קרנו מופיע Φ .

שאלות חזרה לפרק 4

שאלה 4.32

נתונה הפונקציה הבאה:

$$f(A, B, C) = C + (\bar{A} + B) \cdot (B + \bar{C})$$

- א. הציגו את הפונקציה בצורה של מכפלת הסכומים.
- ב. פשטו את הפונקציה בדרך אלגברית.
- ג. שרטטו את מפת קרנו של הפונקציה.
- ד. פשטו את הפונקציה באמצעות מפת קרנו.

שאלה 4.33

נתונה הפונקציה:

$$f(A, B, C) = A \oplus B + B\bar{C}$$

- א. רשמו את הפונקציה בייצוג של סכום מכפלות.
- ב. פשטו אותה באמצעות מפת קרנו.

שאלה 4.34

נתונה הפונקציה הבאה:

$$f(A, B, C, D) = \bar{A}\bar{C}D + ABC + A\bar{C}D + ABC\bar{C}$$

- א. רשמו את הביטוי הקנוני של סכום המכפלות של הפונקציה.
- ב. רשמו את טבלת האמת של הפונקציה.
- ג. מצאו בדרך אלגברית את הביטוי המזערי של הפונקציה.
- ד. שרטטו את מפת קרנו של הפונקציה.
- ה. מצאו, בעזרת מפת קרנו, את הביטוי המזערי של הפונקציה.

שאלה 4.35

$$f_1(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$$

$$f_2(A, B, C) = \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC\bar{C}$$

- א. מצאו את הביטוי ל- f_1 כמכפלת הסכומים.
- ב. מצאו את הביטוי לפונקציה בייצוג $f_2 = \Sigma(\dots)$.
- ג. מצאו, במספר מזערי של ליטרלים, את הפונקציות:

$$f_3 = f_1 \cdot f_2$$

$$f_4 = f_1 + f_2$$

שאלה 4.36

נתונה הפונקציה הבאה:

$$f(A, B, C, D) = (B + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot (A + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$$

- א. רשמו את הפונקציה כמכפלת סכומים.
- ב. רשמו את מפת קרנו של הפונקציה וצמצמו אותה למספר מזערי של ליטרלים.

שאלה 4.37

א. רשמו טבלת אמת של הפונקציה הבאה:

$$f = \Sigma(2, 4, 10, 12)$$

- ב. רשמו את מכפלת הסכומים של הפונקציה.
- ג. רשמו את סכום המכפלות של הפונקציה.

שאלה 4.38

מצאו, באמצעות מפת קרנו, ביטוי מזערי לפונקציות הבאות:

$$f = \Sigma(0, 6, 10, 12) + \Sigma_{\Phi}(2, 7, 8, 11, 4)$$

$$f = \Sigma(2, 6, 7, 8, 9) + \Sigma_{\Phi}(0, 1, 10, 15)$$

$$f = \Sigma(1,4,6,9,14,15) + \Sigma_{\Phi}(3,7) \quad \text{ג.}$$

$$f = \Sigma(1,2,3,4,6,10,11,12) + \Sigma_{\Phi}(9,4) \quad \text{ד.}$$

$$f = \Sigma(1,3,6,8,9,11,13,15) + \Sigma_{\Phi}(0,5,7,10,12) \quad \text{ה.}$$

שאלה 4.39

נתונות שתי הפונקציות הבאות:

$$f_1 = \Sigma(2,6,7,8,9) + \Sigma_{\Phi}(0,1,10,15)$$

$$f_2 = \Sigma(1,4,6,9,14) + \Sigma_{\Phi}(3,15)$$

א. הציגו את הפונקציה $f_3 = f_1 \cdot f_2$ במפת קרנו.

ב. פשטו את הפונקציה $f_4 = f_1 + f_2$ באמצעות מפת קרנו למספר מזערי של ליטרלים.

שאלה 4.40

נתונות שתי הפונקציות הבאות:

$$f_1(A, B, C, D) = A\bar{C}D + ACD + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC$$

$$f_2 = \Sigma(0,1,3,4,7,11,15)$$

א. רשמו את הפונקציה $f_3 = f_1 \cdot f_2$ בייצוג $f_3 = \Sigma(\dots)$ במפת קרנו.

ב. פשטו את הפונקציה $f_4 = f_1 + f_2$ כסכום מכפלות.

שאלה 4.41

נתונות שתי הפונקציות הבאות:

$$f_1 = \Sigma(1,4,5,6,7,9,13)$$

$$f_2 = \Sigma(1,4,8,9,12,14,15)$$

מצאו מספר מזערי של ליטרלים לפונקציה $f_3 = (f_1 + f_2) \cdot f_2$.

שאלה 4.42

נתונה פונקציה באמצעות מפת קרנו כמופיע באיור 4.21.

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	ϕ
01	1	1	0	0	1
11	3	1	0	ϕ	1
10	2	0	0	ϕ	ϕ

א. מצאו ביטוי במינימום ליטרלים כמכפלת סכומים.

ב. מצאו ביטוי במינימום ליטרלים כסכום המכפלות.

שאלה 4.43 – רשות

נתונה מפת קרנו המופיעה באיור 4.22

$AB \backslash CD$					
		00	01	11	10
00	0	0	0	0	ϕ
01	1	0	0	0	0
11	3	1	1	ϕ	1
10	2	0	0	ϕ	ϕ

א. רשמו את הפונקציה בייצוג $f(A, B, C, D) = \Pi(\dots) + \Pi_{\phi}(\dots)$.

ב. פשטו את הפונקציה למספר מזערי של ליטרלים.

שאלה 4.44

באיור 4.23 מסורטטות שלוש מפות קרנו.

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1		1
01			1	0
11			1	1
10	0	1		

AB \ CD	00	01	11	10
00	ϕ		1	
01	ϕ	1	1	ϕ
11	1	1	1	1
10	0		1	1

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	0	0		
11	0	0		
10		1	1	0

חלק מערכי הפונקציות חסר במפות.

א. שרטטו את המפות במלואן אם ידוע שמתקיים $f_3 = f_1 \cdot f_2$.

ב. רשמו ביטוי לפונקציה f_3 במספר מזערי של ליטרלים.

סיכום פרק 4

- עיקר הפרק דן בפישוט פונקציות באמצעות מפות קרנו. נזכיר את המושגים העיקריים בפרק.
 - ליטרל A ו- $\bar{A}$ הם שני הליטרלים של המשתנה A .
 - איבר כפלי – ביטוי המורכב מליטרלים, הקשורים ביניהם בכפל בוליאני בלבד.
 - כפלן (איבר כפלי קנוני) – איבר כפלי המכיל ליטרל אחד של כל אחד ממשתני פונקציה בוליאנית נתונה.
 - יספן (איבר חיבורי קנוני) – איבר חיבורי המכיל ליטרל אחד של כל אחד ממשתני פונקציה בוליאנית נתונה.
 - סכום של מכפלות קנוניות – פונקציה בוליאנית שמורכבת מסכום של מכפלות קנוניות.
 - מכפלה של סכומים קנוניים – פונקציה בוליאנית שמורכבת ממכפלה של סכומים קנוניים.
 - תאים סמוכים במפת קרנו שונים זה מזה בערכו של ליטרל אחד בלבד.
- אפשר לייצג פונקציה הרשומה בטבלת אמת כסכום של מכפלות קנוניות ; כמכפלה של סכומים קנוניים; בייצוגים מספריים מתאימים; ובמפת קרנו.
- עבור צירופי ברירה (don't care) אפשר לקבוע, באופן שרירותי לחלוטין, אם להציב בפונקציה את הערך 0 או 1. אפשר להשתמש בצירופי הברירה כדי לפשט את הפונקציה פישוט מרבי.

פרק 5 - מערכות צירופים והדרכים למימושן

5.1 שערים לוגיים

שער לוגי (logic gate) הוא רכיב כלשהו המממש קשר לוגי בין משתנים. קיימים שערים מסוגים שונים (מכאניים, פניאומטיים, אלקטרוניים). הנפוצים ביותר הם השערים האלקטרוניים.

בשערים אלקטרוניים קיומו של זרם או של מתח מיוצג על ידי הערך **אמת** (T), והיעדר זרם או מתח מיוצג על ידי הערך **שקר** (F).

5.1.1 לוגיקה שלילית ולוגיקה חיובית

ערכי המשתנים שבמבוא של השער הלוגי מוגדרים כאמור על פי שתי רמות מתח: רמת מתח אחת מייצגת '1' לוגי, ואילו רמת מתח אחרת מייצגת '0' לוגי. ערכי המשתנים המתקבלים ב**מוצא** (output) של השער מיוצגים אף הם על ידי אותן שתי רמות מתח.

קיימות שתי אפשרויות:

א. ה-'1' הלוגי מיוצג על ידי המתח הגבוה, וה-'0' - על ידי המתח הנמוך.

ב. ה-'1' הלוגי מיוצג על ידי המתח הנמוך, וה-'0' - על ידי המתח הגבוה.

הגדרה

כאשר במערכת לוגית ה-'1' מוגדר על ידי רמת המתח הגבוהה וה-'0' - על ידי הנמוכה, המערכת עובדת ב**לוגיקה חיובית**.

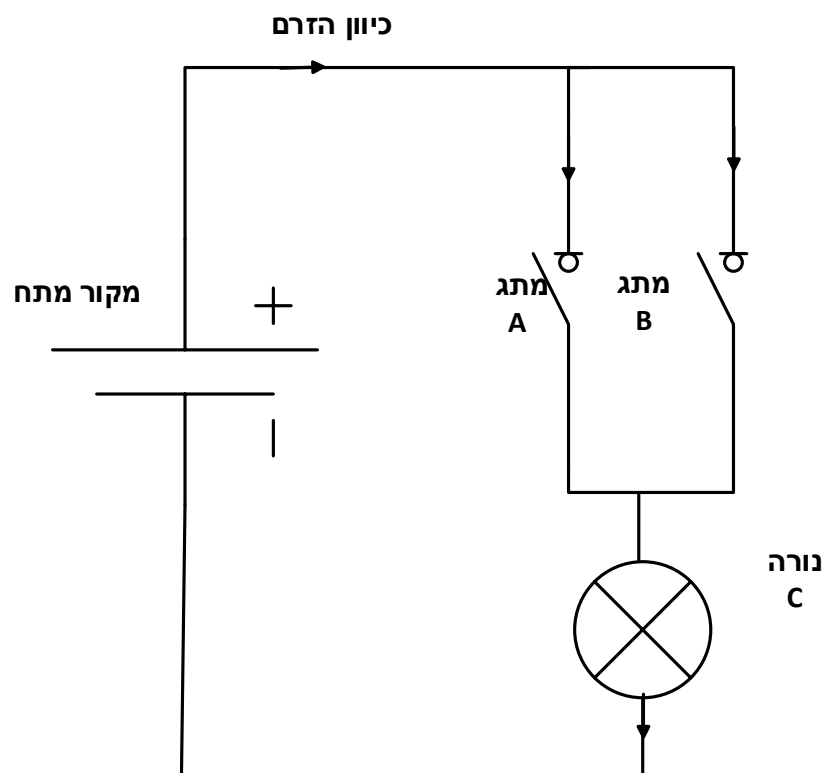
כאשר במערכת לוגית ה-'1' מוגדר על ידי רמת המתח הנמוכה וה-'0' - על ידי הגבוהה, המערכת עובדת ב**לוגיקה שלילית**.

כלומר, אם במערכת לוגית מסוימת שתי רמות המתח הקיימות הן 5V ו-0V, וה-'1' מיוצג על ידי 5V ואילו ה-'0' מיוצג על ידי 0V, נאמר כי המערכת עובדת בלוגיקה חיובית. לעומת זאת, אם ה-'1' מיוצג על ידי 0V וה-'0' מיוצג על ידי 5V, המערכת עובדת בלוגיקה שלילית.

במסגרת ספר זה נעסוק במערכות הפועלות בלוגיקה חיובית בלבד.

5.1.2 השער OR

באיור 5.1 נתון שער עקרוני, הכולל שני מתגים A ו-B, המחוברים ביניהם במקביל, וכן נורה ומקור מתח המחוברים אליהם בטור. למתגים A ו-B נייחס ערך '1' (אמת) כאשר הם סגורים (עובר בהם זרם), וערך '0' (שקר) - כאשר הם פתוחים (לא עובר בהם זרם). לנורה C נייחס ערך '1' כאשר היא דולקת (יש זרם), ו-'0' - כשאינה דולקת (אין זרם). הנורה C דולקת אם לפחות אחד המתגים, A או B, סגור. היא בוודאי דולקת אם שני המתגים גם יחד סגורים. באיור 5.1 המתגים פתוחים והנורה אינה דולקת.



איור 5.1 שער עקרוני המממש את הפעולה הלוגית OR

שאלה 5.1

לפניכם טבלת אמת הכוללת את ארבעת המצבים הלוגיים של המתגים של השער שבאיור 5.1.

נסמן: 1 – מתג סגור

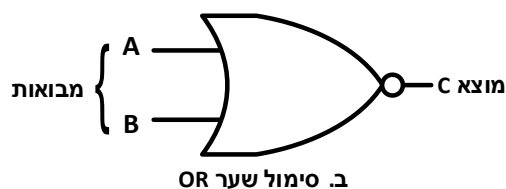
0 – מתג פתוח

השלימו את טבלת האמת:

מתג A	מתג B	נורה C
0	0	0
0	1	
1	0	
1	1	

נשווה בין טבלת האמת שבתשובה 5.1 ובין טבלת האמת של הקשר OR (איור 2.5). למעשה, שתייהן דומות זו לזו (אם נחליף את 1 ו-0 באותיות T ו-F בהתאמה). מכאן שהשער המתואר באיור 5.1 מממש את הקשר OR.

שער לוגי המממש את הקשר OR, נקרא **שער OR**. נהוג לסמל אותו כמו באיור 5.2. לשער OR באיור 5.2 יש שני **מבואות** (A ו-B) ו**מוצא** אחד (C). המבואות של השער מייצגים את המשתנים שעליהם מופעל הקשר OR. במוצא של השער מתקבלת התוצאה של הפעלת הקשר OR. בשער הלוגי העקרוני שבאיור 5.1 מתאימים מצבי המתגים למבואות השער OR, ואילו מצב הנורה מתאים למוצא השער OR.



A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

א. טבלת האמת של הקשר OR

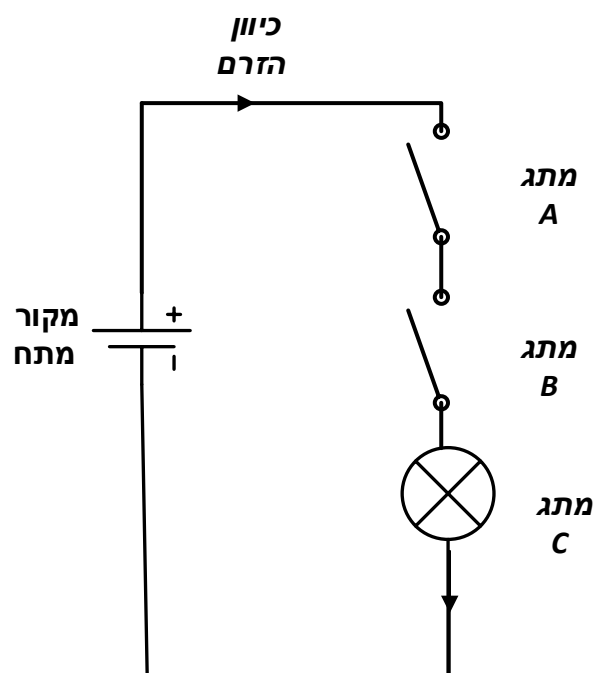
איור 5.2 טבלת האמת וסימול של שער OR

התיאור הסמלי של שער לוגי מאפשר להתעלם מההיבטים הפיסיקליים של המערכת המממשת את הפעולה הלוגית המתאימה. למשל: לפי התיאור באיור 5.2, אפשר לאפיין את המערכת המממשת פעולת OR בלי להזכיר את המילים **זרם** או **מתח**. במקום זאת, נוכל לומר

שבמוצא C של השער OR יתקבל הערך **אמת** או **שקר**, בהתאם לערכים שבמבואות A ו-B. לפי טבלת האמת, אם ערכי שני המבואות הוא 0, גם ערך המוצא יהיה 0. לעומת זאת, אם לפחות אחד מערכי המבוא הוא 1, יתקבל גם במוצא הערך 1.

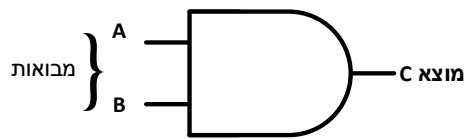
5.1.3 השער AND

באיור 5.3 מתואר שער עקרוני המממש את הקשר AND. השער כולל מקור מתח, נורה ושני מתגים המחוברים כולם בטור. ניתן להראות כי השער באיור 5.3 מממש את הקשר AND. לא נציג כאן את התהליך אלא רק את המסקנה: רק אם מתג A וגם מתג B יהיו סגורים - יזרום זרם דרך הנורה C, והיא תדלוק.



איור 5.3 שער עקרוני המממש את הקשר AND

סימול של שער AND משורטט באיור 5.4ב. לפי טבלת האמת (איור 5.4א), הערך שיתקבל במוצא C יהיה 1 רק כאשר גם ערך המבוא A וגם ערך המבוא B יהיה 1. בעבור כל צירוף אחר של ערכי המבואות יהיה ערך המוצא 0.



ב. סימול שער AND

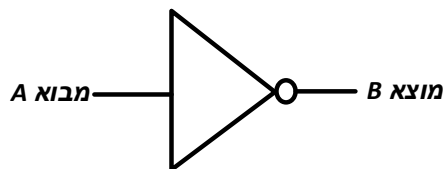
A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

א. טבלת האמת של הקשר AND

איור 5.4 טבלת האמת וסימול של שער AND

5.1.4 השער NOT

באיור 5.8 מתואר שער NOT.



ב. סימול שער NOT

A	$B = \sim A$
0	1
1	0

א. טבלת האמת של הקשר NOT

איור 5.5 סימול השיעור המממש את הקשר NOT

לפי טבלת האמת, למוצא השער NOT יהיה ערך לוגי 1, אם למבוא השער יהיה ערך לוגי 0; ולמוצא יהיה ערך 0, אם למבוא יהיה ערך 1. שימו לב שקיימים שני סימולים אפשריים לשער NOT.

תרגול

5.2 שאלה

קבעו מהו הקשר ומהו השער בכל אחד מההיגדים הבאים. רשמו את הערכים של כל מבוא לשערים שקבעתם.

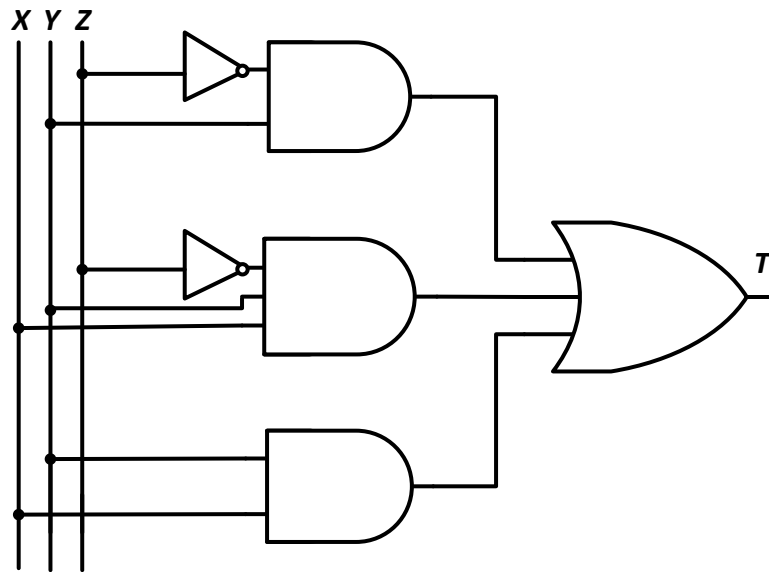
- כל מה שאומרים לסורר לעשות, הוא עושה ההיפך.
- אם שוכר דירה ישכיר אותה לאחר, או שלא ישלם את שכר הדירה, או צירוף של שני אלה - הוא ייתבע לדין.
- בני ישראל במצרים לא יכלו להתמהמה, וגם צידה לא עשו להם, ולכן אפו מצות.

5.2 ניתוח רשתות לוגיות

רשת לוגית היא אוסף שערים לוגיים המחוברים ביניהם. בניתוח של רשת לוגית בודקים את מוצא או מוצאי הרשת בהתאם לאותות במבואותיה. תהליך ניתוח של רשת לוגית מוצג בדוגמה 5-1.

דוגמה 5-1

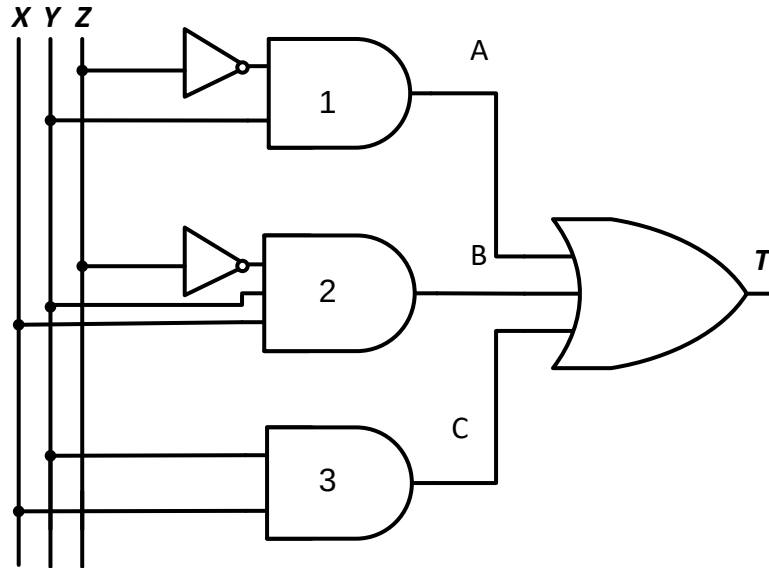
באיור 5.6 נתונה רשת לוגית. רשמו את פונקציית המוצא שלה, או במילים אחרות: רשמו את T כפונקציה של X, Y, Z.



איור 5.6 רשת של שערים לוגיים המממשת פונקציה לוגית

פתרון

א. נסמן ברשת הנתונה את הנקודות A, B ו-C (איור 5.7) ברשת הבאה:



איור 5.7 סימון נקודות ברשת שבדוגמה 5-1

נרשום את פונקציית המוצא:

$$T = A + B + C$$

ב. נמצא את ערכם של A, B ו-C ונציב בביטוי של הפונקציה T.

לשער AND, המסומן במספר 1 (מוצאו של השער A), נכנסים המשתנים Y ו- $\bar{Z}$ משום שלפניו יש שער NOT. לכן: $A = Y \cdot \bar{Z}$.

לשער AND, המסומן במספר 2 (מוצא השער B), נכנסים המשתנים X ו-Y, לכן: $B = X \cdot Y \cdot \bar{Z}$.

לשער AND, המסומן במספר 3 (מוצא השער C), נכנסים המשתנים X ו-Y, לכן: $C = X \cdot Y$.

נוכל עתה לרשום את פונקציית המוצא כך:

$$T = A + B + C =$$

נציב ונקבל:

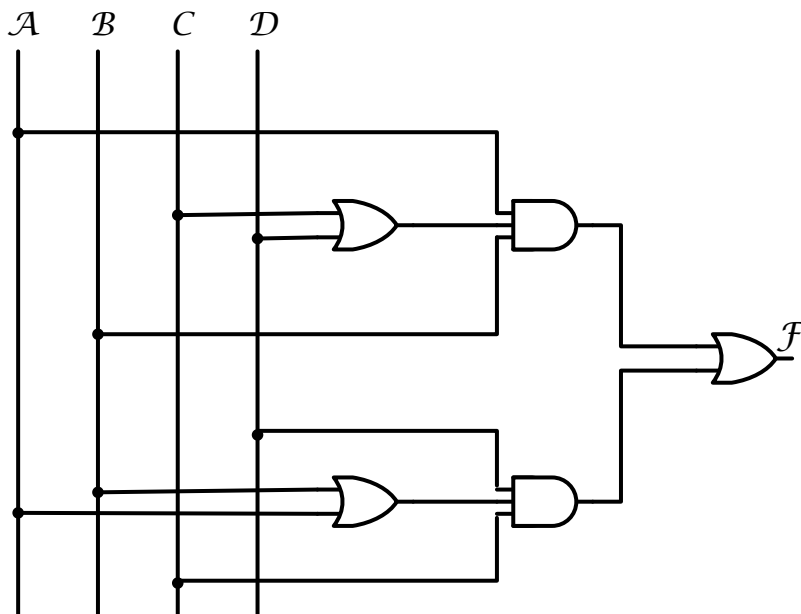
$$= Y \cdot \bar{Z} + X \cdot Y \cdot \bar{Z} + X \cdot Y = (1 + X)Y \cdot \bar{Z} + X \cdot Y$$

נצמצם ונקבל:

$$= X \cdot Y + Y \cdot \bar{Z}$$

שאלה 5.3

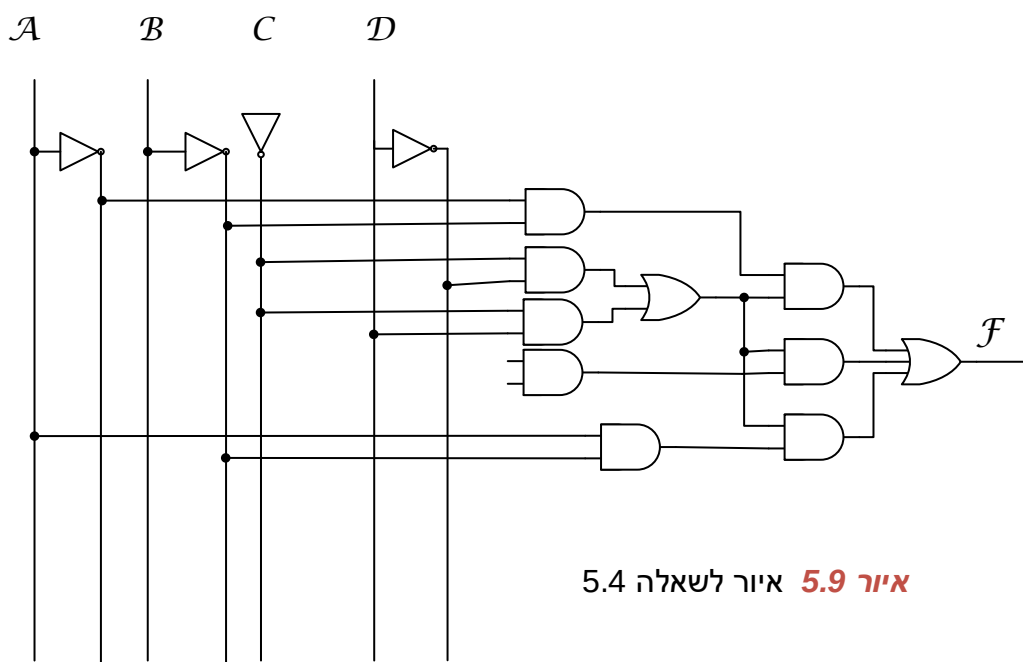
רשמו את פונקציית המוצא של הרשת הלוגית הבאה:



איור 5.8 איור לשאלה 5.3

שאלה 5.4

רשמו את פונקציית המוצא של הרשת הלוגית הבאה:



איור 5.9 איור לשאלה 5.4

5.3 מימוש פונקציה באמצעות שערים לוגיים

תיאור של פונקציה או של פונקציות לוגיות באופן גרפי באמצעות שערים לוגיים נקרא **מימוש הפונקציה**. נדגים את דרך המימוש של הפונקציה.

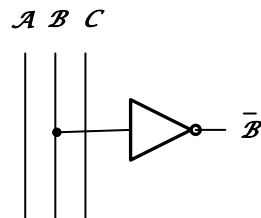
5-2 דוגמה

$$f_{(A,B,C)} = ABC + \bar{B}C$$

ממשו את הפונקציה באמצעות שערים לוגיים.

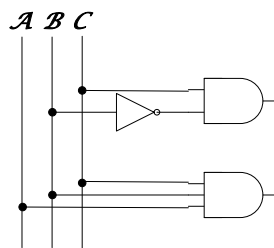
פתרון

א. נממש תחילה את שער ה-NOT, בדוגמה זו – ליצירת $\bar{B}$.



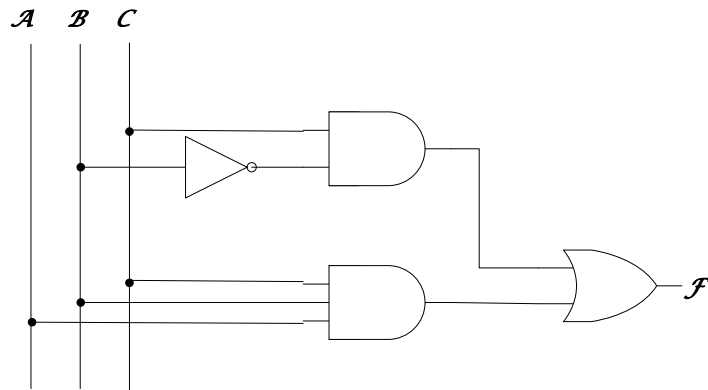
איור 5.10 שלב א בפתרון דוגמה 5-2

ב. כעת נממש את שתי המכפלות שבפונקציה.



איור 5.11 שלב ב' בפתרון דוגמה 5-2

ג. בשלב האחרון נבצע את פעולת ה-OR בין שתי המכפלות.



איור 5.12 שלב ג' בפתרון דוגמה 5-2

תרגול 

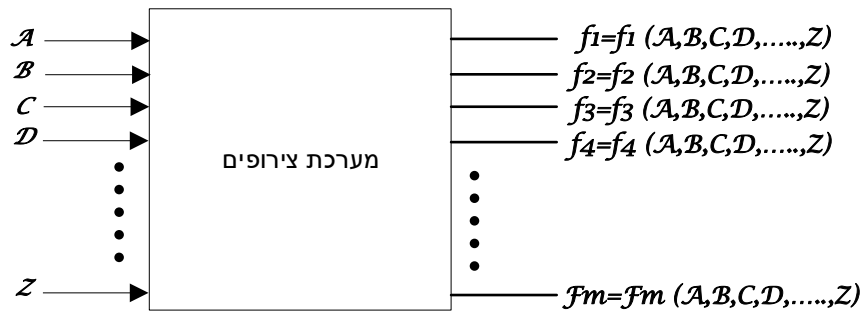
שאלה 5.5

פשטו את הפונקציה שבדוגמה 5-2 באמצעות כללי האלגברה הבוליאנית, וממשו את הפונקציה מחדש. בכמה קטן מספר השערים הדרוש למימוש הפונקציה לאחר פישוטה?

5.4 תכנון ומימוש של מערכת צירופים

נדון עתה בדרך שיטתית למימוש של פונקציות לוגיות. לשם כך נגדיר את הרשת הלוגית כמערכת צירופים. מערכת צירופים היא אוסף של שערים המחוברים ביניהם כך שבמוצא המערכת ממומשות פונקציות לוגיות. השם **מערכות צירופים** ניתן לה מכיוון שעבור כל צירוף של ערכי המשתנים הבלתי תלויים שבמבוא, מתקבלים ערכי פונקציות המתאימים להם במוצא המערכת.

באופן כללי ניתן לתאר, סכמטית, מערכת צירופים באופן הבא:



כאשר m הוא מספר טבעי השונה מאפס

איור 5.13 תיאור עקרוני של מערכת צירופים

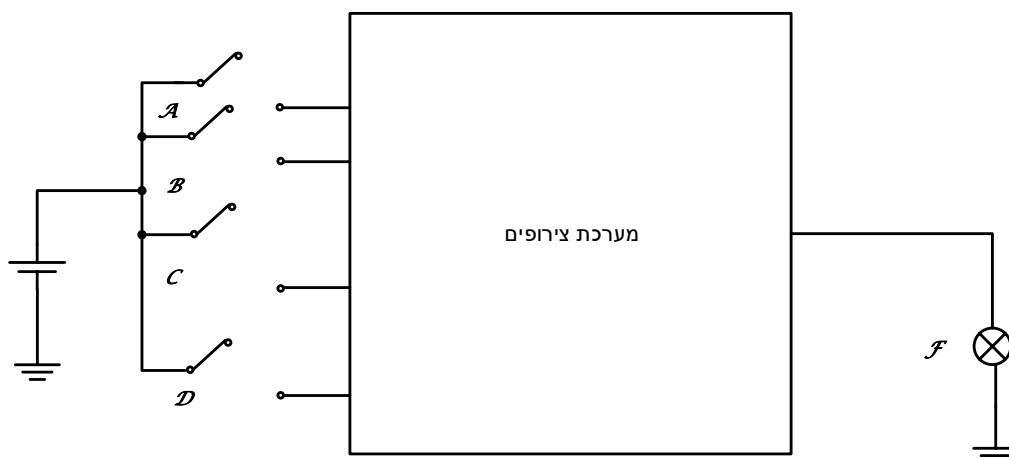
מתוך איור 5.13 אנו למדים שאפשר שמערכת צירופים תממש בו-זמנית מספר רב של פונקציות, ולא רק פונקציה בודדת. במסגרת ספר זה נעסוק במערכות פשוטות יותר מהמתואר באיור 5.13, שבהן מספר משתני המבוא לא יעלה על 4.

נדגים כעת את תהליך התכנון והמימוש של מערכת צירופים, ובעקבות הדוגמה נגדיר את הכללים שלפיהם נוכל לתכנן ולממש מערכות צירופיות כלשהן.

דוגמה 5-3

באיור 5.14 מתוארת מערכת צירופים בעלת ארבעה מבואות ומוצא אחד. כל מבוא מחובר באמצעות מתג למקור מתח. מוצא המערכת מחובר לנורה. המערכת צריכה להדליק נורה כאשר **לפחות** שלושה מתגים מחוברים למקור המתח.

תכננו את מערכת הצירופים שתבצע זאת.



איור 5.14 תיאור עקרוני של המערכת בדוגמה 5-3

פתרון

בשלב הראשון נגדיר את משתני המבוא ואת משתנה המוצא. נסמן את המתגים במבוא ב- A, B, C, D , כאשר A הוא המתג העליון באיור 5.14, ואת פונקציית המוצא ב- f . כעת ניצור את טבלת האמת של המערכת. טבלת האמת המתאימה תהיה:

A	B	C	D	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

טבלה 5.1 טבלת האמת של דוגמה 5-3

כעת נרשום את מפת קרנו המתאימה – כדי לקבל את הפונקציה בצורתה המצומצמת ביותר.

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	0		0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

איור 5.15 מפת קרנו של הפונקציה בדוגמה 5-3

נרשום את הפונקציה:

$$f = \bar{A}BCD + A\bar{B}CD + ABC\bar{D} + ABCD$$

נפשט את הפונקציה במפת קרנו

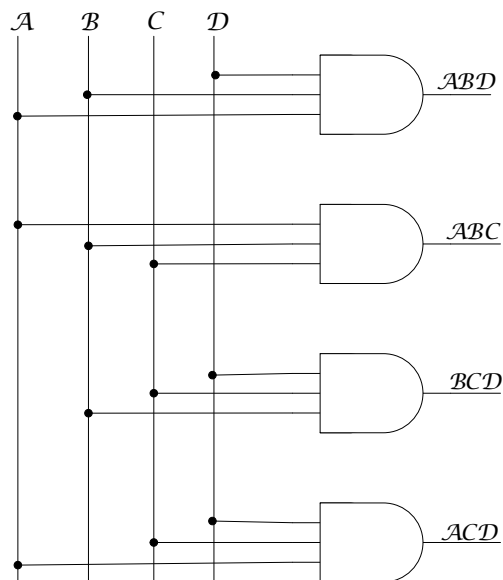
$CD \backslash AB$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

איור 5.16 פשוט הפונקציה במפת קרנו

נרשום את הפונקציה:

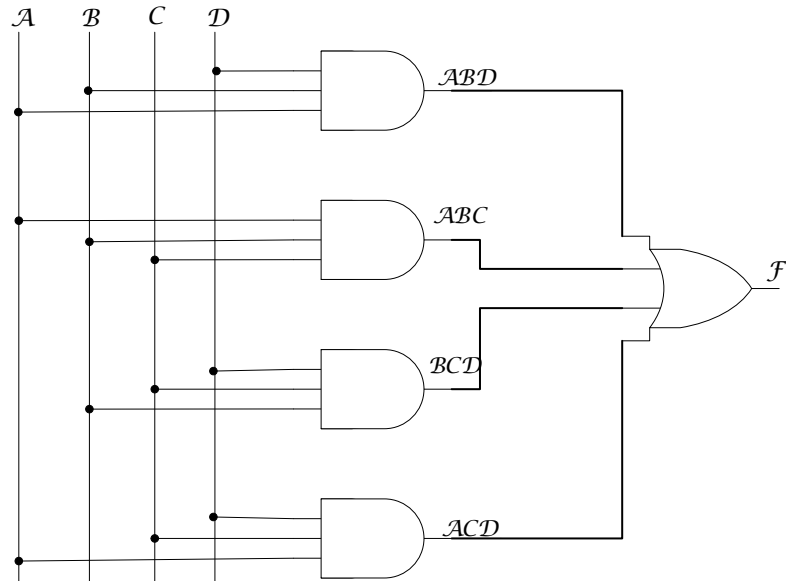
$$f = ABD + ABC + BCD + ACD$$

נממש את מערכת הצירופים. נתחיל במימוש המכפלות שבפונקציה.



איור 5.17 מימוש הפונקציה

נממש כעת את סכום המכפלות.



איור 5.18 מימוש סכום המכפלות

נסכם את השלבים שלפיהם תכננו את מערכת הצירופים הנתונה.

1. הגדרת משתני המבוא והמוצא על ידי אותיות מתאימות.
2. כתיבת טבלת אמת המתארת את המערכת.
3. צמצום הפונקציה (בעזרת מפת קרנו וכללי האלגברה הבוליאנית).
4. מימוש המכפלות בפונקציה המתקבלת.
5. המשך המימוש בהתאם למורכבות הביטויים בפונקציה עד קבלת הפונקציה כולה.

דוגמה 5-4

תכננו וממשו מערכת צירופים לוגית שתזהה את כל המספרים העשרוניים המתחלקים ב-3 ללא שארית. המספרים רשומים (במבואות) בצופן בינרי רגיל 3-סיביות משקלי.

פתרון

נגדיר את משתני המערכת A, B, C הם משתני המבוא, כאשר $A \rightarrow MSB$. f הוא מוצא המערכת, $f = 1$ כאשר המספר במבוא מתחלק ב-3 ללא שארית. להלן טבלת האמת.

צירוף עשרוני	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0

5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

טבלה 5.2 טבלת האמת של דוגמה 5-4

כפי שניתן לראות מהטבלה, המספרים 3 ו-6 מתחלקים ב-3 ללא שארית.

נשרטט מפת קרנו של הטבלה.

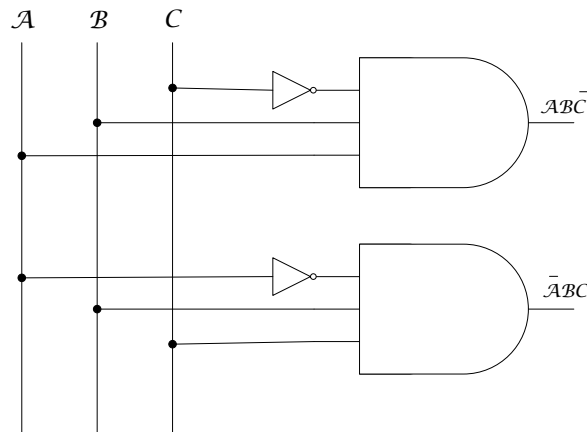
$C \backslash AB$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	1	0	0

איור 5.19 מפת קרנו של דוגמה 5-4

כפי שניתן לראות אי-אפשר לצמצם את הפונקציה באמצעות מפת קרנו. נרשום את הביטוי של הפונקציה.

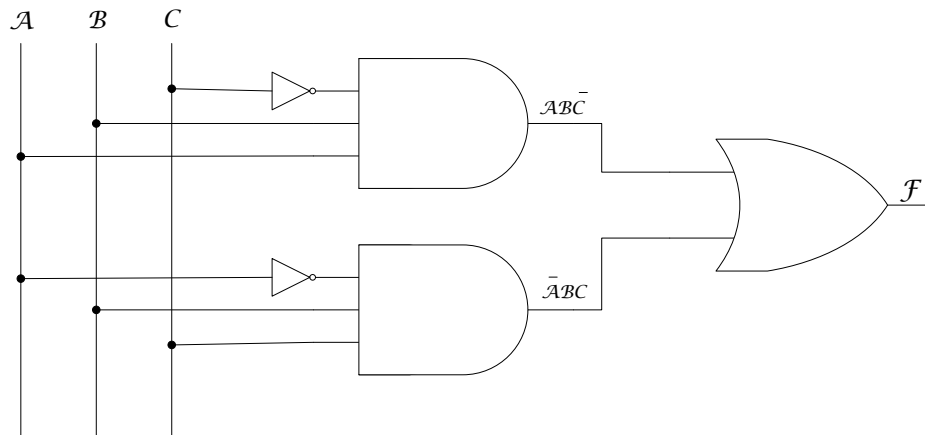
$$f = A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C$$

נממש את הפונקציה. בשלב הראשון נממש את שתי המכפלות.



איור 5.20 מימוש שתי המכפלות של דוגמה 5-4

בשלב השני נממש את סכום המכפלות.



איור 5.21 מימוש סכום המכפלות של דוגמה 5-4

תרגול

שאלה 5.6

תכננו וממשו מערכת צירופים במספר שערים מזערי הכוללת ארבעה מבואות ומוצא יחיד, ואשר מבצעת את הדרישה הבאה: כאשר המספר שווה הערך העשרוני של המבוא גדול או שווה ל-5, מוצא המערכת יהיה 1 (המספר העשרוני המרבי האפשרי במבוא הוא 9).

שאלה 5.7

תכננו וממשו מערכת צירופים בעלת ארבעה מבואות ושני מוצאים. במבוא למערכת מחובר מספר בינרי, המייצג מספר עשרוני, ובמוצא המערכת מתקבל ייצוג בינרי של החלק השלם של תוצאת חילוק המספר העשרוני ב-3.

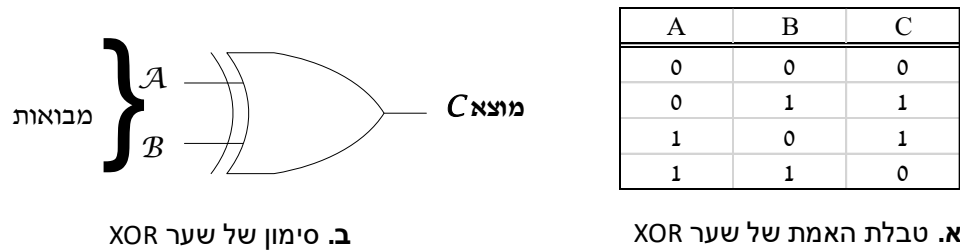
שאלה 5.8

תכננו מערכת צירופים שבמבוא שלה מחובר מספר בינרי בן 3 סיביות, ובמוצאה מתקבל המשלים ל-2 של המספר שבמבוא.

- א. הגדירו את משתני המבוא והמוצא.
- ב. רשמו טבלת אמת של המערכת.
- ג. צמצמו, בדרך אלגברית, את הפונקציה של המוצא ה- LSB (הסיבית הפחות חשובה).
- ד. ממשו את הפונקציה באמצעות שערים.

5.5 שערים למימוש פעולות XOR, NOR, NAND, ומימוש מערכות צירופים באמצעותם

בפרק 3 הצגנו את הפעולות XOR, NOR, NAND ואת טבלאות האמת שלהן. נציג עתה את סימול השערים המממשים פעולות אלו.



איור 5.22 שער XOR - טבלת אמת וסימון שער

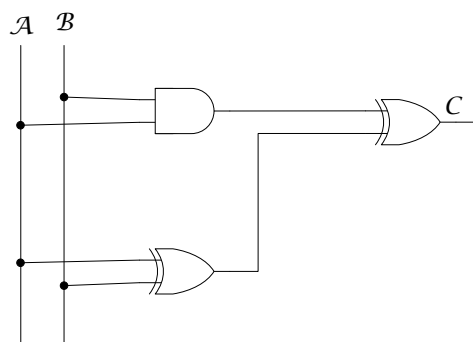
5.5.1 שער XOR

הפונקציה הממומשת היא:

$$C = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$

5-5 דוגמה

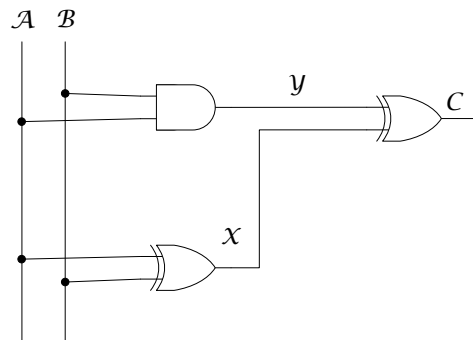
רשמו את פונקציית המוצא של מערכת השערים הבאה:



איור 5.23 מערכת שערים הכוללת שערי XOR

פתרון

נסמן את מוצאי שני השערים השמאליים ב- X ו- Y , כמשורטט באיור 5.24.



איור 5.24 סרטוט לפתרון לדוגמה 5-5

נרשום את ערך המוצא C כפונקציה של המשתנים שהגדרנו:

$$(5-1) \quad C = X \oplus Y$$

נמצא את ערכי המשתנים X ו- Y כפונקציה של משתני המבוא:

$$(5-2) \quad X = A \oplus B$$

$$(5-3) \quad Y = A \cdot B$$

נציב כעת את שתי המשוואות (5-2) ו-(5-3) במשוואה (5-1) ונקבל:

$$C = (A \oplus B) \oplus A \cdot B$$

תרגול

שאלה 5.9

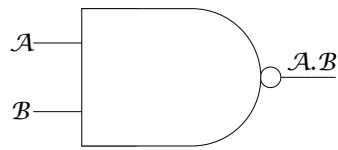
א. רשמו את הפונקציה C שהתקבלה בדוגמה 5-5 באמצעות פעולות AND, OR ו-NOT.

ב. בטאו את הפונקציה C במינימום של ליטרלים וממשו אותה.

5.5.2 שערי NOR ו-NAND

שער NAND

באיור 5.25 מופיע סרטוט של שער NAND ושל טבלת האמת שלו.



ב. סימון של שער NAND

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

א. טבלת האמת של שער NAND

איור 5.25 שער NAND - טבלת אמת וסימון שער

הפונקציה הממומשת היא:

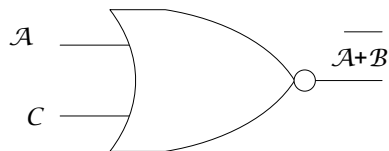
$$C = \overline{A \cdot B}$$

נשתמש בכללי דה-מורגן ונקבל:

$$C = \bar{A} + \bar{B}$$

שער NOR

באיור 5.26 מופיע סרטוט של שער NOR ושל טבלת האמת שלו.



ב. סימון של שער NOR

A	B	C
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

א. טבלת האמת של שער NOR

איור 5.26 שער NOR - טבלת אמת וסימון שער

הפונקציה הממומשת היא:

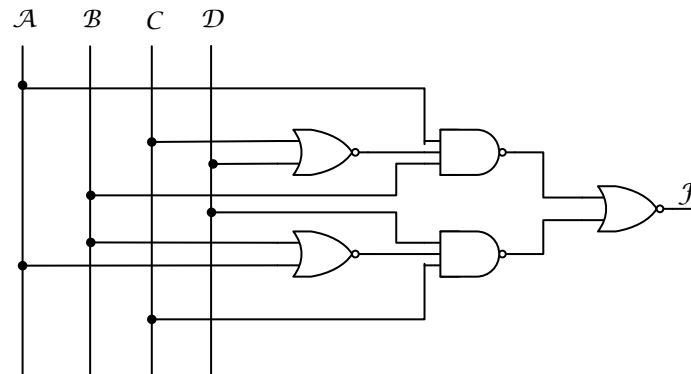
$$C = \overline{A + B}$$

נשתמש בכללי דה-מורגן ונקבל:

$$C = \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

שאלה 5.10

רשמו את הפונקציה הלוגית המתקבלת במוצא של מערכת הצירופים המופיעה באיור 5.27.



איור 5.27 מערכת צירופים לשאלה 5.10

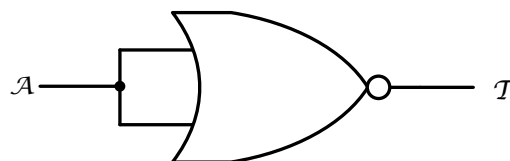
מצאו ביטוי ל- f כפונקציה של המשתנים A, B, C, D .

5.6 השערים NOR ו-NAND ומימוש מערכות צירופים באמצעותם

באמצעות השערים NAND ו-NOR אפשר לבצע את שלוש פעולות היסוד של האלגברה, שנדונו בפרקים הקודמים - AND, OR ו-NOT.

ביצוע של פעולת היפוך באמצעות שערי NAND ו-NOR

מימוש not באמצעות שער NOR בלבד:



איור 5.28 מימוש פעולת היפוך באמצעות שער NOR

הוכחה:

$$T = \overline{A + A}$$

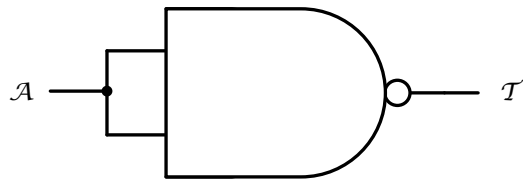
מאחר ש-

$$A + A = A$$

נקבל:

$$T = \bar{A}$$

מימוש באמצעות שער NAND: ההערה של nor נכונה גם כאן .



איור 5.29 מימוש פעולת היפוך באמצעות שער NAND

הוכחה:

$$T = \overline{A \cdot A}$$

מאחר ש-

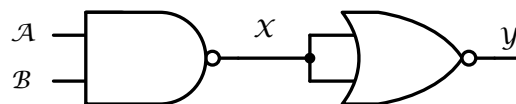
$$A \cdot A = A$$

נקבל:

$$T = \bar{A}$$

סיכום בוליאני [פעולת OR]

מימוש פעולת OR על ידי שערי NOR:



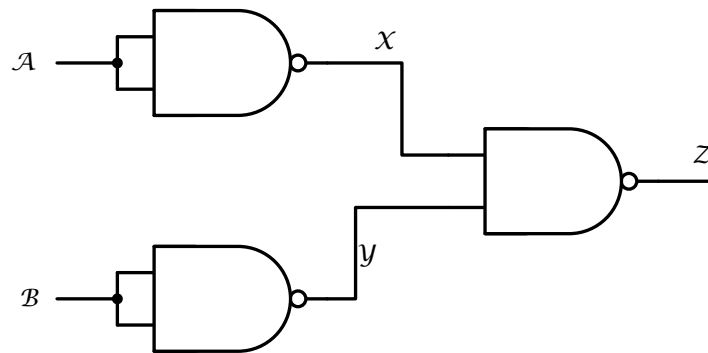
איור 5.30 מימוש פעולת OR על ידי שערי NOR

הוכחה:

$$X = \overline{A + B}$$

$$Y = \bar{X} = \overline{\overline{A + B}} = A + B$$

מימוש פעולת OR על ידי שערי NAND:



איור 5.31 מימוש פעולת OR על ידי שערי NAND

הוכחה:

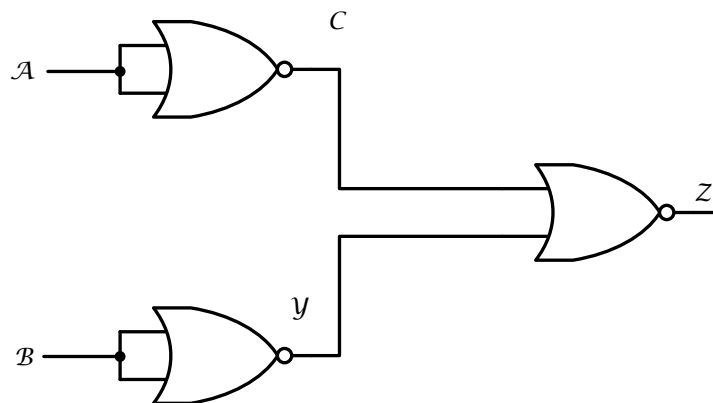
$$X = \bar{A}$$

$$Y = \bar{B}$$

$$Z = \overline{(\bar{A} \cdot \bar{B})} = \bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} = A + B$$

כפל בוליאני [פעולת AND]

מימוש פעולת AND על ידי שערי NOR:



איור 5.32 מימוש פעולת AND על ידי שערי NOR

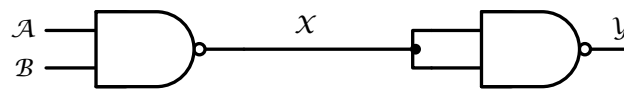
הוכחה:

$$X = \bar{A}$$

$$Y = \bar{B}$$

$$Z = \overline{(\bar{A} + \bar{B})} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}} = A \cdot B$$

מימוש פעולת AND על ידי שערי NAND:



איור 5.33 מימוש פעולת AND על ידי שערי NAND

הוכחה:

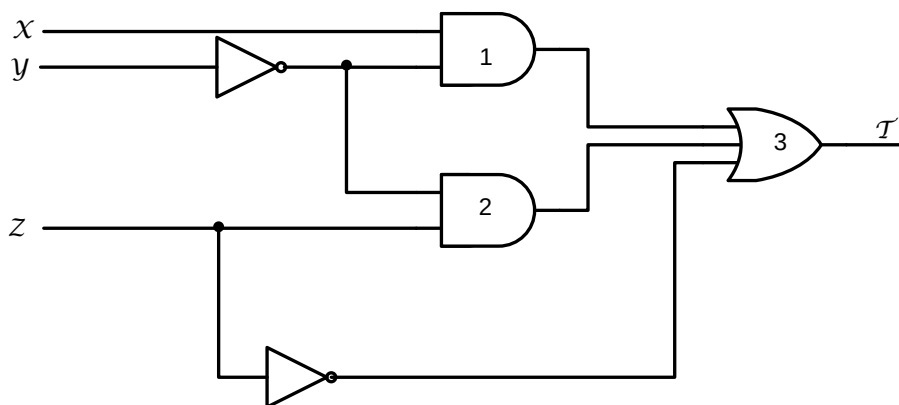
$$X = \overline{A \cdot B}$$

$$Y = \bar{X} = \overline{\overline{A \cdot B}} = A \cdot B$$

בתיאור הפעולות השתמשו בשערים בעלי שני מבואות, אך כמובן אפשר להשתמש גם בשערים בעלי יותר משני מבואות.

דוגמה 5-6

ממשו את הרשת הלוגית שבאיור 5.34 באמצעות שערי NAND ו-NOR בלבד.



איור 5.34 סרטוט לדוגמה 5-6 – מימוש בעזרת NOR ו-NAND

פתרון

ראשית עלינו לרשום את הפונקציה שמבצעת רשת זו:

$$X \cdot \bar{Y}$$

במוצא 1 של שער AND נקבל:

במוצא 2 של שער AND נקבל: $Z \cdot \bar{Y}$

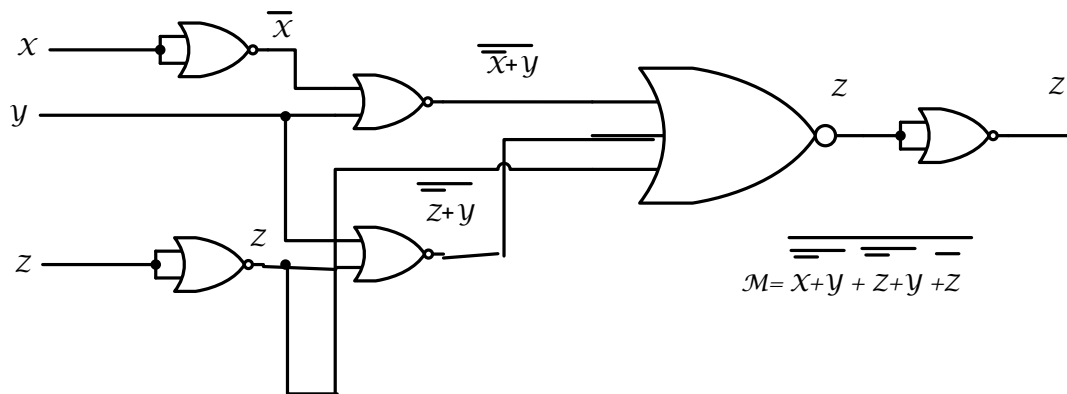
במוצא 3 של שער OR נקבל: $\bar{Z} \vee Z \cdot \bar{Y}, X \cdot \bar{Y}$

במבוא שער OR נקבל: $T = X \cdot \bar{Y} + Z \cdot \bar{Y} + \bar{Z}$

נמצא, בעזרת כללי דה-מורגן, את הפונקציה באמצעות פעולות סיכום והיפוך בלבד:

$$T = X \cdot \bar{Y} + Z \cdot \bar{Y} + \bar{Z} = \bar{\bar{X}} \cdot \bar{Y} + \bar{\bar{Z}} \cdot \bar{Y} + \bar{Z} = \overline{\bar{X} + Y} + \overline{\bar{Z} + Y} + \bar{Z}$$

ונממש את הפונקציה בעזרת שערי NOR:

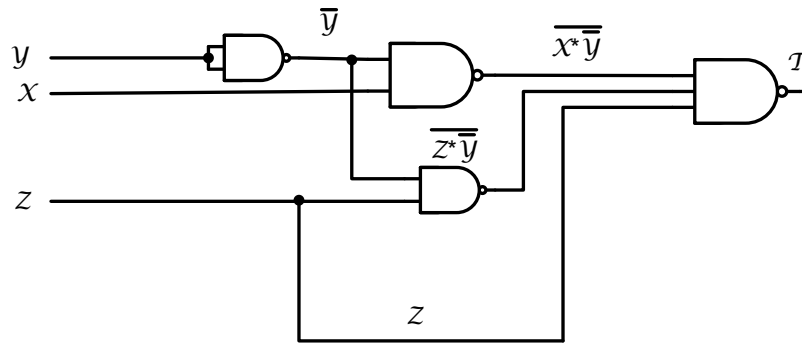


איור 5.35 מערכת השערים לפתרון לדוגמה 5-6

ענה נמצא, בעזרת כללי מורגן, את הפונקציה באמצעות פעולות כפל והיפוך בלבד:

$$T = \overline{\bar{X} \cdot \bar{Y} + Z \cdot \bar{Y} + \bar{Z}} = \overline{(X \cdot \bar{Y}) \cdot (Z \cdot \bar{Y}) \cdot Z}$$

ונממש בעזרת שערי NAND:

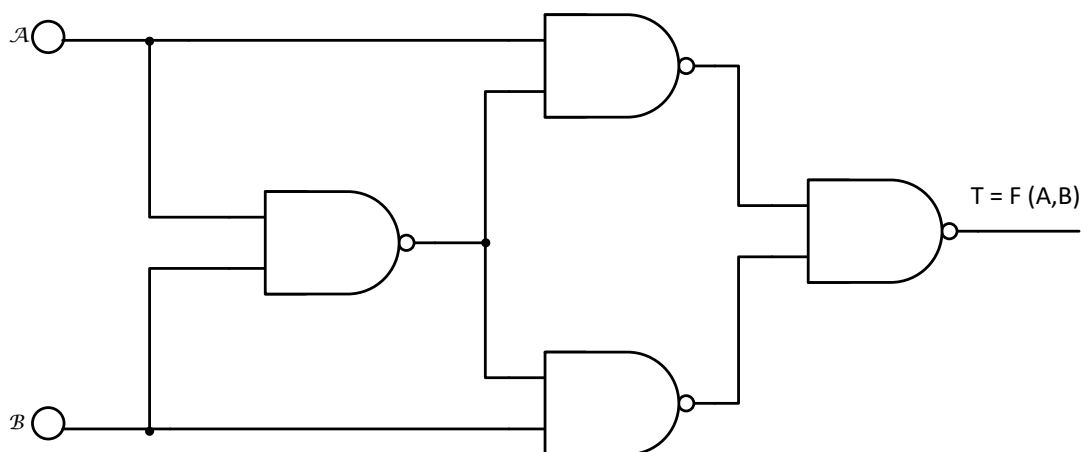


איור 5.36 מימוש הפונקציה באמצעות שערי NAND לדוגמה 5-6

תרגול

שאלה 5.11

ממשו את מערכת הצירופים שבאיור 5.37 באמצעות שערי NOR בלבד.



איור 5.37 סרטוט לשאלה 5.11

רצוי לא להרבות בסוגי שערים באותו מעגל. השערים הנפוצים ביותר במערכות צירופים הם שערי NAND ו-NOR. שימוש בסוג אחד של שער למימוש מערכת מקל על אחזקת המערכת.

שאלה 5.12

לפניכם פונקציה:

$$T = A \cdot \bar{B} + \overline{\bar{B} \cdot C + C \cdot \bar{D}}$$

א. ממשו אותה באמצעות שערי NAND בלבד.

ב. ממשו אותה באמצעות שערי NOR בלבד.

שאלה 5.13

יש לתכנן מערכת אזעקה על פי ההנחיות הבאות:

מערכת האזעקה מפעילה את צופר המכונית אם נפתחה דלת והוכנס מפתח למנעול ההתנעה, או אם נפתח מכסה המנוע ולא הוכנס מפתח למנעול ההתנעה, או אם הוכנס מפתח למנעול ההתנעה ולא נלחצה דוושת הבלמים.

רשמו פונקציה המממשת את מערכת האזעקה - באמצעות שערי NAND בלבד.

5.7 תרשים זמנים* של מערכת צירופים

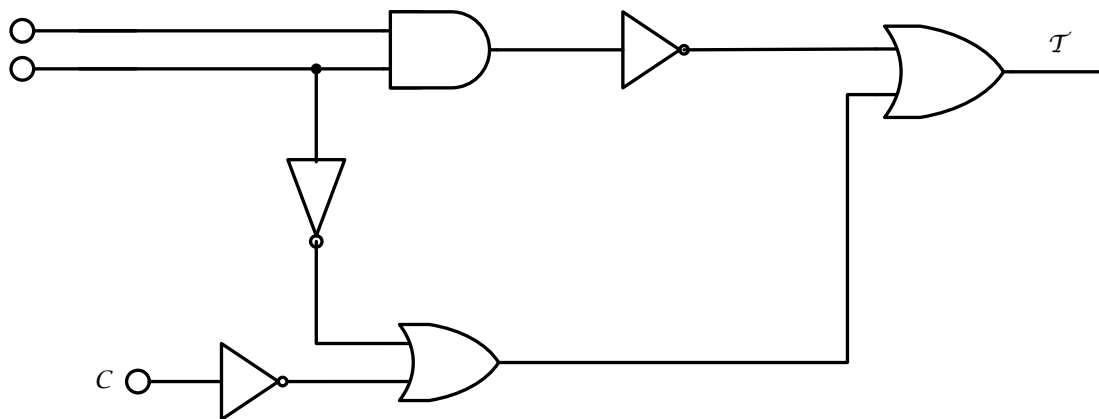
למעשה, מערכת צירופים "מחשבת" ויוצרת במוצא את ערכה של פונקציה בוליאנית מסוימת עבור צירוף ערכי המשתנים המופיעים במבוא בו-בזמן, ואינה מושפעת מערכי המבוא הקודמים.

שימו לב: הדגשנו עתה את מושג הזמן. מערכות צירופים אינן פועלות חד-פעמית, אלא "מגיבות" למשתני המבוא בפרק זמן כלשהו.

נוח להציג את תגובתה של מערכת צירופים באמצעות תרשים זמנים. נדגים כעת כיצד משתמשים בתרשים זמנים של מערכת צירופים.

5-7 דוגמה

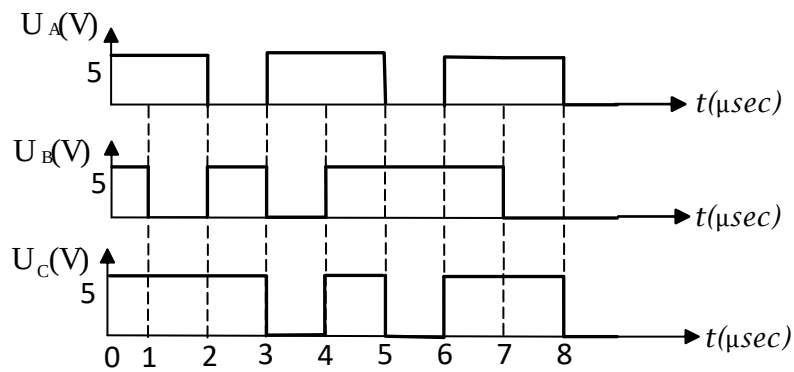
נתונה מערכת הצירופים הבאה:



איור 5.38 מערכת צירופים לדוגמה 5-7

שרטטו את צורת המתח במוצא T כפונקציה של הזמן. נתון תרשים הזמנים של משתני המבוא:

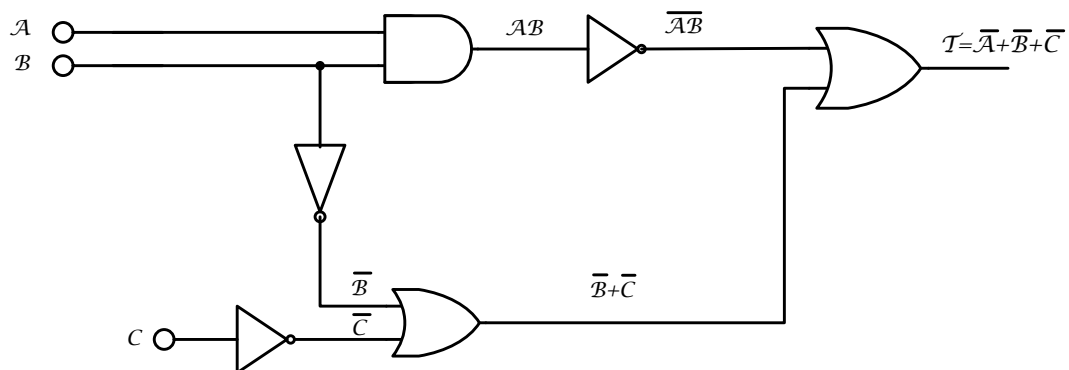
* תרשימי הזמנים המופיעים הם תרשימי זמנים אידיאליים. תרשימי זמנים של מערכות ממשיות שונות מאידיאליים מכיוון שזמני התגובה של המערכות הממשיות גדולים מאפס, כלומר קיימת השהיה במערכת.



איור 5.39 תרשים הזמנים לדוגמה 5-7

פתרון

הפונקציה במוצא המערכת:



איור 5.40 פונקציית המוצא בדוגמה 5-7

כלומר:

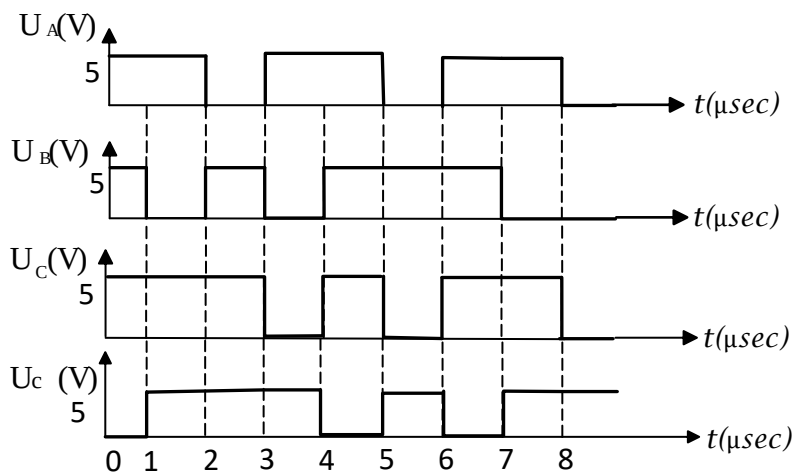
$$T = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

נבדוק, באמצעות טבלת אמת, את ערכי המשתנים במבוא בשמונה פרקי זמן:

הזמן (μsec)	A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{C}$	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$
$0 < t < 1$	1	1	1	0	0	0	0
$1 < t < 2$	1	0	1	0	1	0	1
$2 < t < 3$	0	1	1	1	0	0	1
$3 < t < 4$	1	0	0	0	1	1	1
$4 < t < 5$	1	1	1	0	0	0	0
$5 < t < 6$	0	1	0	1	0	1	1
$6 < t < 7$	1	1	1	0	0	0	0
$7 < t < 8$	1	0	1	0	1	0	1
$8 < t$	0	0	0	1	1	1	1
וכן הלאה							

טבלה 5.3 טבלת אמת וזמנים לדוגמה 5-7

נשרטט את צורת המתח במוצא:



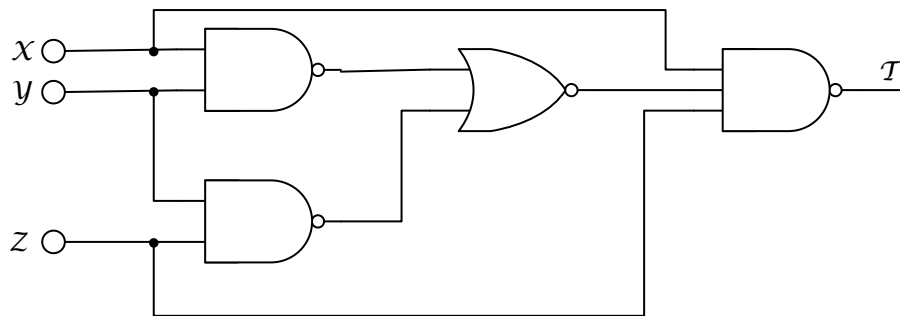
איור 5.41 סרטוט לפתרון דוגמה 5-7

מאחר שהפונקציה בדוגמה פשוטה למדי, ניתן לשרטט את פתרון הדוגמה ישירות על איור 5.39, לאחר מציאת פונקציית המוצא (ללא שימוש בטבלת אמת). עם זאת, רצוי ליצור את תרשים הזמנים בעזרת טבלת אמת, כפי שפתרנו לעיל.

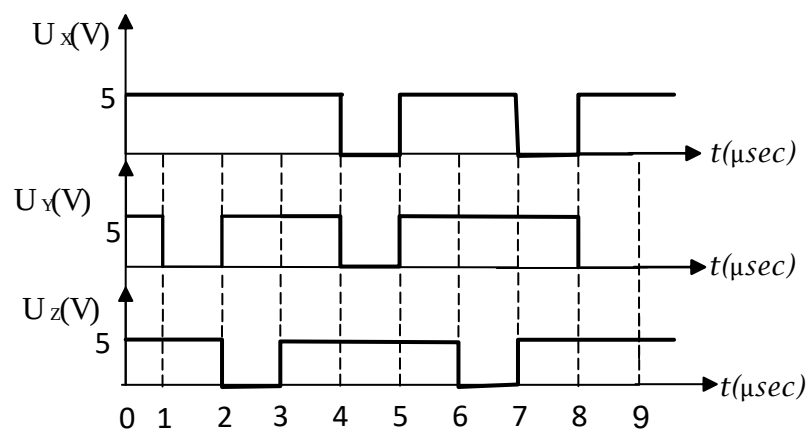
שאלה 5.14

באיור 5.42 נתונה מערכת צירופים.

שרטטו את צורת מתח המוצא U_T כאשר צורות מתחי המבוא כפונקציה של הזמן נתונות באיור 5.43.



איור 5.42 מערכת צירופים לשאלה 5.14



איור 5.43 תרשים מתחים כפונקציה של הזמן לשאלה 5.14

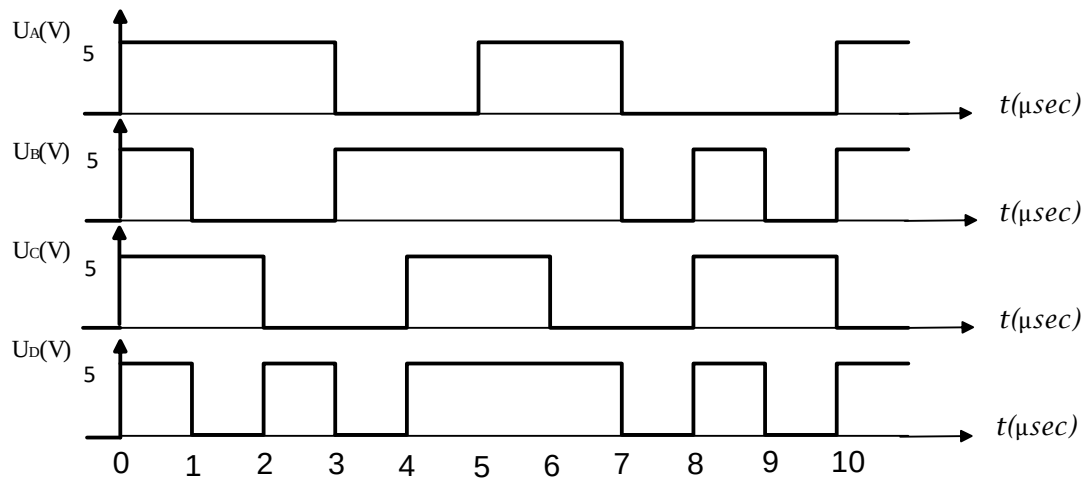
כאשר נתון תרשים זמנים של מערכת הצירופים, כלומר כאשר נתונים אותות המבוא והמוצא של המערכת, ניתן למצוא את פונקציית המערכת באמצעות תהליך הפוך לתהליך שתואר בדוגמה 5-7.

התנאי הוא שיופיעו בתרשים הזמנים כל הצירופים הדרושים לפתרון. למשל, למציאת פונקציה של שלושה משתנים דרושים שמונת הצירופים האפשריים של אותות המבוא.

בדוגמה 5-8 נדגים את תהליך המציאה של פונקציית מערכת צירופים באמצעות תרשים הזמנים.

דוגמה 5-8

באיור 5.44 משורטטים אותות המבוא (A, B, C) והמוצא (D) של מערכת צירופים.



איור 5.44 תרשים זמנים לדוגמה 5-8

- מצאו את טבלת האמת של הפונקציה.
- בטאו את פונקציית המערכת במינימום ליטרלים.

פתרון

- בתחילה ניצור טבלת זמנים, ובה נרשום את מצבי המבוא ואת מצבי המוצא ב-11 פרקי הזמן הנתונים.

הזמן (μsec)	A	B	C	D
$0 < t < 1$	1	1	1	1
$1 < t < 2$	1	0	1	0
$2 < t < 3$	1	0	0	1
$3 < t < 4$	0	1	0	0
$4 < t < 5$	0	1	1	1
$5 < t < 6$	1	1	1	1
$6 < t < 7$	1	1	0	1
$7 < t < 8$	0	0	0	0
$8 < t < 9$	0	1	1	1
$9 < t < 10$	0	0	1	0
$10 < t < 11$	1	1	0	1

טבלה 5.4 טבלת זמנים למצבי המבוא והמוצא

בהתבסס על טבלת הזמנים שבטבלה 5.4, ניצור טבלה שבה נרשום מספר עשרוני שווה ערך לכל אחד מהצירופים שבתרשים, בעבור כל אחד מהזמנים, ואת ערך הפונקציה של צירוף זה.

מספר עשרוני A,B,C	D
7	1
5	0
4	1
2	0
3	1
7	1
6	1
0	0
3	1
1	0
7	1

טבלה 5.5 מצב המוצא כתלות במצב המוצא בזמנים הנתונים

כעת נבנה את טבלת האמת של הפונקציה f :

מספר עשרוני A,B,C	f
0	0
1	0
2	0
3	1
4	1
5	0
6	1
7	1

טבלה 5.6 טבלת אמת של מערכת הצירופים

ב. נשתמש במפת קרנו לשלושה משתנים כדי לפשט את הפונקציה D .

		AB			
		00	01	11	10
C	0	0	0	1	1
	1	0	1	1	0

איור 5.45 מפת קרנו לפישוט המערכת

הפונקציה המפושטת היא:

$$D = A\bar{C} + BC$$

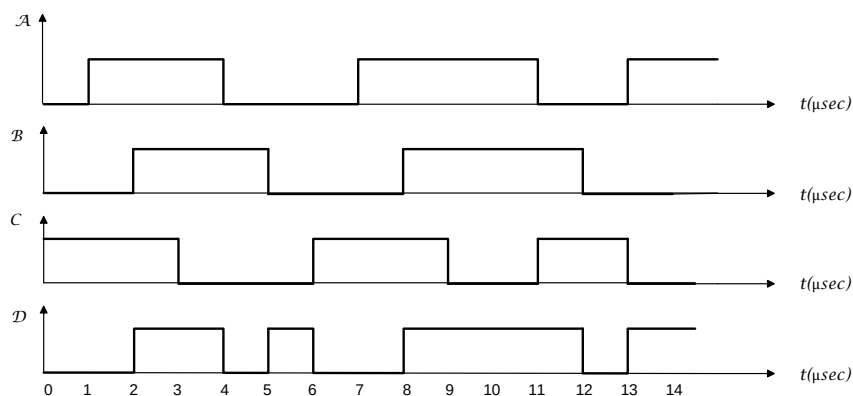
תרגול 

שאלה 5.15

מערכת צירופים מוגדרת באמצעות אותות המבוא והמוצא הנתונים באיור 5.43.

א. רשמו את טבלת האמת של מערכת הצירופים הנתונה.

ב. ממשו את מערכת הצירופים באמצעות שערים לוגיים.

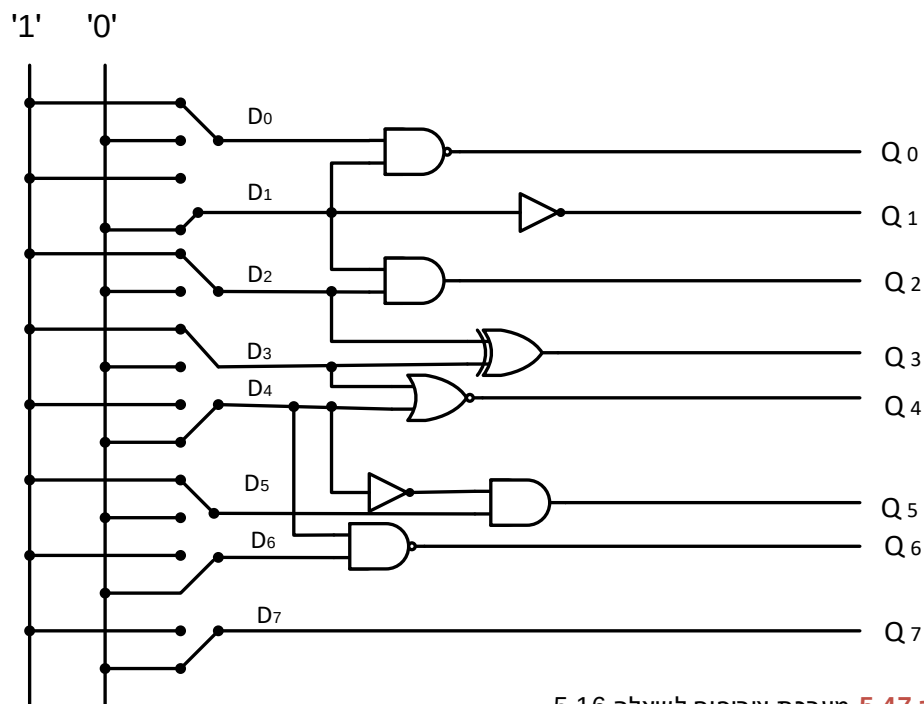


איור 5.46 תרשים זמנים לשאלה 5.15

שאלות חזרה לפרק 5

שאלה 5.16

נתונה מערכת הצירופים הבאה:



איור 5.47 מערכת צירופים לשאלה 5.16

מצב המתגים משורטט באיור 5.47.

א. התייחסו למצב 8 המתגים $D_0 \dots D_7$ כאל מספר בינרי אחד, והציגו אותו בבסיס 16.

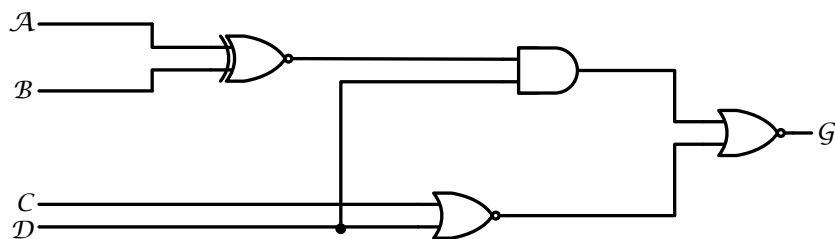
ב. מה ערכו העשרוני של המספר שהצגתם?

שאלה 5.17

נתון מעגל באיור 5.48.

א. מצאו את ביטוי לפונקציה G במינימום ליטרלים.

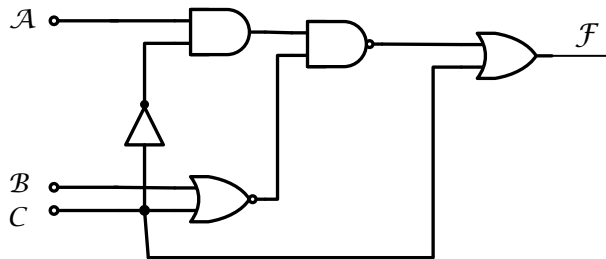
ב. ממשו את הפונקציה G באמצעות שערי $NAND$ בלבד.



איור 5.48 סרטוט לשאלה 5.17

שאלה 5.18

באיור 5.49 נתונה רשת לוגית. מצאו את הביטוי של הפונקציה F במינימום ליטרלים. ממשו את הפונקציה באמצעות שערים לוגיים.



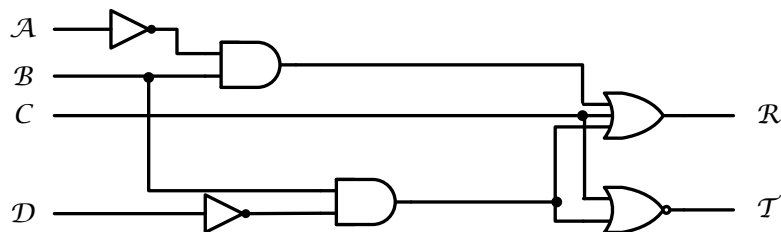
איור 5.49 רשת לוגית לשאלה 5.18

שאלה 5.19

באיור 5.50 נתונה רשת לוגית.

א. מצאו את הפונקציות של המוצאים R ו- T .

ב. בטאו את הפונקציות במינימום ליטרלים וממשו אותן באמצעות שערי $NAND$ בלבד.



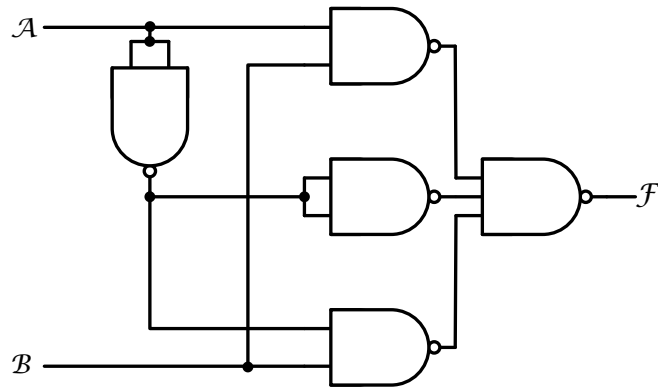
איור 5.50 רשת לוגית לשאלה 5.19

שאלה 5.20

באיור 5.51 מתוארת מערכת צירופים.

א. בטאו, במינימום ליטרלים, את הפונקציה F .

ב. ממשו את הפונקציה המזערית באמצעות שערי NOR בלבד.



איור 5.51 מערכת צירופים לשאלה 5.20

שאלה 5.21

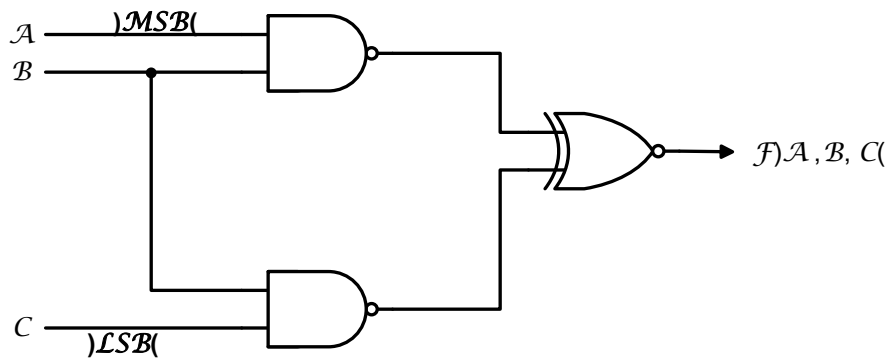
באיור 5.52 מתוארת מערכת צירופים המממשת את הפונקציה הלוגית $f(A, B, C)$.

א. רשמו ביטוי לפונקציית המוצא f .

ב. רשמו את טבלת האמת של הפונקציה f .

ג. בטאו את הפונקציה f במינימום ליטרלים.

הערה: השער באיור 5.52 הוא מסוג $XOR\text{-}NOT$ שלא פגשתם עד כה, והוא מבצע פעולת היפוך לתוצאת XOR המתקבלת במוצאו.



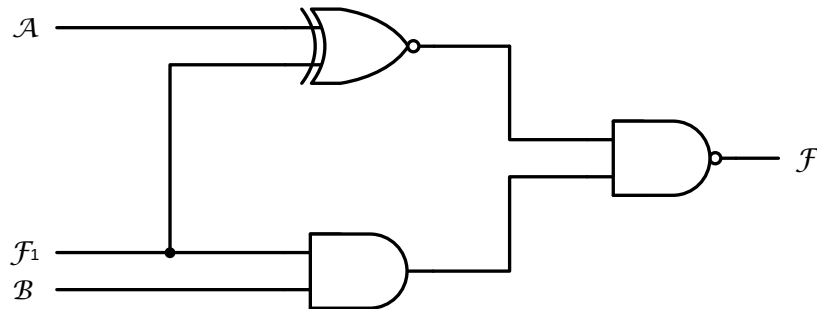
איור 5.52 מערכת שערים לשאלה 5.21

שאלה 5.22

באיור 5.53 מתוארת מערכת שערים.

נתון: $f_1 = \bar{A}C + B\bar{C}$

- רשמו את הפונקציה f של המעגל.
- בטאו את הפונקציה f במינימום ליטרלים.
- ממשו את הפונקציה באמצעות שערים לוגיים.



איור 5.53 מערכת שערים לשאלה 5.22

שאלה 5.23

בטבלה 5.7 מתוארת המרה מקוד ABC לקוד XYZ . ממשו את מערכת הצירופים של הממיר במינימום של שערים לוגיים.

A	B	C	X	Y	Z
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0

טבלה 5.7 המרה מקוד ABC ל- XYZ

שאלה 5.24

באיור 5.54 מתוארת מערכת צירופים שלמבואותיה $ABCD$ מחוברת מילה בינרית. כאשר הערך העשרוני של מילת המבוא גדול מ-2 וקטן מ-8, הפונקציה f היא '1', אחרת, $f = '0'$.

א. רשמו את טבלת האמת של הפונקציה f .

ב. בטאו את הפונקציה f במינימום ליטרלים וממשו אותה באמצעות שערים לוגיים מסוג NOR בלבד.



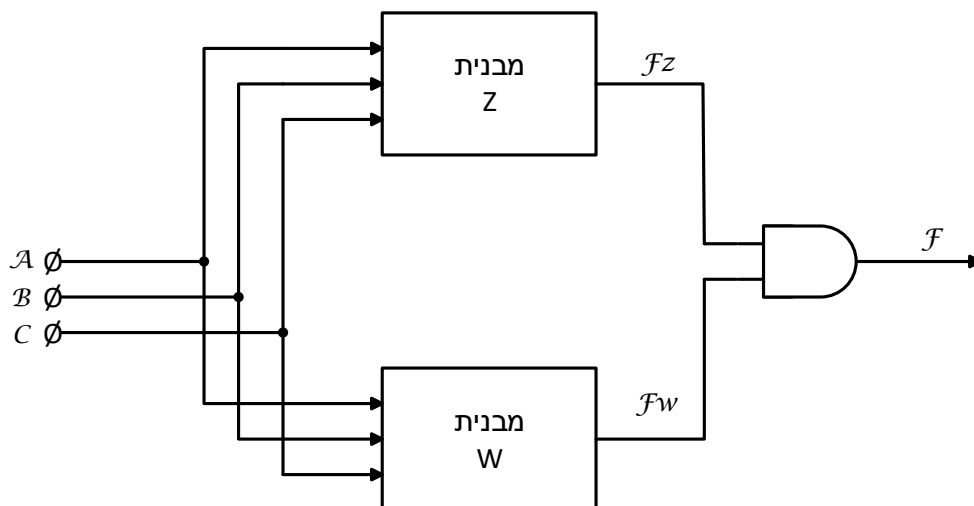
איור 5.54 מערכת צירופים לשאלה 5.24

שאלה 5.25

באיור 5.55 מתוארת מערכת צירופים.

בטאו, במינימום ליטרלים, את הפונקציה f . המבנית z מוגדרת באמצעות טבלת האמת המובאת בטבלה 5.8, והפונקציה f_w מוגדרת באמצעות הביטוי:

$$f_w(A, B, C) = \Sigma(1,5,6) + \Sigma_\phi(4,7)$$



איור 5.55 מערכת צירופים לשאלה 5.25

A	B	C	f_z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

טבלה 5.8 טבלת אמת למבנית z

שאלה 5.26

ארבעה אנשים מחזיקים במניות של חברה מסוימת:

ל- A יש 42% מהמניות.

ל- B יש 35% מהמניות.

ל- C יש 10% מהמניות.

ל- D יש 15% מהמניות.

כל בעלי המניות חברים במועצת המנהלים של החברה. כדי לקבל החלטה במועצת המנהלים דרוש רוב של 50% ויותר.

א. רשמו את טבלת האמת של המערכת.

ב. ממשו את המערכת במינימום ליטרלים.

שאלה 5.27

באיור 5.56 משורטטת מערכת צירופים.

נתון:

כאשר A ו- B שניהם במצב '0', המוצאים U ו- V במצב '0'.

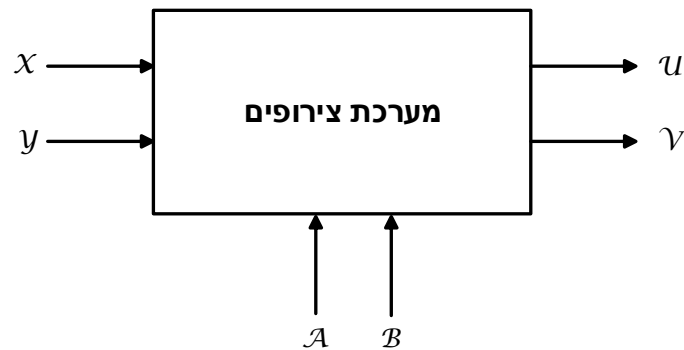
כאשר A ו- B שניהם במצב '1', המוצאים U ו- V במצב '1'.

כאשר $A=0$ ו- $B=1$, המוצאים U ו- V במצב זהה למצב המבואות X ו- Y , בהתאמה.

כאשר $A=1$ ו- $B=1$, מצב המוצאים U ו- V הפוך למצב המבואות X ו- Y , בהתאמה.

א. רשמו את טבלת האמת של המערכת.

ב. ממשו את המערכת באמצעות שערי NAND בלבד.



איור 5.56 סרטוט לשאלה 5.27

שאלה 5.28

אדם רוצה לבנות מכונה שתסייע לו להחליט אם ללכת לעבודה.

ההחלטה אם ללכת לעבודה תלויה בטמפרטורת הסביבה. הטמפרטורה נמדדת בעזרת שני חיישנים. חיישן אחד, חיישן חום, בודק אם הטמפרטורה גבוהה מ- 30°C . במקרה שהטמפרטורה גבוהה מ- 30°C , החיישן מפיק '1' לוגי במוצאו, אחרת הוא מפיק '0' לוגי.

חיישן נוסף, חיישן קור, בודק אם הטמפרטורה נמוכה מ- 10°C . כשהטמפרטורה אכן

נמוכה מ- 10°C , הוא מפיק '1' לוגי במוצאו, אחרת הוא מפיק '0' לוגי.

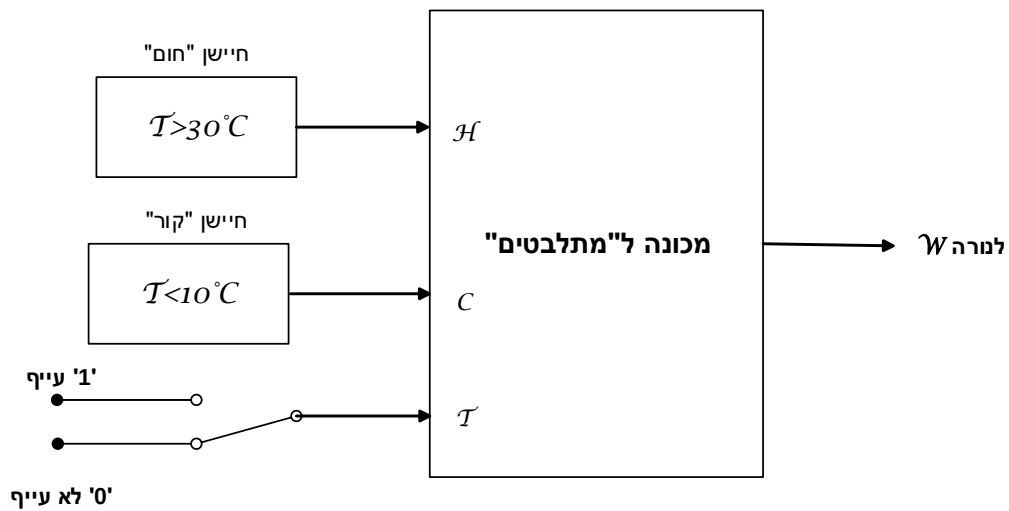
ההחלטה אם ללכת לעבודה תלויה גם במצב העייפות של האדם. כשהוא עייף, הוא מפעיל מתג מסוים כך שיפיק '1' לוגי, וכשהוא אינו עייף, הוא מפעיל מתג כך שיפיק '0' לוגי.

המתג ושני החיישנים מחוברים למבואות המערכת המופיעה באיור 5.57.

מוצא המכונה מחובר לנורה שמאירה כאשר האדם צריך ללכת לעבודה.

המערכת פועלת בצורה הבאה: כאשר קר מדי או חם מדי, וכשהאדם עייף, הוא לא ילך לעבודה פרט למקרה אחד: כאשר האדם עייף וקר מדי (במקרה כזה העייפות תעבור בזמן העבודה בתנאי קור).

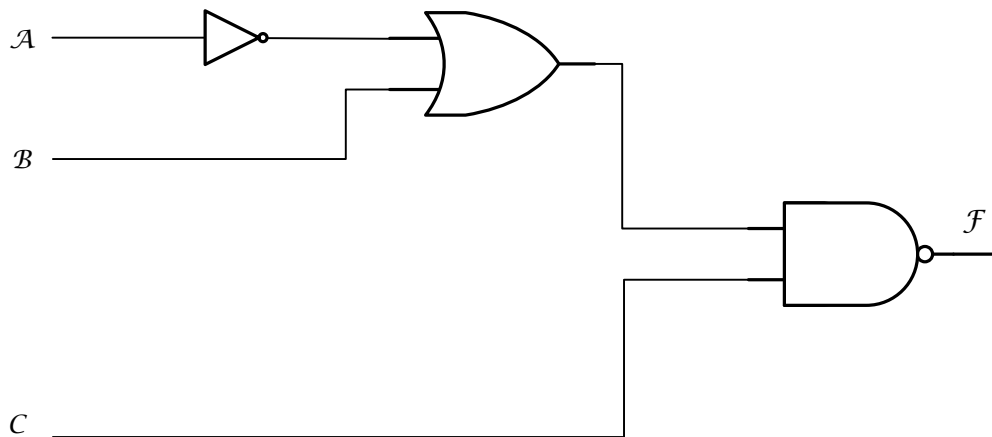
ממשו את המערכת בעזרת מספר מזערי של שערים.



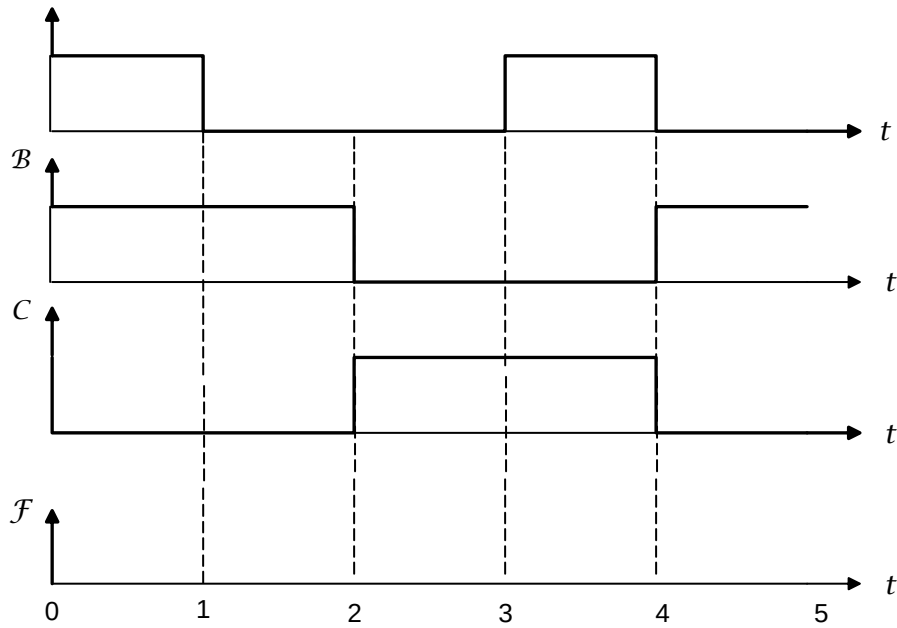
איור 5.57 מכונה למתלבטים

שאלה 5.29

באיור 5.58 משורטטת מערכת שערים לוגיים המופעלת באותות מבוא, המופיעים באיור 5.59. העתיקו למחברת את תרשימים הזמנים של אותות המבוא והוסיפו תרשימים זמנים של אות המוצא F .



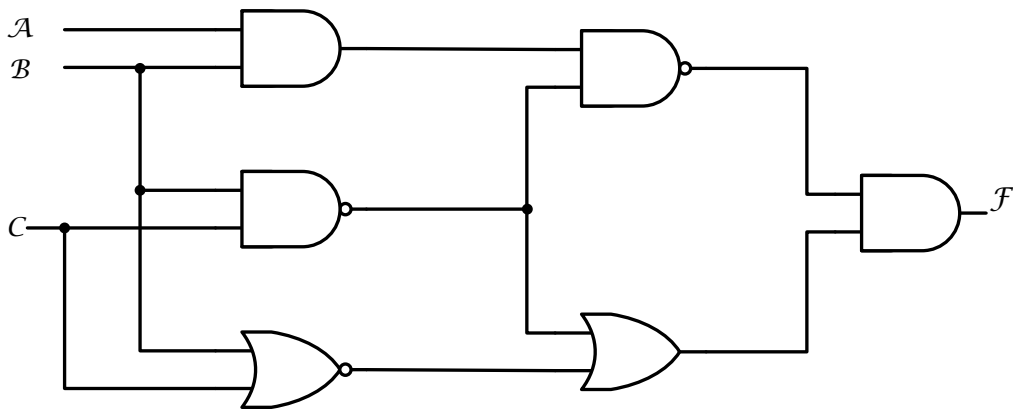
איור 5.58 מערכת שערים לשאלה 5.29



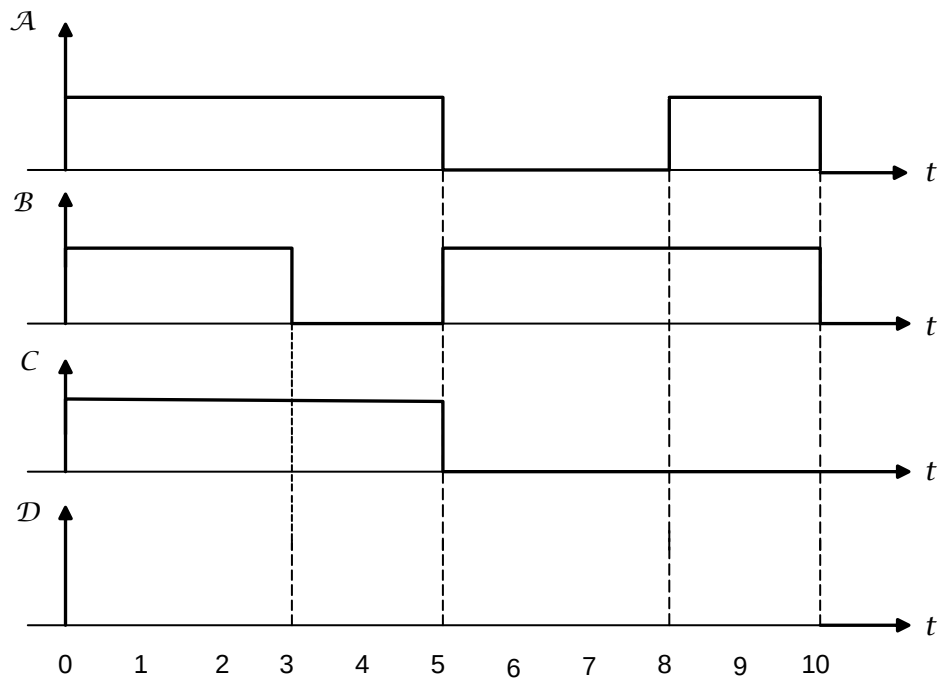
איור 5.59 תרשים זמנים של אותות המבוא לשאלה 5.29

שאלה 5.30

נתונה מערכת השערים שבאיור 5.60. באיור 5.61 נתון תרשים זמנים של אותות המבוא. העתיקו את התרשים למחברת והוסיפו לו את השרטוט של אות המוצא בתלות בזמן.



איור 5.60 מערכת צירופים לשאלה 5.30



איור 5.61 תרשים זמנים של אותות המבוא לשאלה 5.30

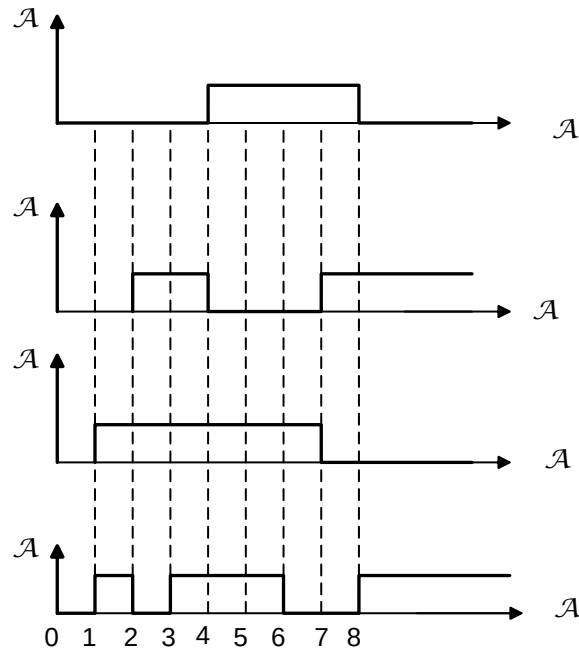
שאלה 5.31

נתונה המערכת שבאיור 5.62. באיור 5.63 נתון תרשים הזמנים של שלושת המבואות A, B, C ושל המוצא F .

ממשו את המערכת הנתונה באמצעות שערים לוגיים.



איור 5.62 סרטוט לשאלה 5.31



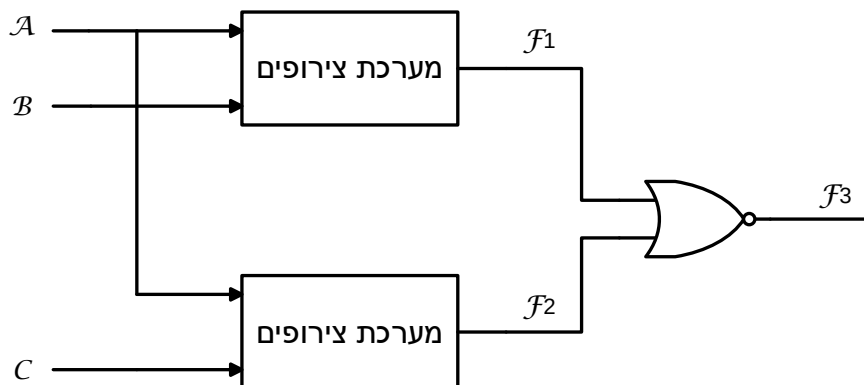
איור 5.63 תרשים זמנים של אותות המבואה לשאלה 5.31

שאלה 5.32

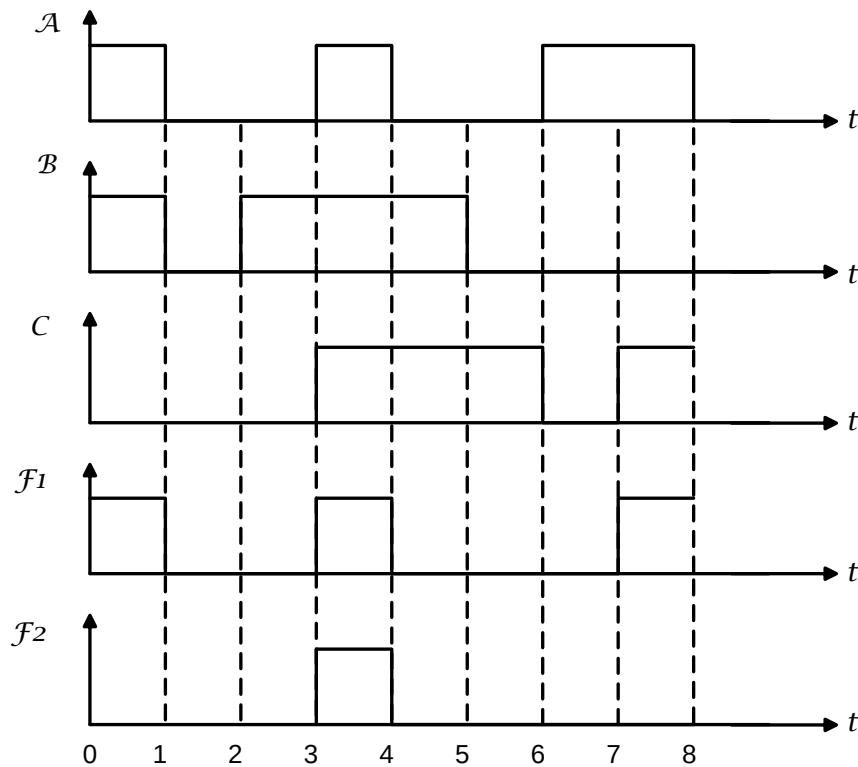
התנהגות המערכת שבאיור 5.64 מתוארת באמצעות תרשים הזמנים שבאיור 5.65.

א. רשמו את הביטוי לפונקציות F_1 ו- F_2 כפונקציה של A, B, C .

ב. העתיקו למחברת את מהלכי האותות F_1 ו- F_2 (בלבד), ושרטטו את מהלך האות F_3 .



איור 5.64 מערכת צירופים לשאלה 5.32



איור 5.65 תרשים זמנים לשאלה 5.32

תרגול מעשי לפרק 5

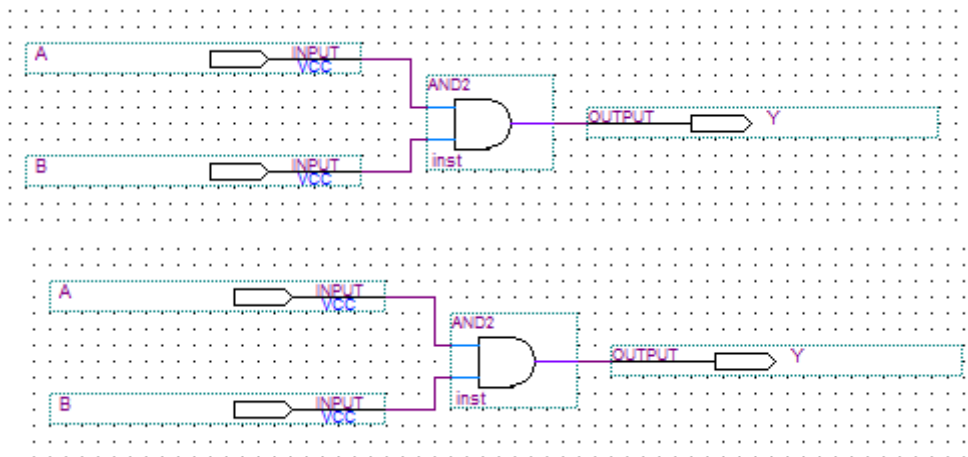
משימה 5.33

מומלץ מאוד בתרגולים הראשונים להיצמד לשלבי העבודה עם תוכנת QUARTUS המוסברים בנספח.

- שרטטו בתוכנה מערכת הכוללת שער AND עם שתי כניסות A, B, ומוצא Y.
- הוכיחו בדיאגרמת הזמן שבתוכנה שהשער יוציא '1' רק כאשר כל כניסותיו הן '1'.

פתרון משימה 5.33

- נפתח בתוכנה פרויקט חדש בשם tar533 בתוך תיקייה עם שם באנגלית במחשב שלנו. `NEXT <- NEW PROJECT WIZARD <- FILE`
- נפתח קובץ גרפי חדש לשרטוט `NEW <- FILE` נבחר `BLOCK DIAGRAM`
- נלחץ פעמיים עם העכבר על שולחן העבודה כדי לייבא שער `AND`, `INPUT`, `OUTPUT` בספריית `PRIMITIVES`.
- ניתן לכניסות וליציאות שמות מתאימים ונחברם לשער `AND`.



ה. נשמור את השרטוט בשם הפרויקט שלנו tar533 , `SAVE AS <- FILE`



ו. נבצע הידור-קומפילציה על ידי לחיצה על האייקון עם המשולש הסגור

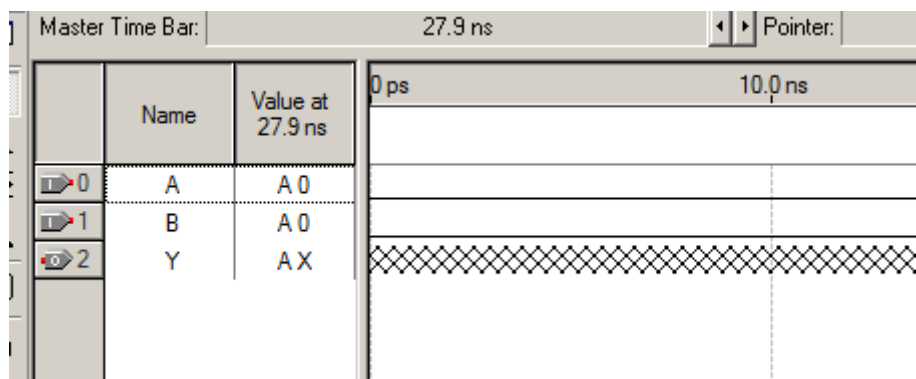
ז. עם ההידור עבר בהצלחה נעבור לשרטוט דיאגרמת הזמן.

`VECTOR WAVEFORM FILE <- NEW <- FILE`

ח. נייבא כניסות ויציאות בעזרת לחצן ימני מתחת ל-`INSERT <- NAME`

`LIST <- NODE FINDER <- INSERT NODES OR BUS` חץ כפול

ימינה - `OK <- OK` ונקבל:



ט. נסדר את מאפייני הזמן של הסימולציה באמצעות `END TIME <- EDIT` ונשנה ל-100 מיקרו-שניות

End Time

Time: 1000 us

Default extension options:

Extension value: Last clock pattern

End time extension per signal:

Signal Name	Direction	Radix	Extension value
A	Input	ASCII	Default extension value
B	Input	ASCII	Default extension value
Y	Output	ASCII	Default extension value

GRID SIZE - EDIT -> ונשנה ל 10 מיקרו שניות את המרווחים PERIOD

Grid Size

Base grid on:

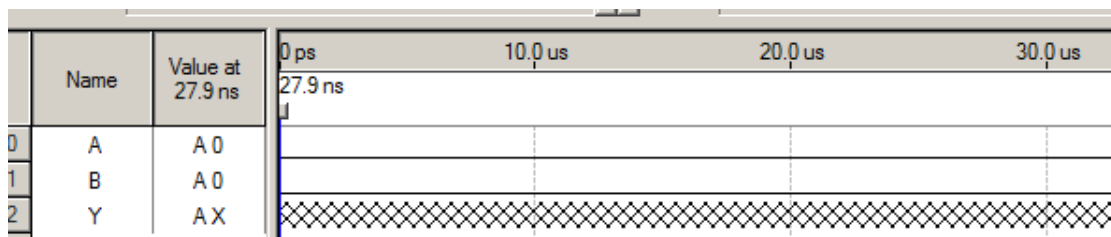
☐ Clock settings:

☒ Time period:

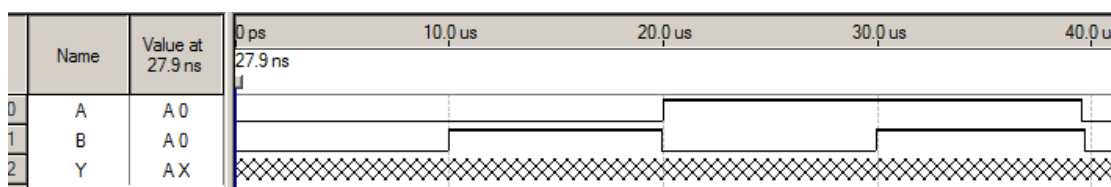
Period: 10.0 us

OK Cancel

י. נבצע צפייה מרחוק ZOOM OUT בעזרת לחיצה על CTRL, ובזמנית נגלגל את גלגלת העכבר לאחור עד הסוף ונקבל:



יא. נשרטט בעזרת ארגז הכלים שמשמאל את כל האפשרויות בין הכניסות:

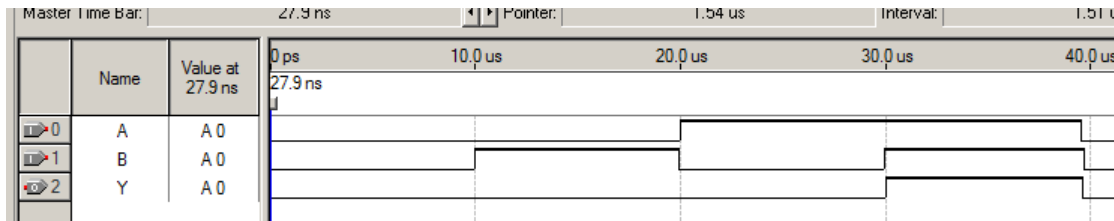


יב. נבצע הידור שוב ונשמור את דיאגרמת הזמן באותו שם קובץ אבל עם סיומת .VWF

י.ג. נריץ את דיאגרמת הזמן על מנת לקבל את מצב המוצא ביחס לזמן בהתאם

למצב הכניסות  ולאחר מכן נלחץ על **START** -> **OPEN** -> אישור

ונקבל:



אפשר לראות שרק כאשר כל הכניסות הן '1' אז המוצא Y יהיה '1'.

משימה 5.34

בדקו באמצעות דיאגרמת הזמן בתוכנה את פעולת שער XOR המחליפה חמישה שערים בשער אחד ומוציאה '1' כאשר הכניסות שונות.

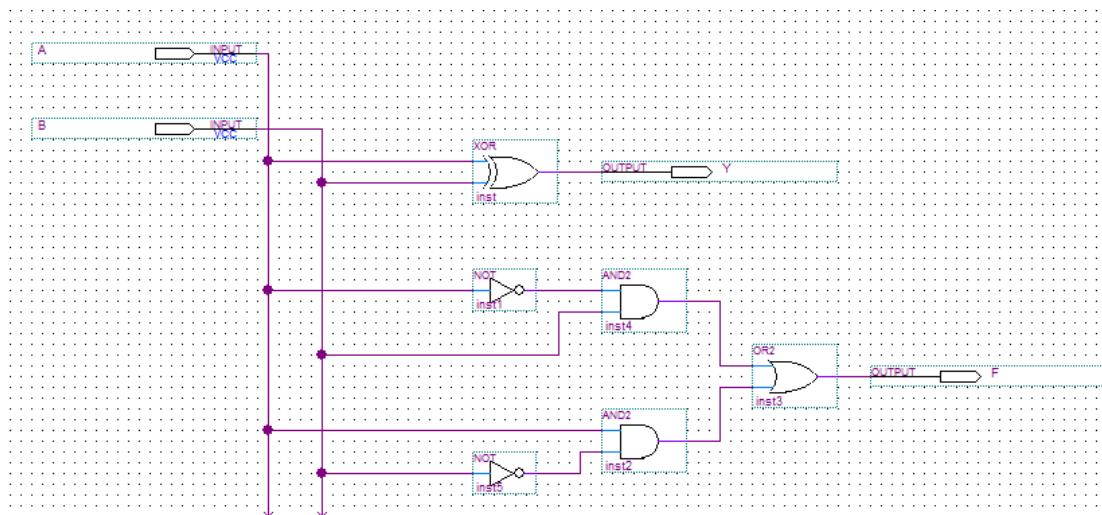
שרטטו בתוכנה את הביטוי $Y = A \oplus B$

שרטטו על אותן כניסות את הביטוי $F = A\bar{B} + \bar{A}B$

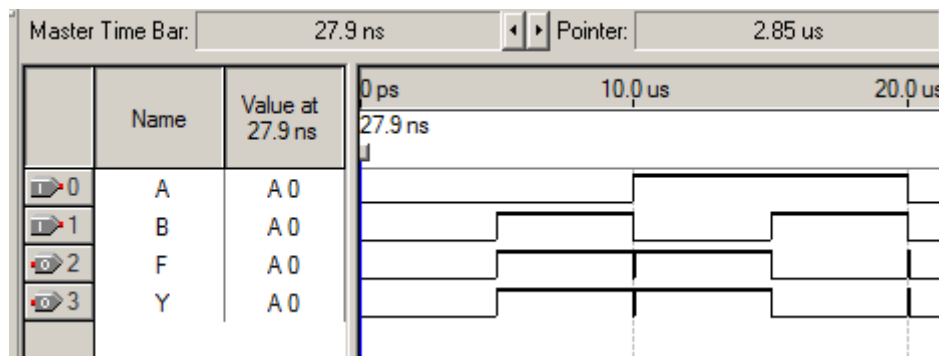
הוכיחו בדיאגרמת הזמן שלכל המצבים האפשריים בין הכניסות, שני המוצאים זהים.

פתרון משימה 5.34

השרטוט:



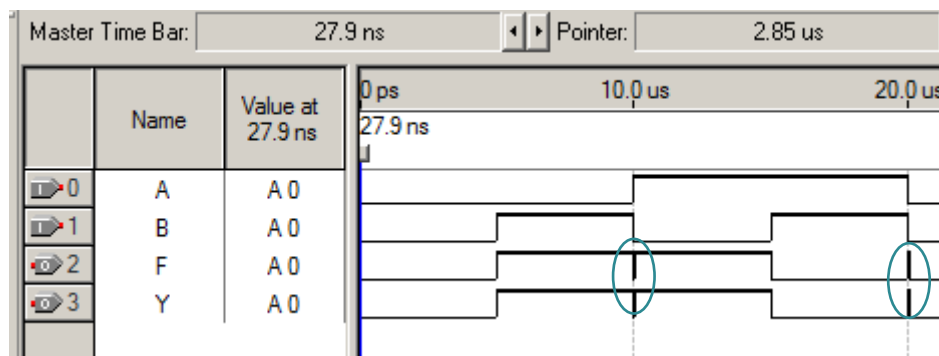
תוצאות דיאגרמת הזמן:



אפשר לראות שפעולת שער XOR שמוצא Y מחליפה את פעולת המימוש בחמישה שערים שמוצאם F. רק כאשר הכניסות שונות, המוצא הוא '1'.

הערה:

בדיאגרמת הזמן מופיעות הקפיצות המסומנות



קפיצות אלו נובעות מכך שתוכנת הפיתוח עושה הדמיה לרכיב מעשי שיש לו TPD ולא לרכיב אידיאלי. מעת השינוי בכניסות, ועד שהמוצא מתעדכן, עובר זמן. לכן, בתכנון מערכות משמעותיות יש להתחשב בכך ולהתמודד עם תכונת זמן ההשהיה של הרכיב בצורה מקצועית נכונה. נכון לעכשיו נתעלם מקפיצות אלו.

משימה 5.35

א. שרטטו בתוכנה את מימוש הפונקציה לפני צמצום/פישוט

$$g1 = XY + \overline{X} + \overline{Y} + \overline{X}\overline{Y}Z$$

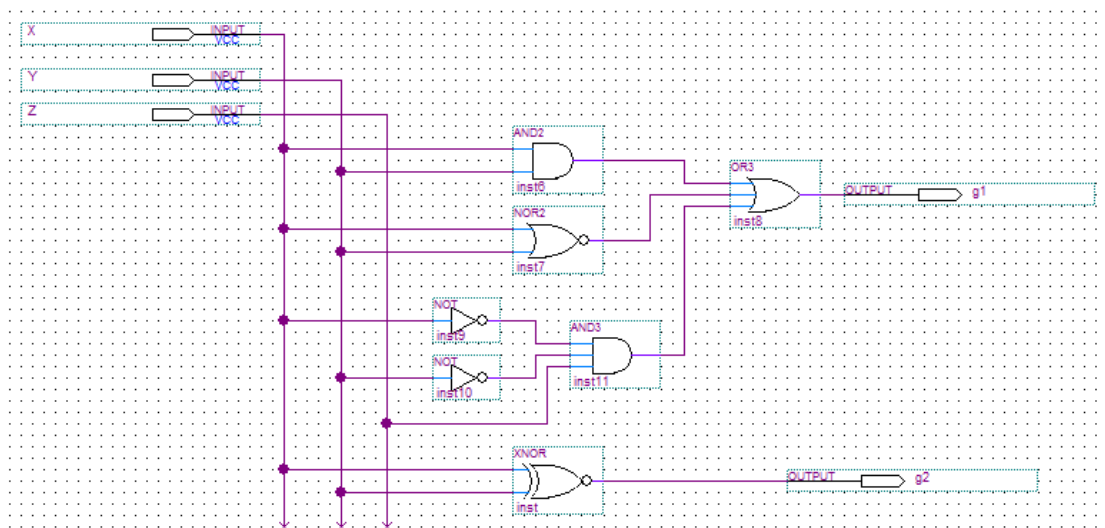
ב. שרטטו בתוכנה על אותן כניסות את הפונקציה לאחר פישוט

$$g2 = XY + \overline{X}\overline{Y} = \overline{X} \oplus \overline{Y}$$

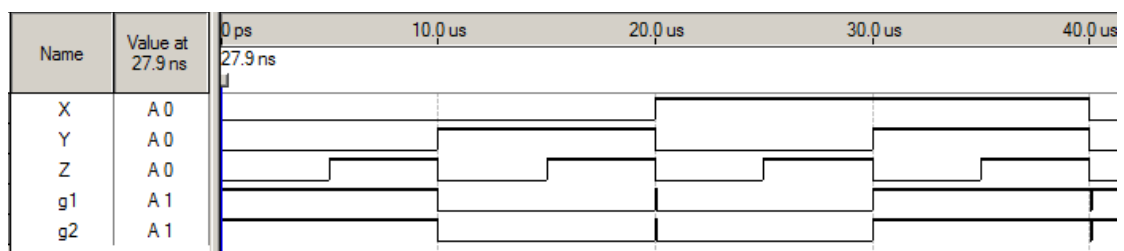
ג. הוכיחו באמצעות דיאגרמת זמן ששני המוצאים $g1$, $g2$ יהיו זהים לכל האפשרויות בין הכניסות.

פתרון משימה 5.35

השרטוט:



תוצאות דיאגרמת הזמן:



שני המוצאים $g1$, $g2$ זהים לכל האפשרויות בין הכניסות, ודבר זה מאפשר לנו לדעת שביצענו נכון את פעולות הפישוט.

רק כאשר הכניסות X , Y זהות, המוצא הוא '1'. הדבר מתאים לביטוי XNOR שהגענו אליו בעקבות פעולות הפישוט.

המערכת המפושטת מבצעת בדיוק אותה פעולה עם פחות ופחות שעים.

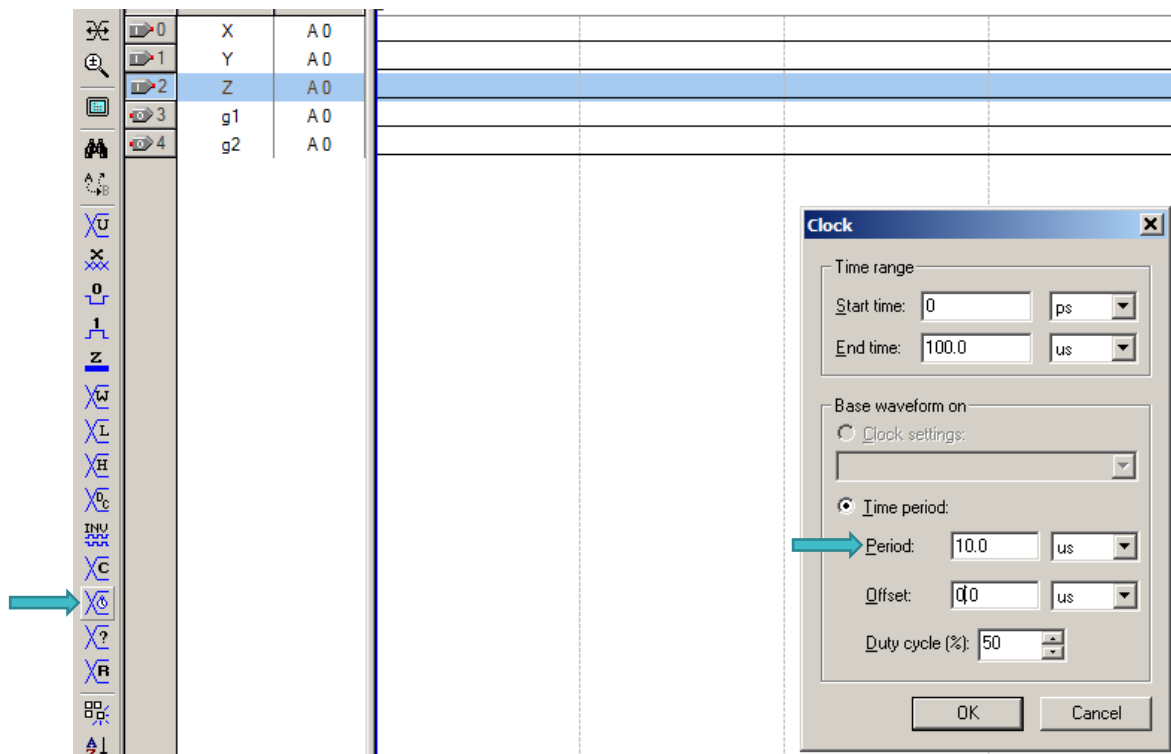
המלצה לזירוז שרטוט אותות הכניסה בדיאגרמת הזמן:

ניתן להציב ידנית את הערכים באותות הכניסה על ידי הצבת '0'/'1' באמצעות סרגל הכלים שמשמאל.

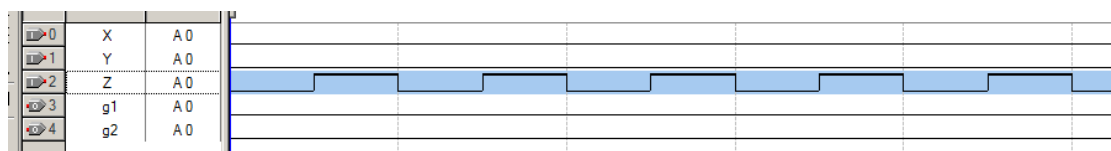
נכון, מהיר ומדויק יותר להשתמש בהצבת אות שעון מתאים לכל כניסה. כך, כל התרחקות מה-LSB תגדיל פי 2 את זמן השינוי כמו בטבלת האמת.

וזאת נבצע באופן הבא:

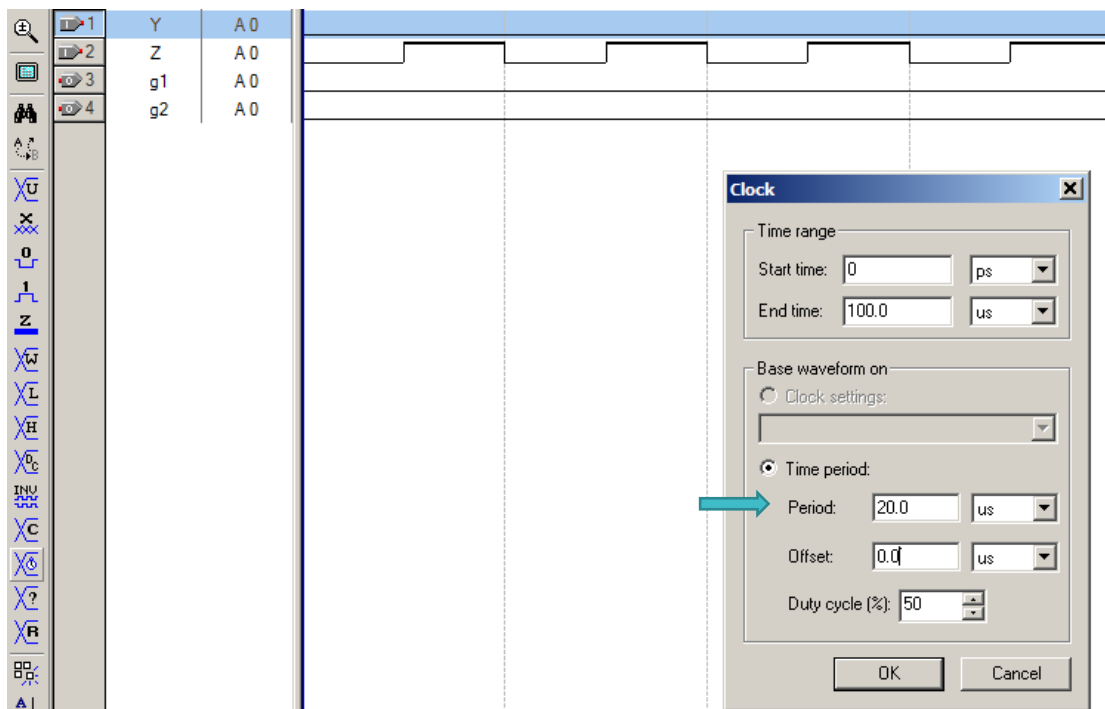
1. נסמן את כניסת LSB.
2. נלחץ על הצלמית של הצבת אות שעון.
3. נציב 10 PERIOD מיקרו-שניות.



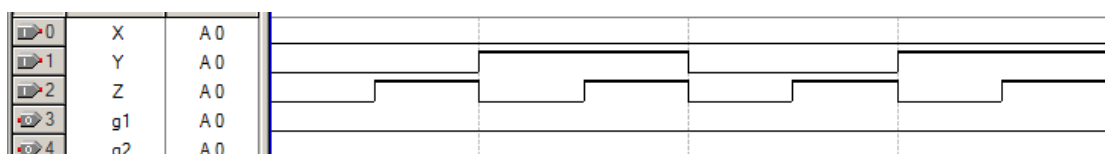
ונקבל:



נמשיך לאות כניסה הבא ונציב $PERIOD$ כפול



ונקבל:



וכך נמשיך בהכפלת זמן השינוי בכניסות הבאות עד וכולל ה- MSB , וכמו בטבלת האמת, נקבל את כל האפשרויות שבין הכניסות באופן מדויק, מהיר ונוח.

משימה 5.36

לפניכם פונקציה:

$$T = A \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot C + C \cdot \bar{D}$$

א. ממשו אותה לאחר פישוט באמצעות שערי NAND בלבד והמוצא יקרא $T1$.

ב. ממשו אותה לאחר פישוט באמצעות שערי NOR בלבד והמוצא יקרא $T2$.

ג. שרטטו בתוכנה המערכות T (לאחר פישוט), $T1$, $T2$ על אותן כניסות ובדקו

בדיאגרמת זמן ששלושת המימושים מבצעים אותה פעולה לכל אפשרות בין הכניסות.

פתרון משימה 5.36

תחילה נפשט את T ונגיע אל הפונקציה:

$$T = A\bar{B} + BD + \bar{C}$$

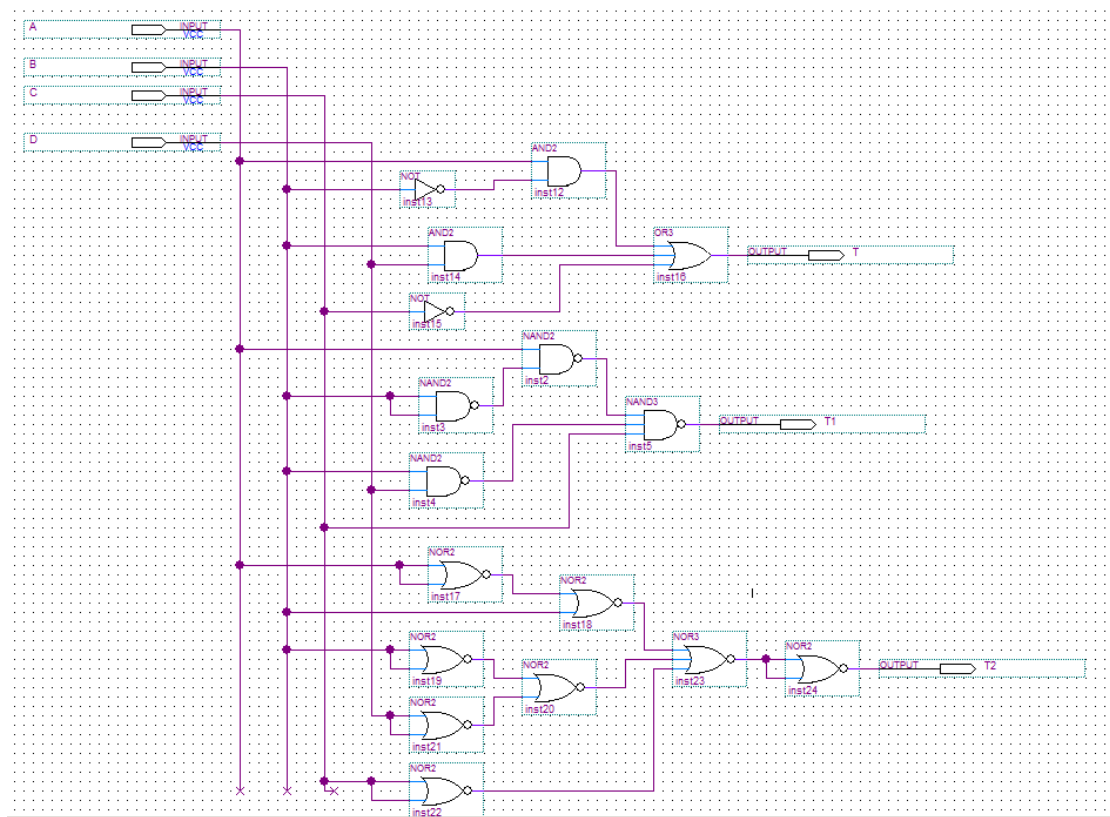
לאחר פעולות מעבר לתצוגת NAND נקבל:

$$T1 = \overline{\overline{A\bar{B}} * \overline{BD} * C}$$

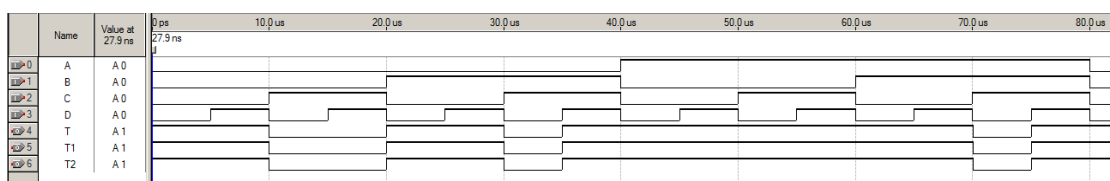
לאחר פעולות מעבר לתצוגת NOR נקבל:

$$T2 = \overline{\overline{\overline{A} + \overline{B}} + \overline{\overline{B} + \overline{D}} + \overline{C}}$$

נשרטט את המימושים של שלושת הפונקציות על אותן כניסות



בדיאגרמת הזמן נקבל:

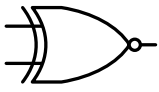


תוצאות הסימולציה מראות שלכל האפשרויות בין הכניסות, שלושת המוצאים מגיבים בצורה זהה ולכן המעבר והמימוש בשערי NANDWOR בוצע נכון.

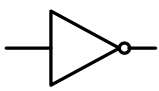
חשוב להבין שאם תוצאת הסימולציה מציגה שגיאה לוגית, יש לחזור לשרטוט ולתקן אותו. לאחר התיקון יש לבצע הידור מחדש ולאחר מכן להריץ את דיאגרמת הזמן מחדש.

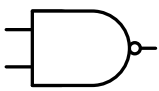
סיכום פרק 5

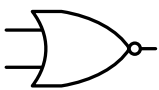
- שערים לוגיים הם רכיבים אשר מבצעים את הפעולות הבוליאניות.
- פעולת חיבור בוליאני (פעולת OR) מתבצעת על ידי שער OR, אשר סימונו:

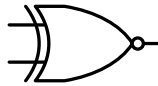

- פעולת כפל בוליאני (פעולת AND) מתבצעת על ידי שער AND, אשר סימונו:


- פעולת היפוך בוליאני (פעולת NOT) מתבצעת על ידי שער NOT, אשר סימונו:


- השערים הלוגיים יכולים להיות: מעגלים חשמליים, אלקטרוניים, פניאומטיים (מערכת לחץ אוויר) וכדומה.
- מערכת מושלמת היא אוסף מזערי של פעולות בוליאניות שבעזרתן אפשר לבטא כל פונקציה בוליאנית.
- אוסף הפעולות AND ו-NOT הוא מערכת מושלמת, ונקרא NAND. השער שמבצע את פעולת NAND מסומן על ידי:


- אוסף הפעולות OR ו-NOT הוא מערכת מושלמת ונקרא NOR. השער אשר מבצע את פעולת NOR מסומן על ידי:


- במסגרת המערכות השלמות קיים שער נוסף – XOR אשר מבצע את הפעולה $T = \bar{A} \cdot B + \bar{B} \cdot A$ ומסומן:



- לצורך ניתוח רשתות לוגיות אנו "עוקבים" אחרי הפעולות המתבצעות על ידי השערים השונים על משתני המבוא עד למוצא.
- מימוש פונקציות לוגיות מתבצע בעזרת שערים.
- קיימת נטייה להשתמש בסוג אחד של שערים NOR או $NAND$ בלבד למימוש פונקציות לוגיות. כדי לממש פונקציה לוגית בעזרת NOR או $NAND$, יש להציג את הפונקציה בצורתה הקנונית ולממש אותה.
- מערכת צירופים היא רשת לוגית, המורכבת **משערים בלבד**. הפונקציה המתקבלת במוצא המערכת תלויה אך ורק בערכים ה**נוכחיים** של משתני המבוא.

פרק 6 - תכנון ומימוש של מערכות צירופים שימושיות

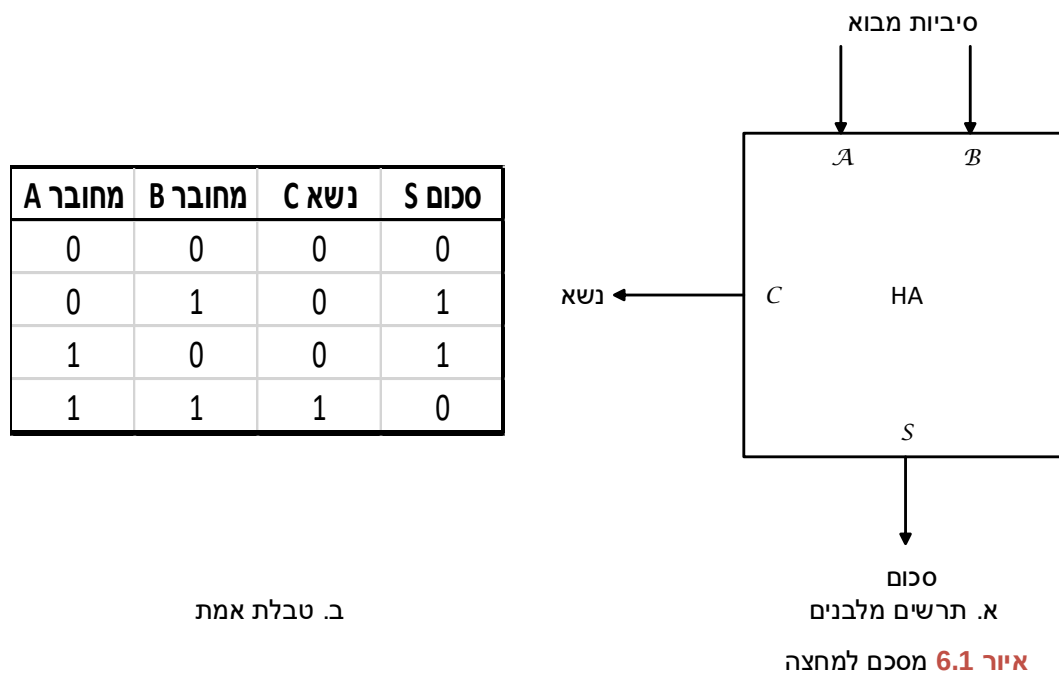
בפרק זה נתאר כמה מערכות צירופיות נפוצות. מערכות אלה מתחלקות לשני סוגים עיקריים: מערכות חישוב ומערכות לניתוב נתונים. נציג כאן את אופן פעולתן של מערכות אלה ואת המבנה העקרוני שלהן.

6.1 מסכמים (Adders)

מסכם הוא מערכת צירופים המבצעת פעולת חישוב יסודית - חיבור בינארי.

תחילה נדון במערכת המבצעת חיבור בינארי של שתי סיביות בלבד (איור 6.1). למערכת זו שני מבואות - הסיביות שעליהן מתבצעת פעולת החיבור (B, A) , ושני מוצאים - סיבית הסכום (S) וסיבית הנשא (C) .

מערכת כזו נקראת מסכם למחצה (Half Adder), מכיוון שאינה כוללת מבוא לנשא מדרגה קודמת.

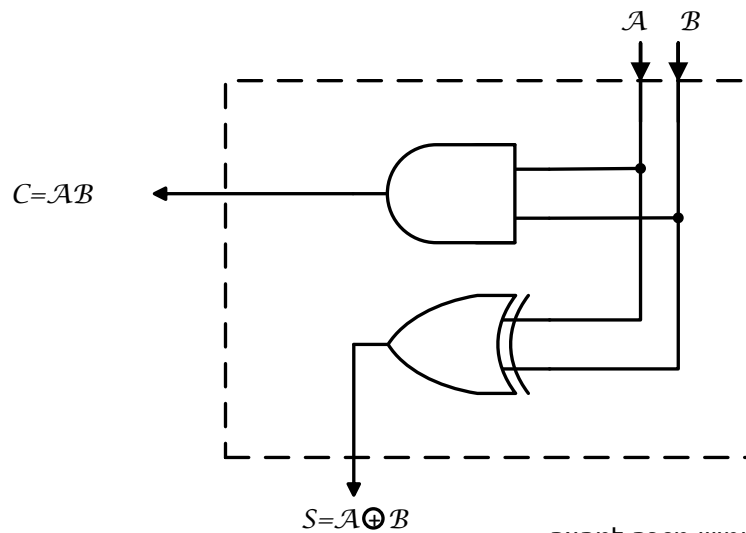


מטבלת האמת מתקבלים שני ביטויים בוליאניים, המתארים את שני המוצאים S ו- c כפונקציה של המבואות A ו- B :

$$S = \bar{A}B + A\bar{B} = A \oplus B$$

$$c = AB$$

מימוש המסכם למחצה מופיע באיור 6.2.



איור 6.2 מימוש מסכם למחצה

כאמור, מסכם למחצה מבצע חיבור בינארי של שתי סיביות בלבד. נראה כעת מקרה כללי יותר – כלומר, חיבור של שני מספרים בינאריים X ו- Y , בעלי n סיביות כל אחד:

$c_n \quad c_{k+1} \quad c_3 c_2 c_1$	סיביות הנשא המתקבלות
$\curvearrowright \quad \quad \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright$	בפעולת החיבור
$X_{n-1} \dots X_k \dots X_2 X_1 X_0$	סיביות המחובר הראשון X
$+ Y_{n-1} \dots Y_k \dots Y_2 Y_1 Y_0$	סיביות המחובר הראשון Y
$X_{n-1} \dots X_k \dots X_2 X_1 X_0$	סיביות תוצאת החיבור S^{**}

* ניתן להגיע למשוואות אלה גם ללא טבלת אמת. תוצאת החיבור של שתי סיביות היא 1, אם ורק אם ערך אחת מהן היא 1. זוהי בדיוק פעולת XOR. לכן: $A = A \oplus B$. אם ערך שתי הסיביות הוא 1, תוצאת החיבור הבינארי היא $(2)_{10} = (10)_2$, ורק אז מתקבל נשא, כלומר $c = AB$.

** מספר סיביות התוצאה (S) גדול ב-1 ממספר סיביות המחברים.

פעולת החיבור הבינארית בין שני המספרים X ו- Y מתבצעת באמצעות חיבור הסיביות המתאימות.

הסיביות שמשקלן $2^0(Y_0, X_0)$ מחוברות ביניהן, סכומן נרשם במקום המתאים בתוצאה (S_0) , והנשא (c_1) נרשם מעל החץ המתאים. הנשא מיתוסף לסכום שתי הסיביות שמשקלן $2^1(Y_1, X_1)$, התוצאה נרשמת ב- S_1 והנשא c_2 נרשם מעל החץ המתאים. כך חוזר תהליך החיבור על עצמו, עד לחיבור הסיביות Y_{n-1}, X_{n-1} ו- c_{n-1} . תוצאת החיבור נרשמת כ- S_{n-1} והנשא c_n יירשם כ- S_n .

דוגמה 6-1

$ \begin{array}{r} c \ 0 \ 0 \ 1 \\ \overset{\curvearrowright}{X} \ \overset{\curvearrowright}{0} \ \overset{\curvearrowright}{0} \ \overset{\curvearrowright}{1} \ (1) \\ + \qquad \qquad \qquad + \\ Y \ 0 \ 1 \ 1 \ (3) \\ \hline S \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ (4) \end{array} $	א.
$ \begin{array}{r} c \ 1 \ 0 \ 0 \\ \overset{\curvearrowright}{X} \ \overset{\curvearrowright}{1} \ \overset{\curvearrowright}{0} \ \overset{\curvearrowright}{1} \ (5) \\ + \qquad \qquad \qquad + \\ Y \ 1 \ 0 \ 0 \ (4) \\ \hline S \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ (9) \end{array} $	ב.

א. $001+011$

ב. $101+100$

פתרון

נסמן את המספרים המחוברים – בכל אחד מהמקרים – ב- X וב- Y .

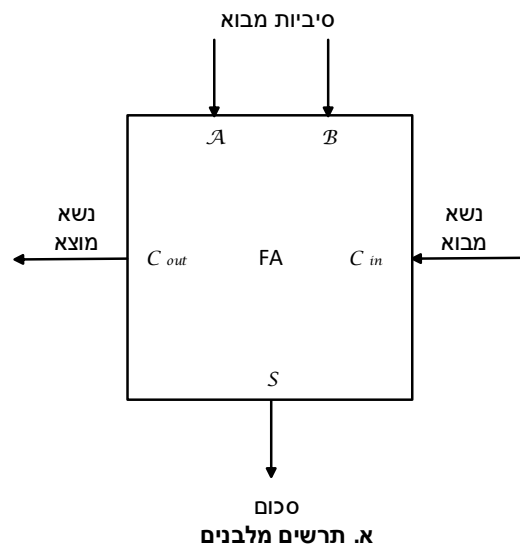
דוגמה 6-1 מראה שפעולת החיבור בין שתי הסיביות הפחות משמעותיות, X_0 ו- Y_0 (שמשקלן 2^0), פשוטה (כיוון שאין צורך לחבר גם נשא), והיא ניתנת למימוש באמצעות המסכם למחצה. מבואות המסכם למחצה יהיו הסיביות X_0 ו- Y_0 , ובמוצאיו נקבל את סיבית הסכום S_0 ואת סיבית הנשא c_1 .

מערכת המבצעת פעולת חיבור של שתי סיביות שמשקלן זהה נקראת **דרגת חיבור**, או בקיצור **דרגה** (stage). דרגה 0 היא אפוא המסכם למחצה, המבצע את החיבור בין שתי הסיביות שמשקלן 2^0 (X_0 ו- Y_0). בשאר הדרגות יש צורך לחבר, בנוסף לסיביות המבוא, גם נשא מדרגה קודמת. מערכת המחברת שתי סיביות מבוא ונשא מבוא, ומפיקה סיבית סכום וסיבית נשא, נקראת **מסכם מלא** (Full Adder – FA). דרגה 1 תהיה אפוא מסכם מלא, אשר יבצע את חיבור הסיביות שמשקלן 2^1 (X_1, Y_1, c_1).

המסכם המלא מופיע באיור 6.3.

סיביות מבוא		נשא מבוא	נשא מוצא	סכום
A	B	C _{in}	C _{out}	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

ב. טבלת אמת



א. תרשים מלבנים

איור 6.3 מסכם מלא

המשוואות עבור סיבית הסכום ונשא המוצא c_{out} הן:

$$S = A \oplus B \oplus c_{in}$$

$$c_{out} = AB + c_{in}(A \oplus B)$$

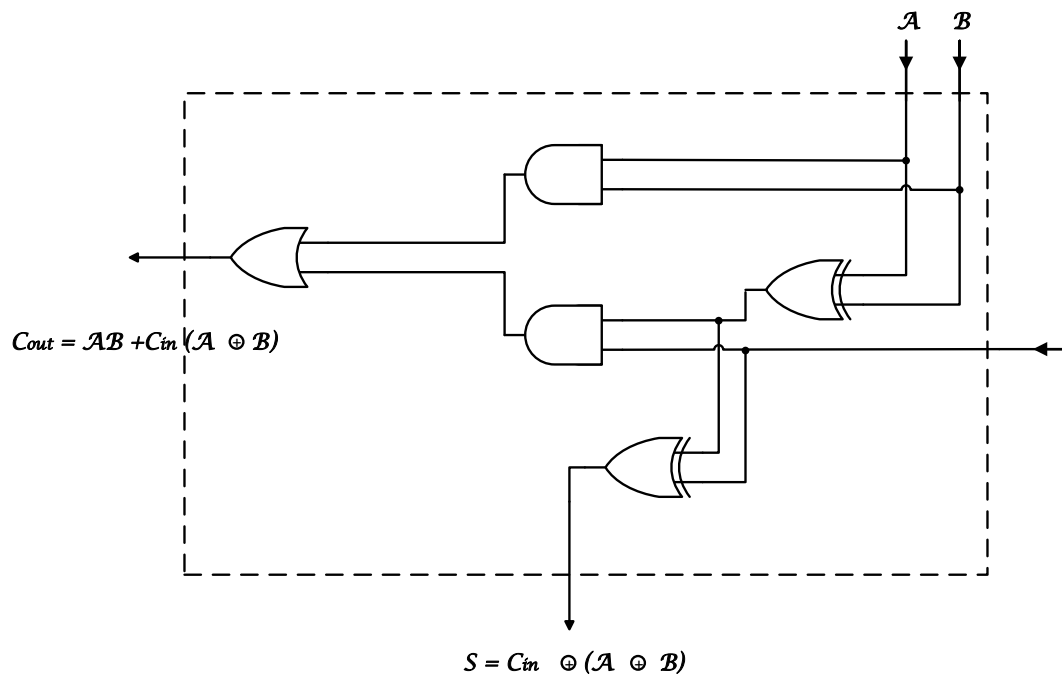
שאלה 6.1

א. נסו להגיע למשוואות הנתונות עבור S ו- c_{out} , מתוך ההגדרה של פעולת המסכם המלא.

ב. אמתו את המשוואות הנתונות באמצעות טבלת האמת וכללי האלגברה הבוליאנית.

$$\overline{X \oplus Y} = \bar{X}\bar{Y} + XY \quad \text{רמז: הוכיחו תחילה כי}$$

מימוש המסכם המלא באמצעות שערים מופיע באיור 6.4. מימוש זה נובע ישירות ממשוואות המסכם המלא. דרך נוספת למימוש תפגשו בשאלות החזרה לפרק זה.

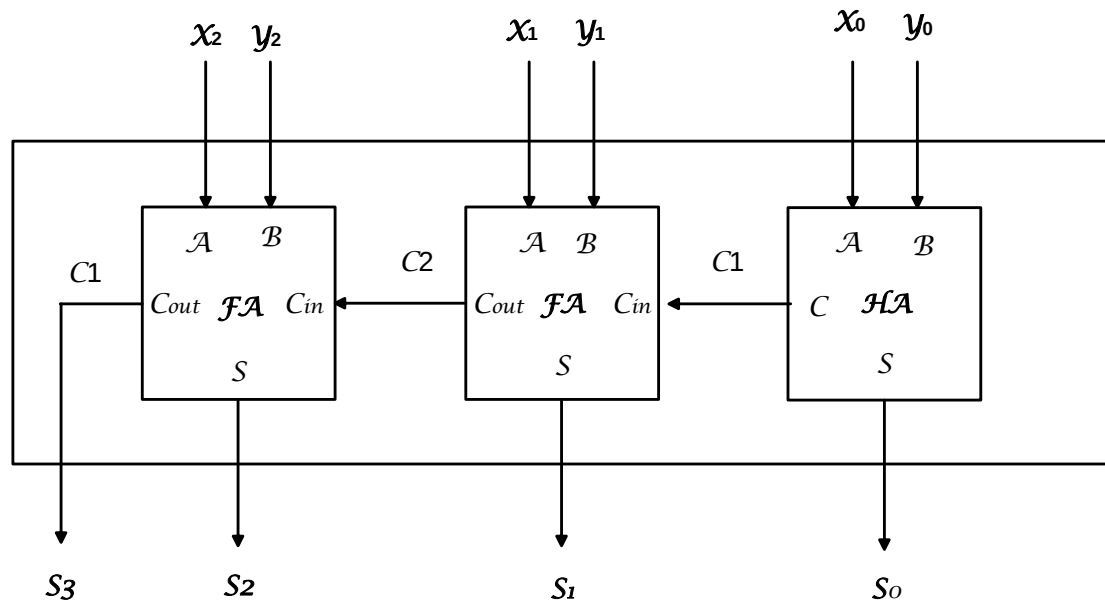


איור 6.4 מימוש מסכם מלא

ניתן אפוא לחבר שני מספרים בינאריים בעלי n סיביות כל אחד, באמצעות מסכם למחצה (HA) אחד ו- $n-1$ מסכמים מלאים (FA). באיור 6.5 מופיעה מערכת לחיבור שני מספרים בעלי 3 סיביות ($n=3$). למערכת כזו קוראים **מסכם גלי**.

במסכם זה, דרגה 0 מסכמת את שתי הסיביות שמשקלן 2^0 , ומפיקה את סיבית המוצא S_0 ואת הנשא c_1 . דרגה 1 מסכמת את שתי הסיביות שמשקלן 2^1 ואת נשא המבוא c_1 , ומפיקה את סיבית המוצא S_1 ואת הנשא c_2 . כל עוד הנשא c_1 לא מתעדכן לערך הנכון על ידי דרגה 0, S_1 ו- c_2 לא יהיו נכונים. באופן דומה, כל עוד הנשא c_2 לא מתעדכן על ידי דרגה 1, S_2 ו- c_3 לא יהיו נכונים וכן הלאה.

כלומר, נשאי המוצא השונים מתייצבים (מקבלים את ערכם הנכון – הסופי) לפי סדר מיקומם, החל ב- c_1 וכלה ב- c_n . תופעה זו נקראת **התפשטות גלית של הנשא**, ומכאן השם: מסכם גלי.



איור 6.5 תרשים של מסכם גלי בעל שלוש דרגות

דוגמה 6-2

חברו, באמצעות המסכם הגלי שבאיור 6.5, את המספרים הבינאריים $001+011$.

תארו את תוצאות הביניים המתקבלות עד לקבלת התוצאה הסופית.

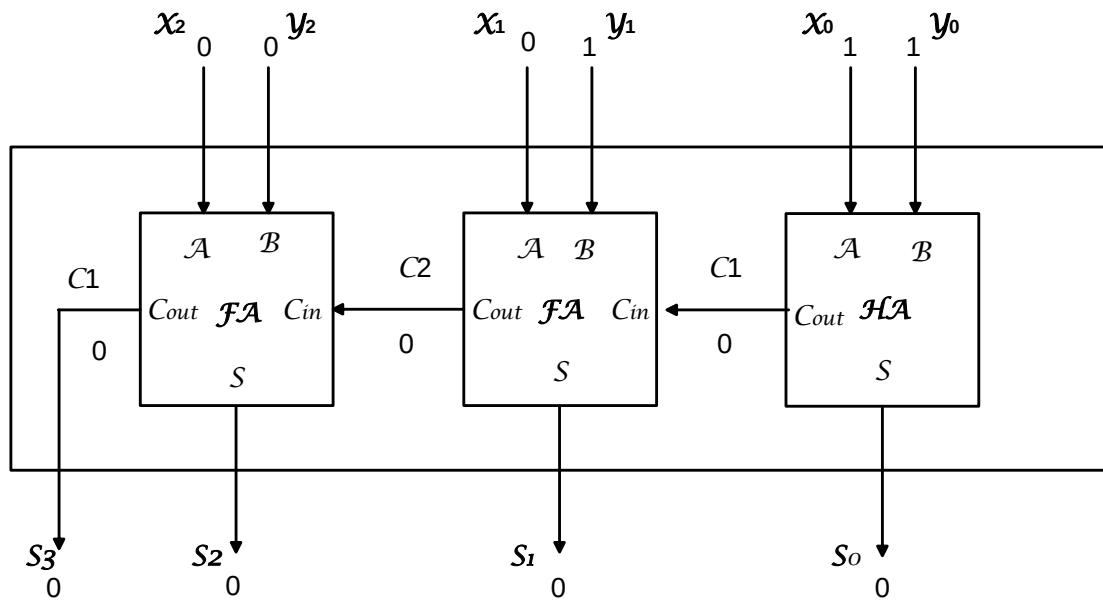
פתרון

נסמן את המספרים המחוברים ב- X ו- Y . סיביות המחוברים הן:

$$X = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ X_2 & X_1 & X_0 \end{matrix} \quad (1)$$

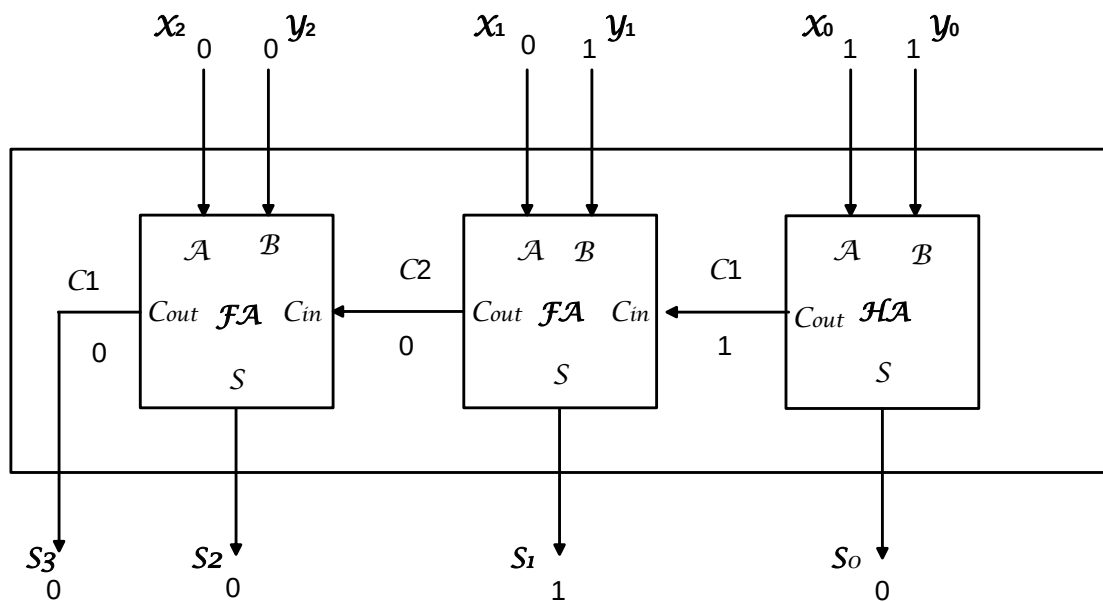
$$Y = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ Y_2 & Y_1 & Y_0 \end{matrix} \quad (2)$$

תהליך החיבור מתואר באיור 6.6.

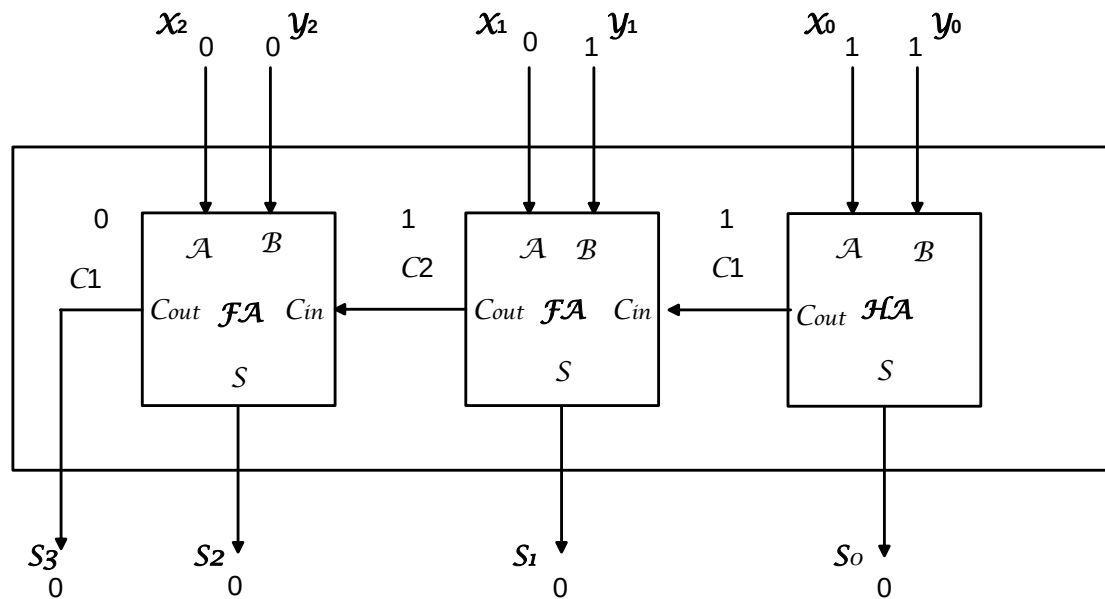


א. המצב לפני תחילת פעולת המחבר

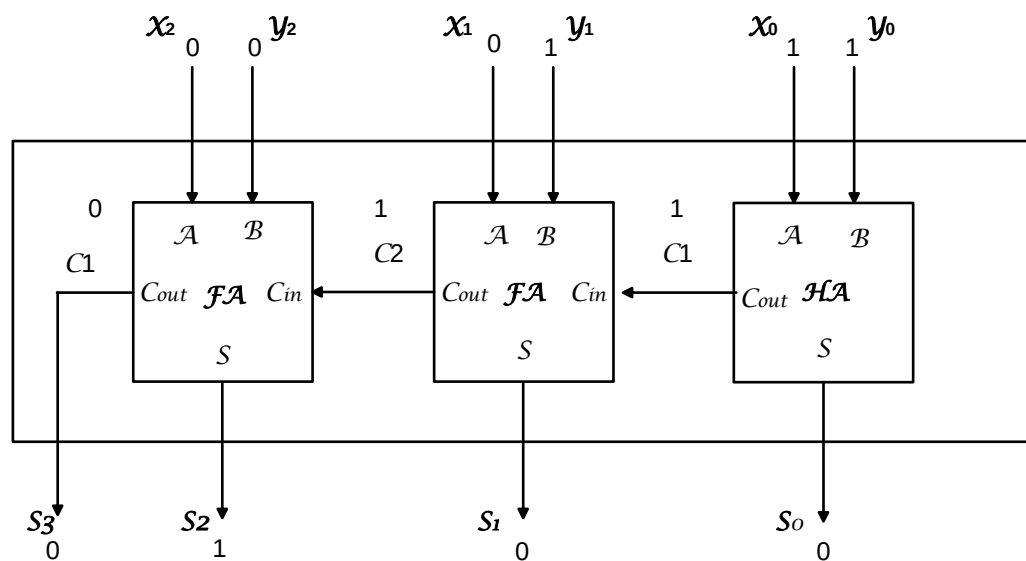
איור 6.6 תיאור פעולת החיבור (המשך בעמוד הבא)



ב. המצב אחרי ש- HA_0 סיים את פעולתו



ג. המצב אחרי ש- FA_0 ו- FA_1 סיימו את פעולתם



ד. המצב בסיום פעולת המחבר

איור 6.6 תיאור פעולת החיבור (המשך)

בתחילת תהליך החיבור (איור 6.6א) מוצאי דרגות החיבור (c_i, S_i) תלויים במצב הקודם של מבואות המסכם. לצורך הדוגמה נניח כי כל המוצאים שווים אפס. שני המחברים X ו- Y מופיעים באותו רגע ($t=0$) במבואות המסכם הגלי. ככל שבמסכם יהיו יותר דרגות, כך תהליך התפשטות הנשא יהיה ארוך יותר.

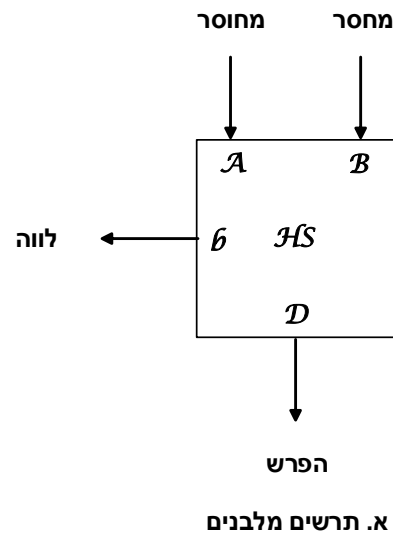
6.2 מחסרים (Subtractors)

כדי לבצע חיסור בינארי, אנו משתמשים במחסר. בדומה למסכם למחצה ולמסכם המלא שהכרנו, קיימים גם מחסר למחצה ומחסר מלא.

למחסר למחצה (איור 6.7) שני מבואות: סיבית המחסר (A) וסיבית המחסר (B) *, ושני מוצאים: סיבית ההפרש (D) וסיבית הלווה (b).

מחסר A	מחסר B	לווה b	הפרש D
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

ב. טבלת אמת



א. תרשים מלבנים

איור 6.7 מחסר למחצה

תרגול

שאלה 6.2

הסבירו את השורה השנייה בטבלת האמת של המחסר למחצה (איור 6.7ב). **

מתוך טבלת האמת של המחסר למחצה נקבל את המשוואות הבאות: ***

$$D = A \oplus B$$

$$b = \bar{A}B$$

* אם A מחסר ו-B מחסר, אז הפעולה המתבצעת היא A-B.

** בפרקים הקודמים למדתם את כללי החיסור הבינארי. רצוי שתרגנו מעט את זיכרונכם בחומר זה בטרם תמשיכו בקריאה.

*** ניתן לקבל משוואות אלה גם ללא טבלת אמת. חיסור שתי סיביות ייתן הפרש 1, אם ורק אם אחת מהן היא 1. זוהי בדיוק פעולת XOR, לכן $D = A \oplus B$.

לווה נקבל כאשר המחסר B גדול מהמחסר A, כלומר B=1, בעוד A=0. לכן $b = \bar{A}B$.

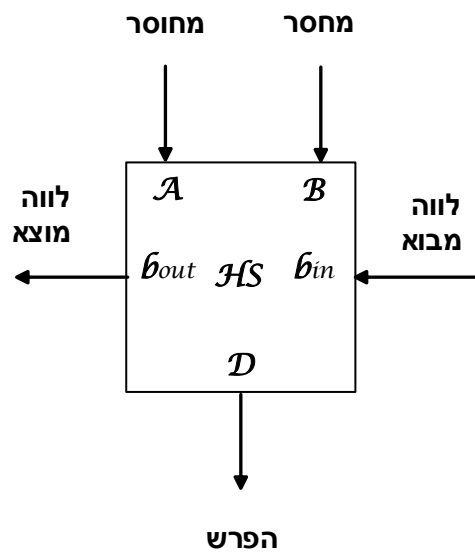
שאלה 6.3

ממשו את המחסר למחצה על פי המשוואות הנתונות.

בפעולת החיבור בין שני מספרים בינאריים בעלי n סיביות היה עלינו להתחשב בנשא אפשרי לצורך חיבור הדרגה הבאה.

בדומה לכך, בפעולת החיסור עלינו להתחשב בלווה אפשרי מדרגת חיסור קודמת, ולא רק בסיביות המחוסרות.

לשם כך נשתמש במחסר מלא (איור 6.8).



א. תרשים מלבנים

מחסר	מחסר	לווה מבוא	לווה מוצא	הפרש
A	B	b_{in}	b_{out}	D
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

ב. טבלת אמת

איור 6.8 מחסר מלא

משוואות המחסר המלא הן:

$$D = A \oplus B \oplus b_{in}$$

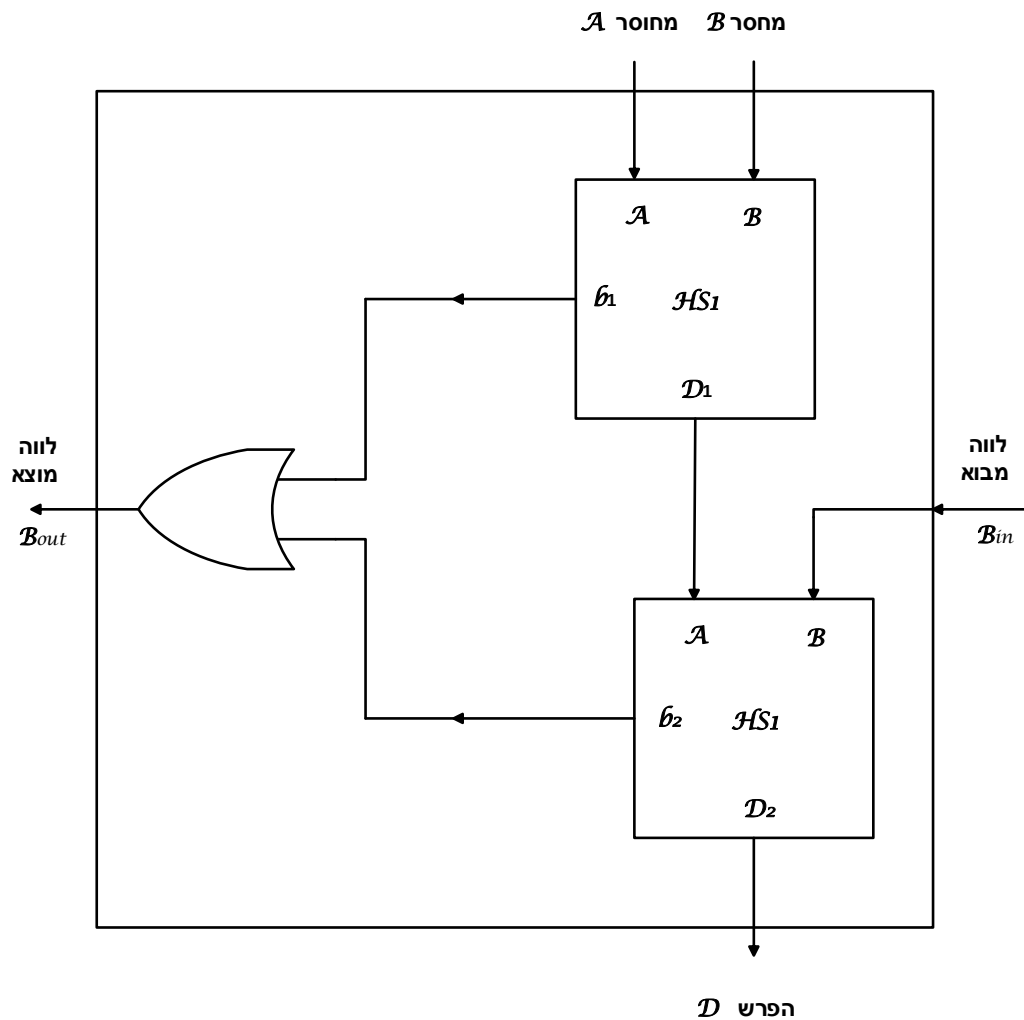
$$b_{out} = b_{in}B + \bar{A}(B \oplus B \oplus b_{in})$$

שאלה 6.4

א. נסו להגיע למשוואות הנתונות עבור D ו- b_{out} מתוך ההגדרה של פעולת המחסר המלא.

ב. אמתו את המשוואות הנתונות באמצעות טבלת האמת וכללי האלגברה הבוליאנית.

נבנה עתה מחסר מלא, תוך שימוש במחסרים למחצה ובשער OR (איור 6.9).



איור 6.9 מימוש מחסר מלא באמצעות מחסרים למחצה ושער OR

שאלה 6.5

הוכיחו את נכונות המימוש של המחסר המלא שבאיור 6.9.

באמצעות המחסרים המלאים והמחסר למחצה אפשר אפוא לחסר שני מספרים בינאריים בעלי n סיביות. לצורך זה יש להשתמש במחסר למחצה אחד וב- $n-1$ מחסרים מלאים. מערכת כזו נקראת **מחסר גלי** (ripple subtractor).

באופן מעשי, לא מקובל להשתמש במחסר גלי. באמצעות מסכם ל- n סיביות ו- n שערי XOR אפשר לבצע גם פעולת חיסור. נושא זה חורג מחומר הלימוד של הספר הנוכחי.

שאלה 6.6

א. שרטטו מחסר בעל שלוש דרגות.

ב. חסרו – באמצעות המחסר הגלי ששרטטתם – את המספרים הבאים: 100-011.

בדומה לחיסרון של המסכם הגלי, חסרוננו העיקרי של המחסר הגלי מתבטא בזמן ההשהיה הארוך שלו, הנגרם כתוצאה מזמן התפשטות הלווה בין הדרגות השונות.

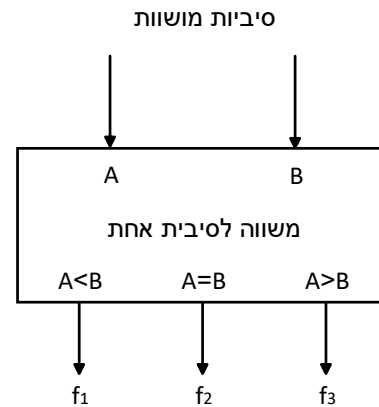
6.3 משווים (Comparators)

בעת ביצוע פעולות חישוב, דרוש לעתים להשוות בין שני מספרים בינאריים כדי לקבל תשובה לשאלות הבאות:

- האם שני המספרים זהים?
- אם שני המספרים אינם זהים, איזה מהם גדול יותר?

נתייחס תחילה למקרה פשוט שבו דרושה השוואה בין שני מספרים, שכל אחד מהם הוא בעל סיבית אחת. משווה כזה נקרא **משווה לסיבית אחת** (איור 6.10).

סיביות משוות		A>B	A=B	A<B
A	B	f ₁	f ₂	f ₃
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0



ב. טבלת האמת

א. תרשים מלבנים

איור 6.10 משווה לסיבית אחת

מתוך טבלת האמת שבאיור 6.10 נקבל את המשוואות הבאות:

$$f_1 = A\bar{B}$$

$$f_2 = \bar{A}\bar{B} + AB = \overline{A \oplus B}$$

$$f_3 = \bar{A}B$$

 תרגול

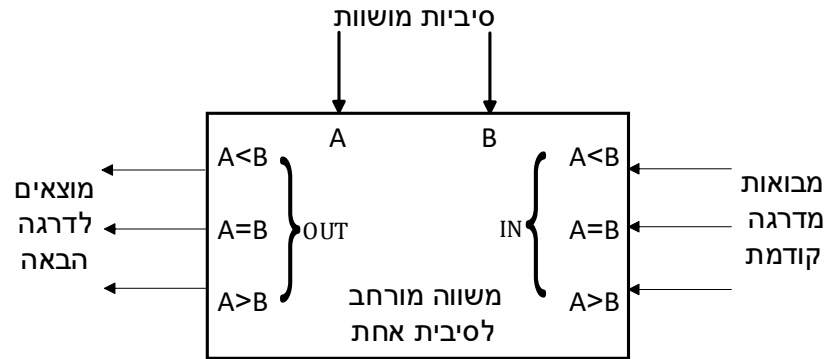
שאלה 6.7

ממשו את המשווה לסיבית אחת על פי משוואותיו הנתונות לעיל.

כדי שנוכל להשוות בין שני מספרים בינאריים בעלי n סיביות, יש לבנות משווה למספר סיביות מתאים. למשל, משווה לשתי סיביות ישווה בין שני מספרים בעלי שתי סיביות כל אחד.

לשם כך, יש להוסיף תחילה למשווה הבסיסי שבנינו (משווה לסיבית אחת) שלושה מבואות נוספים, לציון תוצאת ההשוואה מהדרגה הקודמת (בדומה למסכם המלא שהכיל מבוא לנשא מדרגה קודמת).

באיור 6.11 מופיע תרשים מלבנים של משווה כזה.

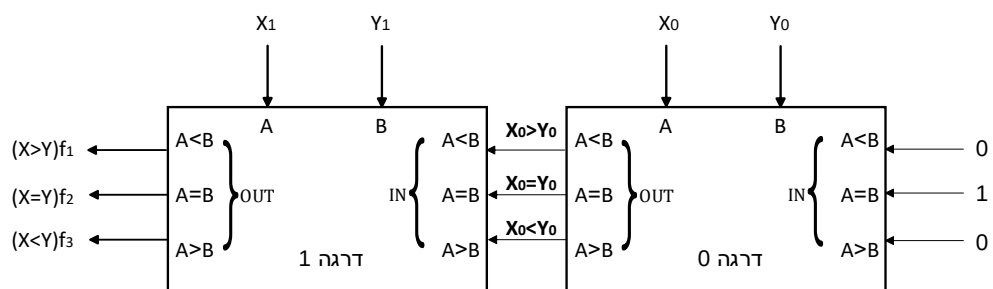


איור 6.11 משווה מורחב לסיבית אחת

סיביות המבוא הנוספות, המסומנות $A < B$, $A = B$ ו- $A > B$, מציינות את תוצאת ההשוואה מהדרגה הקודמת. באיור 6.12 מתואר משווה לשני מספרים בינאריים בעלי שתי סיביות כל אחד, $X = X_1X_0$ ו- $Y = Y_1Y_0$, תוך שימוש במשווים מורחבים לסיבית אחת.

במשווה הראשון (דרגה 0) מושוות הסיביות הפחות משמעותיות של המספרים: X_0 ו- Y_0 . במבואותיו הנוספים נקבע שהיחס הקודם הוא $A = B$, ולכן למבוא זה מסופקת באופן קבוע רמה לוגית (logic level) 1 ולשאר המבואות מסופקת רמה 0. מוצאיו של המשווה הראשון מציינים את היחס שבין X_0 ו- Y_0 ($X_0 > Y_0$ או $X_0 = Y_0$ או $X_0 < Y_0$).

נבנה עתה משווה לשני מספרים בני שתי סיבות באמצעות משווים לסיבית אחת (איור 6.9).



איור 6.12 מימוש משווה לשני מספרים באמצעות משווים לסיבית אחת (מורחבים)

תרגול

שאלה 6.8

- הסבירו מדוע נקבע היחס $A = B$ במבואות דרגה 0 של המשווה לשתי סיביות.
 - הציעו אפשרות נוספת למימוש דרגה 0 של המשווה לשתי סיביות.
- רמז: התבוננו בתרשים המסכם הגלי (איור 6.5).

המשווה השני (דרגה 1) פועל באופן הבא:

- אם $X_1 > Y_1$, התוצאה היא $(X > Y)f_1 = 1$, ללא תלות בערכים שהופקו במשווה הראשון. הסיבה לכך היא שאם בסיביות היותר משמעותיות (שמשקלן 2^1) מתקבל יחס של אי-שוויון, הרי שיחס זה מתקיים עבור המספר כולו, ללא תלות בסיביות הפחות משמעותיות.
- בצורה דומה, אם $X_1 < Y_1$, התוצאה היא $(X < Y)f_3 = 1$.
- רק במצב שבו מתקיים $X_1 = Y_1$ יש להתייחס לתוצאת המשווה מהדרגה הקודמת: במצב זה, התוצאה הכללית של המשווה בין X ל- Y עדיין לא נקבעה, והיא תיקבע כדלהלן:

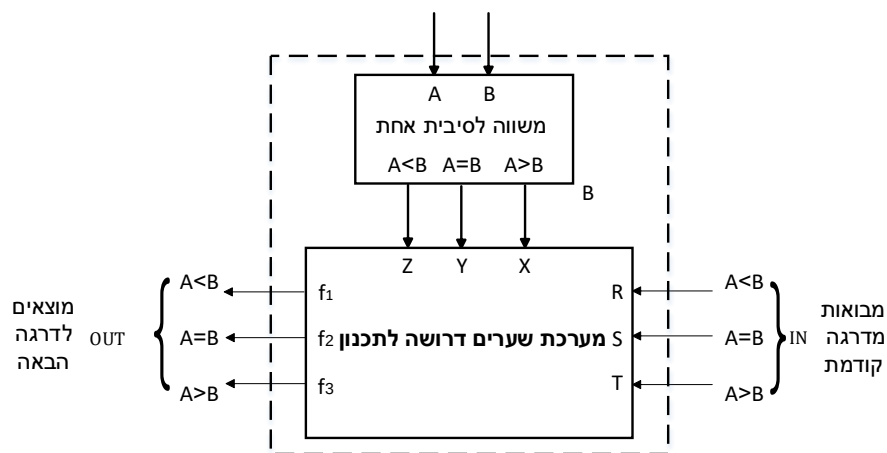
- אם $X_0 > Y_0$, אזי $(X > Y)f_1 = 1$,

- אם $X_0 = Y_0$, אזי $(X = Y)f_2 = 1$,

- אם $X_0 < Y_0$, אזי $(X < Y)f_3 = 1$.

שאלה 6.9

ממשו את המשווה המורחב לסיבית אחת (איור 6.11) באמצעות המשווה ללא ההרחבה (איור 6.10) ומערכת שערים. היעזרו בתרשים הבא (איור 6.13).



איור 6.13 מימוש משווה מורחב לסיבית אחת

בצורה דומה לזו שהובאה באיור 6.12, אפשר להרחיב את המשווה כך שיתאים לשני מספרים בעלי מספר סיביות כלשהו.

בדרגה הראשונה מושוות הסיביות הפחות משמעותיות. תוצאות ההשוואה נמסרות לדרגה הבאה, וכך הלאה. בדומה למסכם הגלי, חסרונו העיקרי של משווה כזה מתבטא בזמן ההשהיה

הארוך, הנובע מהצורך בהתפשטות תוצאת ההשוואה מהדרגה הראשונה ועד לדרגה האחרונה.

6.4 מרבבים, מפלגים ומקודדים

נדון עתה בשני סוגים של מערכות צירופיות, המשמשות להעברה על נתונים בינאריים ממקום למקום: מרבבים ומפלגים. כדי להמחיש את תפקידן של מערכות אלה, ניעזר בדוגמה הבאה:

דוגמה 6-3

בקבוצה ללימוד שפות לומדים שמונה תלמידים. לכל תלמיד יש רשמקול, ולכולם קלטת לימוד זהה. המורה יושב בחדר אחר ועוקב אחרי קצב ההתקדמות של כל תלמיד. לצורך המעקב, מונחים על שולחנו של המורה שמונה זוגות אוזניות - כל זוג מחובר לרשמקול של תלמיד אחר, ושמונה לחצנים - כל אחד מחובר לנורת ביקורת הנמצאת על שולחן התלמיד.

באיור 6.14 מופיע תיאור כללי של מערכת כזו.

על המורה לקחת בכל פעם זוג אחד של אוזניות, להאזין לרשמקול, ובהתאם לכך לדווח לתלמיד על מצבו. אם הקצב של התלמיד אינו משביע רצון - המורה נדרש ללחוץ על הלחצן המתאים, שמדליק את נורת הביקורת שעל שולחן התלמיד. בצורה דומה עובר המורה מרשמקול אחד לשני, ובודק את קצב הלימוד של כל תלמיד. כל שנותר למורה הוא להתנחם בעובדה שמספר התלמידים הוא "רק" שמונה...

אפשר לייעל את הבקרה של המורה על התלמידים, אם נתחשב בעובדה שברגע מסוים המורה מסוגל להאזין לרשמקול אחד בלבד. לשם כך, נשתמש בשני התקנים, א ו-ב (איור 6.15). למבואות התקן א נחבר את מוצאי שמונת הרשמקולים, ולמוצאו נחבר את האוזניות שעל ראש המורה. להתקן זה מחוברים גם מתגי בקרה הממוקמים על שולחן המורה, ובאמצעותם המורה קובע לאיזה רשמקול, של תלמיד, להאזין בכל פעם.

למבוא התקן ב נחבר את הלחצן שעל שולחן המורה, ולמוצאיו נחבר את שמונה נורות הבקרה שעל שולחנות התלמידים. התקן זה מבוקר אף הוא באמצעות מתגי הבקרה שעל שולחן המורה, כך שהמורה יכול ללחוץ על הלחצן שעל שולחנו ולהדליק את הנורה שעל שולחן התלמיד.

המערכת המוצעת באיור 6.15 לא רק מקילה על המורה את עבודתו, אלא היא גם חסכונית יותר מהמערכת הקודמת (איור 6.14). במערכת הראשונה - מחברים בין המורה לתלמידיו 16 קווים: 8 קווים לאוזניות ו-8 קווים ללחצנים, ואילו במערכת השנייה (איור 6.15) מחברים רק 5 קווים: קו אחד לאוזניות, קו אחד ללחצן ועוד שלושה קווי בקרה (בנוסף לחיסכון בקווים, מערכת זו חסכונית יותר גם באוזניות ובלחצנים).

התקן א בדוגמה 3-6, שיש לו כמה מבואות ומוצא אחד - שאליו מועבר בכל פעם מבוא אחד מסוים לפי מצב מתגי הבקרה - נקרא **מרבב**.

התקן ב, שלו מבוא אחד וכמה מוצאים - והמבוא מועבר בכל פעם אל מוצא אחד מסוים לפי מצב מתגי הבקרה - נקרא **מפלג**.

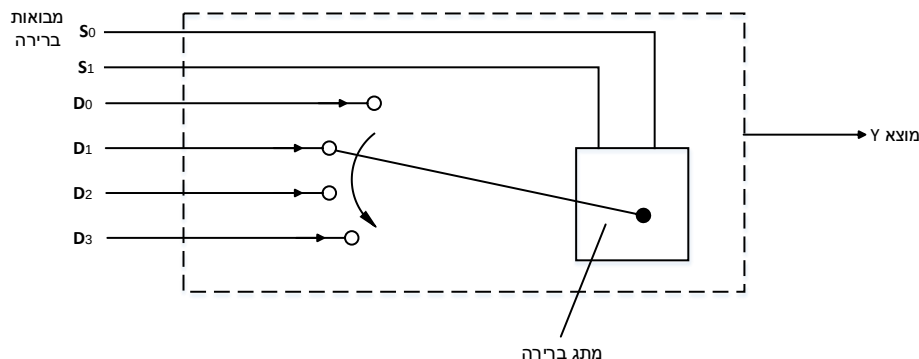
המרבב והמפלג שבדוגמה האחרונה העבירו מידע שאיננו דווקא מידע ספרתי (0 או 1 בלבד). בסעיף זה נעסוק בהתקנים שמעבירים מידע ספרתי בלבד. נדון תחילה במרבבים.

6.4.1 מרבבים (Multiplexers)

ה**מרבב** הוא מערכת צירופים הבוררת מבוא נתונים אחד מבין כמה מבואות, ומעבירה למוצא המערכת את ערכו של מבוא הנתונים הנבחר. למערכת כזו שימושים רבים. למשל, במרכזיות טלפון שבהן יש להעביר כמה שיחות טלפון (לא באותו רגע), מכמה קווים, אל יעד אחד.

פעולת המרבב נקראת **ריבוב** (multiplexing), והיא מתוארת באיור 6.16.

למרבב שבאיור 6.16 ארבעה מבואות נתונים המסומנים D_0, D_1, D_2, D_3 , שני מבואות ברירה, $S_1 S_0$, מוצא אחד ומתג ברירה. מבואות הברירה קובעים איזה מבוא נתונים יועבר אל המוצא Y . פעולה זו מתבצעת באמצעות שליטה על מתג הברירה.



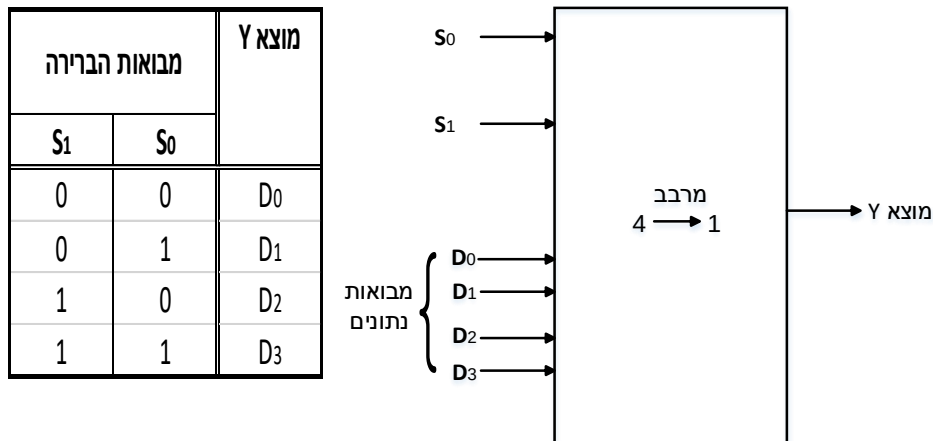
איור 6.16 תיאור פעולת המרבב

המרבב המתואר באיור 6.16 נקרא **מרבב 1 → 4**.

המספר משמאל לחץ (4) מציין את מספר מבואות הנתונים, והמספר מימין לחץ (1) מציין את מספר המוצאים.

הצירוף הבינארי במבואות הברירה קובע את המבוא הנבחר. כדי לייצג ארבע אפשרויות (ארבעה מבואות) בשיטה הבינארית, יש צורך בשני מבואות ברירה ($2^2 = 4$).

באיור 6.17 א מובא תרשים מלבנים של מרבב $1 \rightarrow 4$, ובאיור 6.17 ב מובאת טבלה המתארת את פעולת המרבב בהתאם למצב מבואות הברירה $S_1 S_0$.



ב. טבלה לתיאור פעולת המרבב

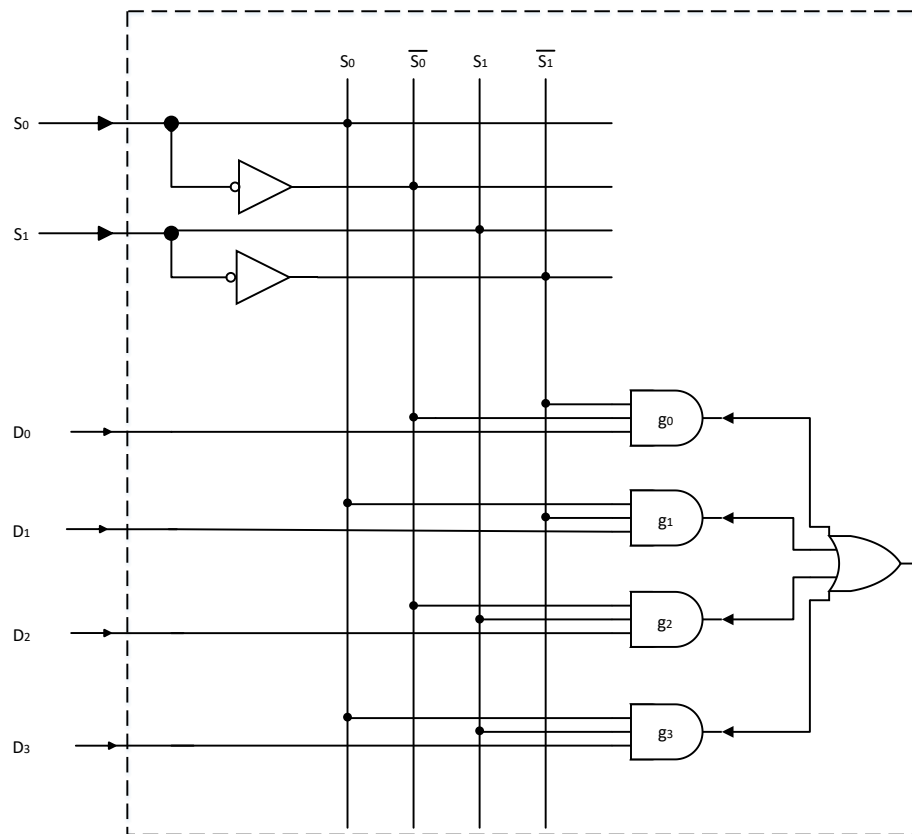
א. תרשים מלבנים

איור 6.17 מרבב 1 → 4

לפי הטבלה שבאיור 6.17, כאשר $S_1S_0 = 00$, המבוא D_0 יועבר למוצא Y, וכן הלאה.

באיור 6.18 מתואר מימוש של מרבב $4 \rightarrow 1$.

השער g_0 "מגלה" את הצירוף 00 במבואות S_1S_0 , השער g_1 – את הצירוף 01, וכך הלאה. כאשר המבואות S_1S_0 הם במצב 00, אזי שני המבואות השמאליים של השער g_0 הם 1, והמבוא D_0 מועבר למוצא השער g_0 ($1 \cdot 1 \cdot D_0 = D_0$). במצב זה, מוצאי שאר שערי ה-AND (g_3, g_2, g_1) הם 0, ולכן במוצא Y מתקבל D_0 ($D_0 + 0 + 0 + 0 = D_0$). כאשר $S_1S_0 = 01$, השער g_1 מעביר למוצאו את D_1 , מוצאי שאר השערים הם 0 ובמוצא Y מתקבל D_1 , וכן הלאה.



איור 6.18 מימוש של מרבב 1 → 4 באמצעות שערים

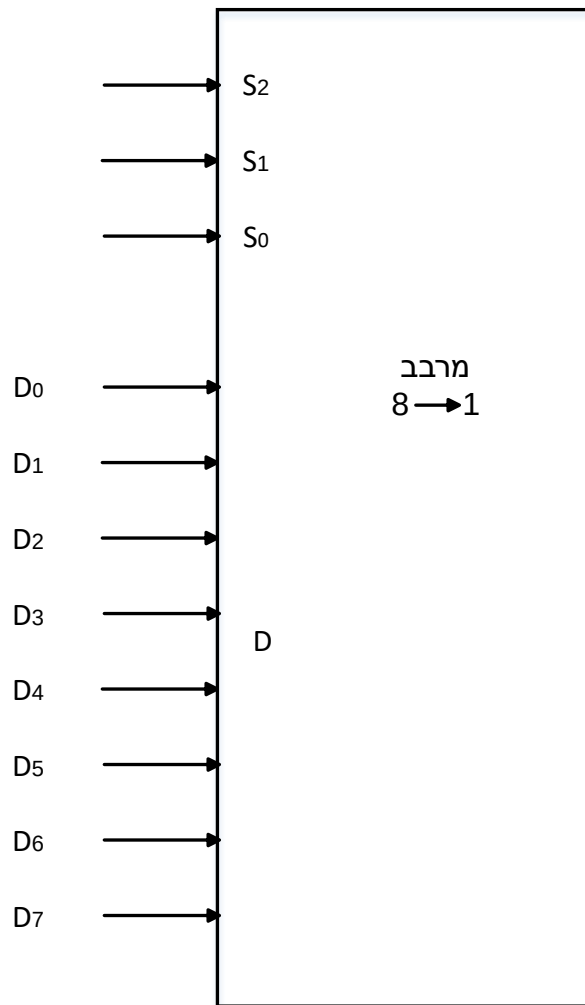
תרגול

שאלה 6.10

להלן מובא תרשים מלבנים של מרבב 1 → 8 (איור 6.19).

א. מדוע יש למרבב זה שלושה מבואות ברירה $S_2 S_1 S_0$?

ב. ממשו את המרבב באמצעות שערים.



איור 6.19 תרשים מלבנים של מרבב $8 \rightarrow 1$

שאלה 6.11

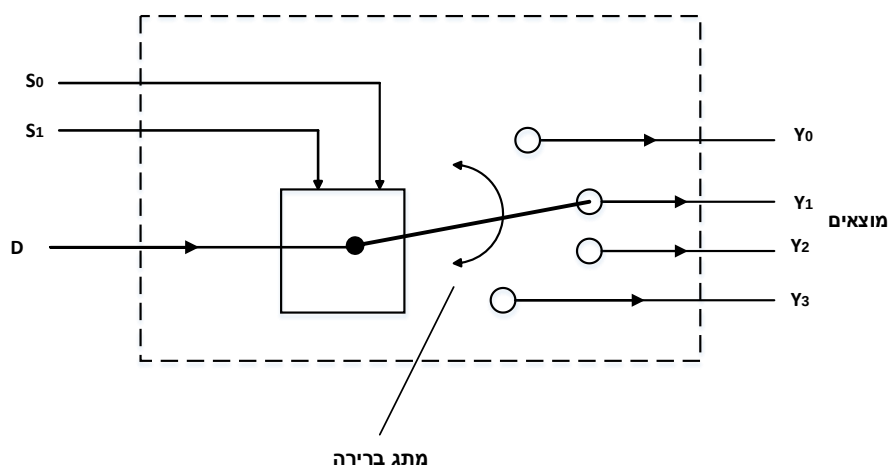
- א.** כמה מבואות ברירה דרושים למרבב בעל 32 מבואות נתונים?
- ב.** הנדסאי שבנה מרבב $32 \rightarrow 1$, באמצעות מעגלים משולבים, נתקל בקשיים מרובים והתלונן עליהם באוזני חברו לעבודה (העתיקו למחברת והשלימו את החסר):
- "עלי למצוא מעגל משולב המכיל שערי AND בעלי _____ מבואות".
 - "עלי למצוא מעגל משולב המכיל שערי NOT בעלי דרגת העמסה של לפחות _____".
 - "עלי למצוא מעגלים משולבים, שבעזרתם אממש פעולת OR בין _____ מבואות".

6.4.2 מפלגים (Demultiplexers)

המפלג הוא מערכת צירופים המפלגת (מנתבת) מבוא נתונים אחד, ומעבירה את ערכו לאחד מתוך כמה מוצאים.

מתוך שמה האנגלי של המערכת קל להבחין בקשר שבין מרבב למפלג. למעשה המפלג (demultiplexer) מבצע את הפעולה ההפוכה לזו של המרבב (multiplexer). המרבב שימושי במערכות שדורשות העברת נתונים מכמה מקורות ליעד אחד, ואילו המפלג שימושי כאשר דרוש להעביר נתונים ממקור אחד - לכמה יעדים.

פעולת המפלג נקראת פילוג (demultiplexing) והיא מתוארת באיור 6.20.



איור 6.20 תיאור פעולת המפלג

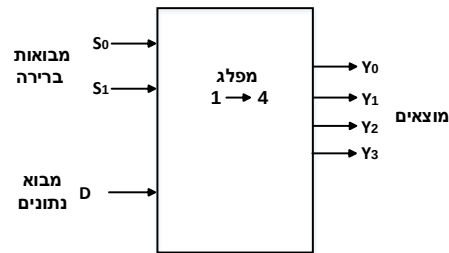
למפלג שבאיור 6.20 מבוא מידע אחד – D . בהתאם לצירוף מבואות הברירה S_1S_0 , מנותב המבוא D אל אחד מבין ארבעת המוצאים Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 . מפלג זה נקרא **מפלג $1 \rightarrow 4$** . המספר משמאל לחץ (1) מציין את מספר מבואות הנתונים, והמספר מימין לחץ (4) מציין את מספר המוצאים.

באיור 6.21 א מובא תרשים מלבנים של מפלג $1 \rightarrow 4$, ובאיור 6.21 ב מובאת טבלה המתארת את פעולת המפלג בהתאם למצב מבואות הברירה S_1S_0 .

לפי הטבלה שבאיור 6.21, המבוא D מועבר בכל פעם אל אחד המוצאים Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 , בהתאם לצירוף הבינארי של מבואות הברירה S_1S_0 . באותו זמן, שאר המוצאים נמצאים ברמה לוגית 0.

מבואות הברירה		מוצאים			
S ₁	S ₀	Y ₀	Y ₁	Y ₂	Y ₃
0	0	D	0	0	0
0	1	0	D	0	0
1	0	0	0	D	0
1	1	0	0	0	D

ב. טבלה לתיאור פעולת המפלג



א. תרשים מלבנים

איור 6.21 מפלג 4 → 1

תרגול

שאלה 6.12

ממשו את המפלג באיור 6.21 באמצעות שערים.

לפי הטבלה שבאיור 6.21, מוצאיו של המפלג הנדון **פעילים בגבוה** (active high). בצורה דומה, ניתן לרשום טבלה שתתאר את פעולת מפלג שמוצאיו **פעילים בנמוך** (active low).

שאלה 6.13

רשמו טבלה שתתאר פעולת מפלג $1 \rightarrow 8$, שמוצאיו פעילים בנמוך. שימו לב שבמוצא הנבחר יתקבל הפעם $\bar{D}$ ולא D .

6.4.3 מפענחים (Decoders)

בפרקים הקודמים ראינו שניתן להצפין נתונים בצפנים בינאריים. לדוגמה, אפשר להצפין את הספרה העשרונית 6 בצופן בינארי על ידי הצירוף 0110.

לעתים דרוש להשתמש בצורה המפוענחת (מפורשת) של הנתון המוצפן. מערכת הצירופים המבצעת **פענוח** (Decoding) של המידע המוצפן נקראת **מפענח**.

פעולת המפענח דומה מאוד לפעולת המפלג ולעתים קרובות נוטים לערבב בין שני המושגים. ניתן להגדיר את המפענח כמפלג שאין לו מבוא נתונים.

לפי צירוף מבואות הברירה של המפלג מתקבל 1 במוצא אחד מסוים, ואילו שאר המוצאים הם 0- (כאשר מוצאיו פעילים בגבוה).

סימן המפענח שונה מסימון המפלג. כמפענח אנו סופרים את מבואות הברירה ואת המוצאים, בעוד שבמפלג ספרנו את מבואות הנתונים ואת המוצאים. מפענח בעל שמונה מוצאים ושלושה מבואות ברירה, למשל, ייקרא **מפענח 8 → 3** (בעוד שהמפלג הדומה נקרא **מפלג 8 → 1**).

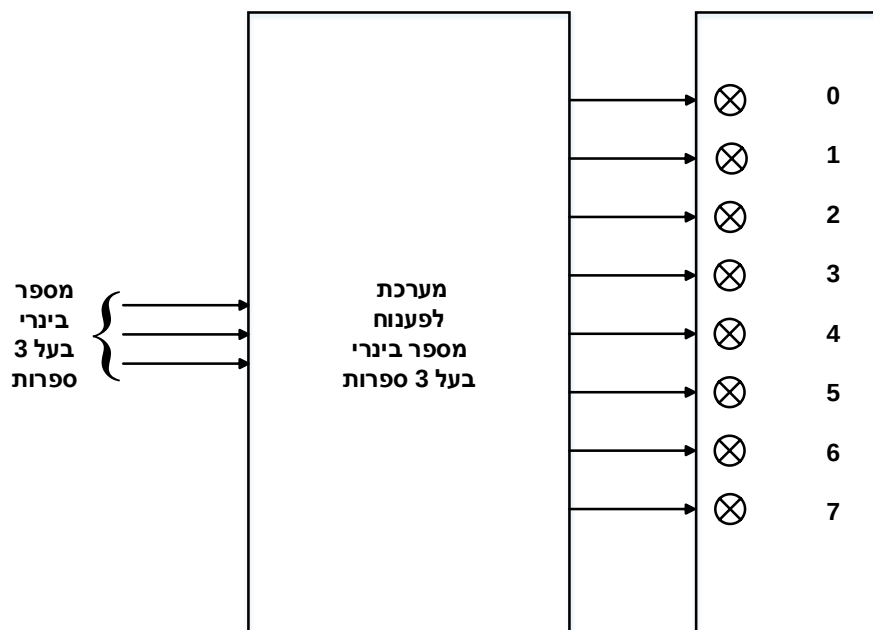
הדוגמה הבאה תמחיש את השימוש במפענח.

דוגמה 6-4

דרושה מערכת אשר במבואותיה מספר בינארי בעל שלוש סיביות. למוצא המערכת (איור 6.22)

מחוברות 8 נורות, וליד כל נורה רשומה ספרה עשרונית המייצגת את המספר הבינארי שבמבואות. להדלקת נורה דרוש לספק לה 0.

כיצד תממשו את המערכת?



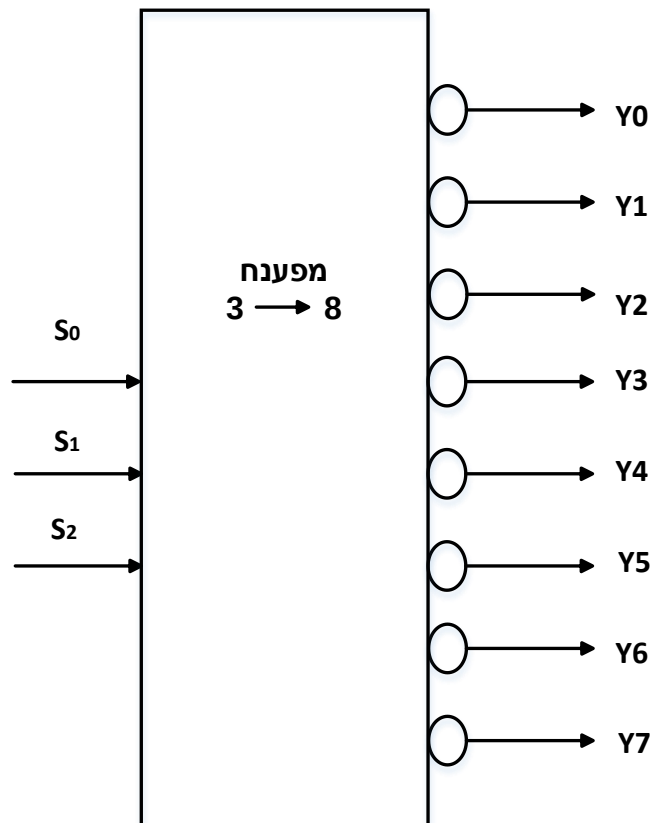
איור 6.22 מערכת לפענוח מספר בינארי בעל 3 סיביות וייצוגו באמצעות נורה

פתרון

אפשר לממש את המערכת הנדרשת באמצעות מפענח $8 \rightarrow 3$. במבואות הברירה של המפענח נספק את המספר הבינארי שיש לפענח. לפי הגדרת המערכת, הנורה תידלק אם יסופק לה 0. לכן דרוש שרק המוצא הנבחר (בהתאם למבואות הבקרה) יהיה ב-0, בעוד שאר המוצאים - שאינם נבחרים - יהיו ב-1. מוצאי המפענח צריכים אפוא להיות **פעילים בנמוך**.

תרשים של מפענח $8 \rightarrow 3$ בעל מוצאים פעילים בנמוך מופיע באיור 6.23.

העיגול במוצא מסמן היפוך, שפירושו כאן "פעיל בנמוך".



איור 6.23 תרשים של מפענח $3 \rightarrow 8$ (פעיל בנמוך)

תרגול

שאלה 6.14

ממשו באמצעות שערים את המפענח $3 \rightarrow 8$ שבאיור 6.23.

בדוגמה 4-6 התייחסנו למפענח הממיר צירוף בינארי כלשהו במבואותיו לרמה לוגית 1 באחד ממוצאיו (או רמה לוגית 0 - אם מוצאי המפענח פעילים בנמוך). קיימים סוגים שונים של מפענחים, וכל אחד מהם מיועד למטרה מוגדרת כלשהי. סוג של מפענח, שנפוץ מאוד במערכות רבות, הוא **מפענח התצוגה**.

מפענחי תצוגה (Display Decoders)

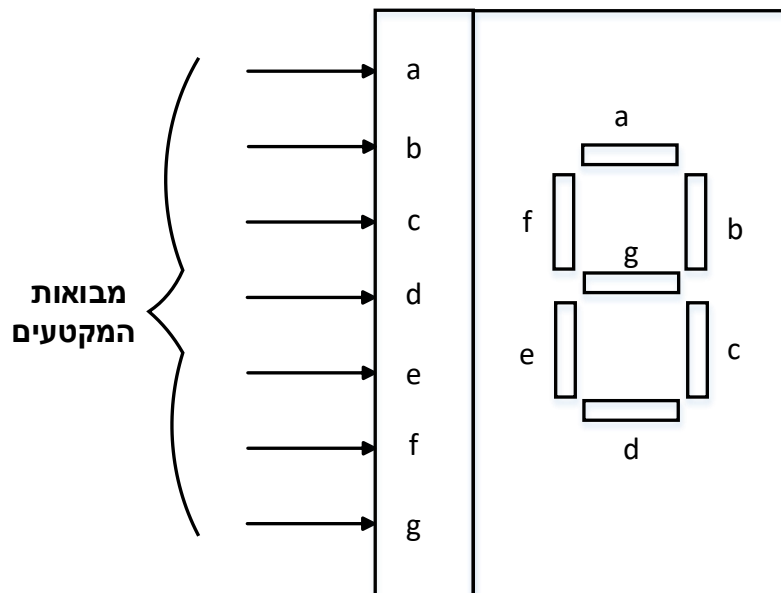
מפענחי התצוגה הם סוג מסוים של מפענחים, אשר ממירים מצופן בינארי מסוים לצופן אחר המתאים לתצוגה על התקן תצוגה מיוחד.

קיימים כמה סוגים של מפענחי תצוגה, אך בסעיף זה נדון בסוג אחד, הנפוץ ביותר. לצורך דיון זה נקדים ונתאר בקצרה התקן תצוגה שנקרא **תצוגת שבעת מקטעים** (Seven Segment Display).

התצוגה מורכבת משבעה מקטעים ישרים. מקטעים אלה מסומנים באותיות: a, b, c, d, e, f, g . (איור 6.24).

לכל מקטע יש מבוא אחד המסומן באותה אות שמסומן המקטע (למשל – למקטע a יש מבוא המסומן a).

רמה לוגית 0 במבוא של מקטע מסוים תגרום למקטע להאיר, ואילו רמה לוגית 1 תשאיר את המקטע כבוי (המקטע פעיל בנמוך).*



איור 6.24 תרשים של תצוגת שבעה מקטעים

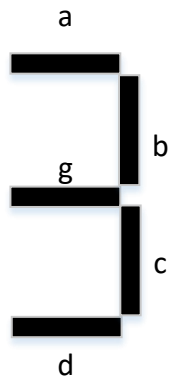
דוגמה 6-5

מצאו את הרמות הלוגיות הדרושות במבואות המקטעים כדי להציג את הספרה 3.

* כל אחד מהמקטעים בתצוגה בנוי מנורת LED (Lightening Debag), רכיב שנלמד במסגרת הקורס "אלקטרוניקה תקבילית וספרתית". לרכיב שני הדקים: אחד הנקרא אנודה, והשני נקרא קתודה. כאשר מפעילים את המקטע באמצעות חיבור 0 להדק המתאים, הרכיב הוא מסוג אנודה משותפת. קיימים רכיבים אחרים מאלו המופיעים בספר זה – רכיבים מסוג קתודה משותפת, שמופעלים באמצעות חיבור '1' למקטע המתאים.

פתרון

הספרה 3 תוצג כאשר יאירו המקטעים הבאים:



איור 6.25

כדי שמקטע מסוים יאיר, דרושה רמה לוגית 0 במבוא (פעיל בנמוך). הרמות הלוגיות הדרושות להצגת הספרה 3 יהיו כמתואר באיור 6.26.

מקטע	a	b	c	d	e	f	g
רמה לוגית	0	0	0	0	1	1	0

איור 6.26 הרמות הלוגיות הדרושות להצגת הספרה 3 (פעיל בנמוך)

 תרגול

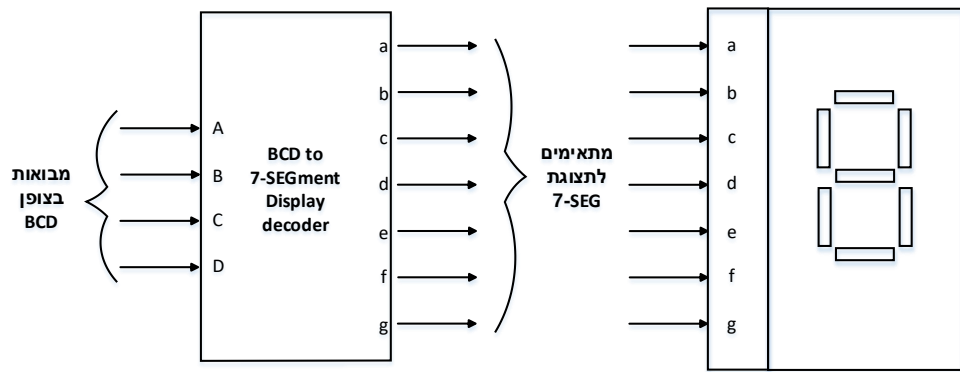
שאלה 6.15

הסבירו מהן הרמות הלוגיות הדרושות במבואות של שבעת המקטעים כדי להציג את הספרה 2?

כדי להציג את הספרות העשרוניות בתצוגת שבעה המקטעים, נהוג להשתמש במפענח מיוחד. מפענח זה מקבל במבואותיו ספרה עשרונית, המוצפנת בצופן BCD^{**}, ומפיק במוצאיו את הרמות הלוגיות הדרושות להצגת הספרה הנדרשת.

מפענח כזה נקרא **מפענח מצופן BCD לתצוגת שבעה מקטעים** (איור 6.27).

^{**} צופן BCD נלמד בהרחבה בפרקים הקודמים.



איור 6.27 מפענח מצופן BCD לתצוגת שבעה מקטעים

באיור 6.28 מופיעה טבלת האמת של המפענח.***

מבואות (בצופן BCD)				מוצאים מתאימים לתצוגת שבעה מקטעים							הספרה המוצגת
D	C	B	A	a	b	c	d	e	f	g	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	2
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	3
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	4
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	5
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	6
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	7
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	9

איור 6.28 טבלת אמת למפענח מצופן BCD לתצוגת שבעה מקטעים

עשרת צירופי המבואות המופיעים בטבלה באיור 6.28 מתאימים לספרות העשרוניות 0-9 בצופן BCD. חמשת הצירופים האחרים של המבואות (10-15) אינם מוגדרים בצופן BCD, ולכן אינם מופיעים בטבלה. צירופים אלה מוגדרים כצירופי ברירה (don't care).

דוגמה 6-6

מצאו מהי הפונקציה המתארת את המוצא a של מפענח התצוגה, וממשו אותה.

פתרון

המוצא a מקבל את הערך 1 עבור צירופי המבואות המתאימים לספרות העשרוניות 1, 4 ו-6. נרשום במפת קרנו את הצירופים האלה, ואת צירופי הברירה האופייניים לקוד BCD (איור 6.29).

*** המקטעים שיאירו בכל פעם הם אלה שמקבלים במבואותיהם רמה לוגית 0 (פעילים בנמוך).

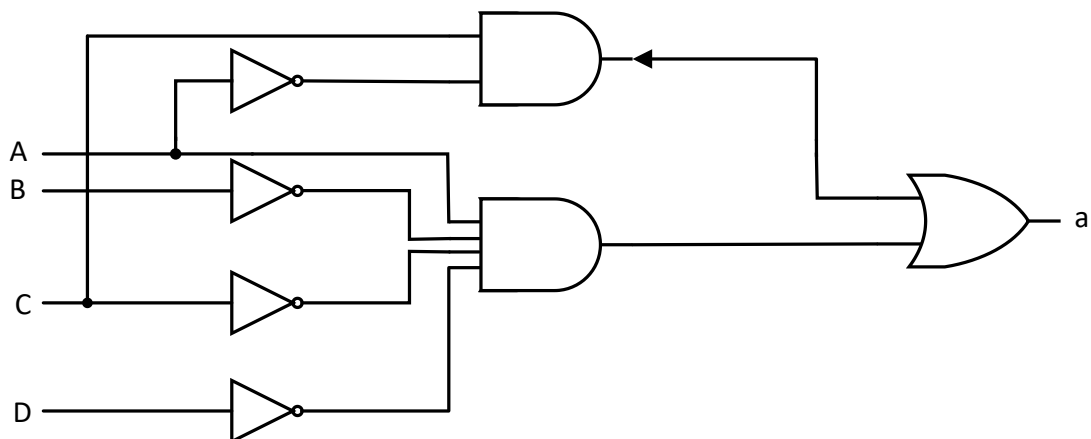
		DC			
		00	01	11	10
BA	00	0 0	4 1	12 ϕ	8 0
	01	1 ①	5 0	13 ϕ	9 0
	11	3 0	7 0	15 ϕ	11 ϕ
	10	2 0	6 1	14 ϕ	10 ϕ

איור 6.29 מפת קרנו עבור המוצא a

ומכאן, פונקציית המוצא a היא

$$a = C\bar{A} + \bar{D}\bar{C}\bar{B}A$$

מימוש הפונקציה מתואר באיור 6.30.



איור 6.30 מימוש הפונקציה a

שאלה 6.16

מצאו את הפונקציה המתארת את המוצא c , וממשו אותה.

בסעיף זה מימשנו את המוצאים a ו- c .

להשלמת הבנייה של מפענח התצוגה יש לממש באופן דומה את הפונקציות המתאימות לכל שאר המקטעים. בתום תהליך המימוש תתקבל המערכת השלמה שתוארה באיור 6.27.

6.4.4 מקודדים (Encoders)

כדי לתאר מהם מקודדים, נחזור ונזכיר כיצד פועלים המפענחים שנדונו בסעיף הקודם. למפענח n מבואות ו- 2^n מוצאים. המספר המיוצג על ידי n הסיביות, במבוא המפענח ברגע מסוים, קובע את מספרו של המוצא (היחיד) הפעיל באותו פרק זמן. המקודד מבצע פעולה הפוכה לזו של המפענח.

למקודד $n \rightarrow 2^n$ יש n מוצאים ו- 2^n מבואות נתון. ברגע מסוים, מבוא נתון אחד ויחיד פעיל וכל יתר המבואות אינם פעילים. במוצאי המקודד מופיעה באותו פרק זמן הכתובת הבינארית המתאימה למבוא הפעיל.

דוגמה לתרשים מלבנים של מקודד $4 \rightarrow 2$ בעל ארבעה מבואות ושני מוצאים, מתוארת באיור 6.31א. באיור 6.31ב מופיעה טבלה המתארת את פעולת המקודד בהתאם למצב הנתון $D_3D_2D_1D_0$.



ב. טבלה לתיאור פעולת המקודד

א. תרשים מלבנים

איור 6.31 מקודד $4 \rightarrow 2$

דוגמה 6-7

נתון שהמבואות של המקודד באיור 6.31 הם $D_3D_2D_1D_0 = 0100$.

מהם מוצאי הכתובת A_1, A_0 ?

פתרון

המבוא הפעיל מבין ארבעת המבואות הוא D_2 , ואילו יתר המבואות אינם פעילים. במוצאי המקודד תופיע, אם כן, הכתובת הבינארית המתאימה למספר 2, כלומר

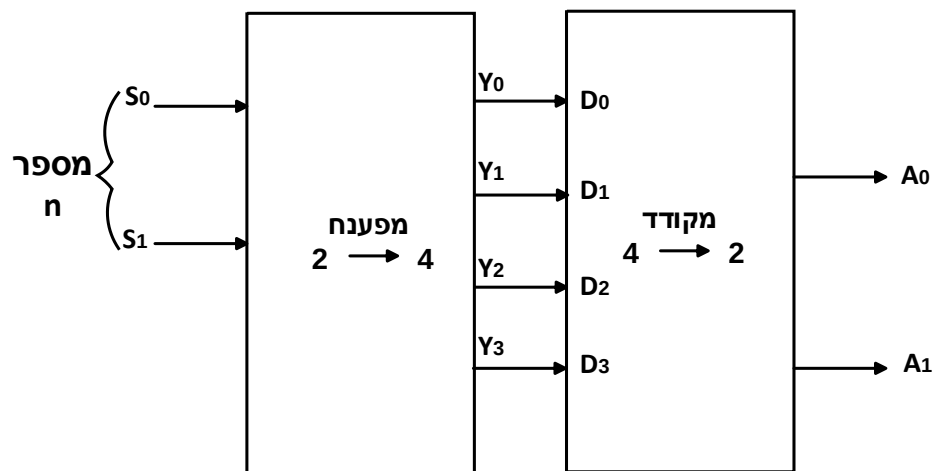
$$A_1, A_0 = 10$$



שאלה 6.17

באיור 6.32 מחוברים בהתאמה המוצאים של המפענח $2 \rightarrow 4$ לארבעת המבואות של מקודד $4 \rightarrow 2$. המבואות והמוצאים של המפענח והמקודד פעילים בגבוה.

מה יהיו המוצאים A_1, A_0 של המקודד עבור ארבעת הצירופים השונים במבואות המפענח S_1, S_0 ?



איור 6.32 איור לשאלה 6.17

1.5 מימוש פונקציות בוליאניות באמצעות מרבבים ומפענחים

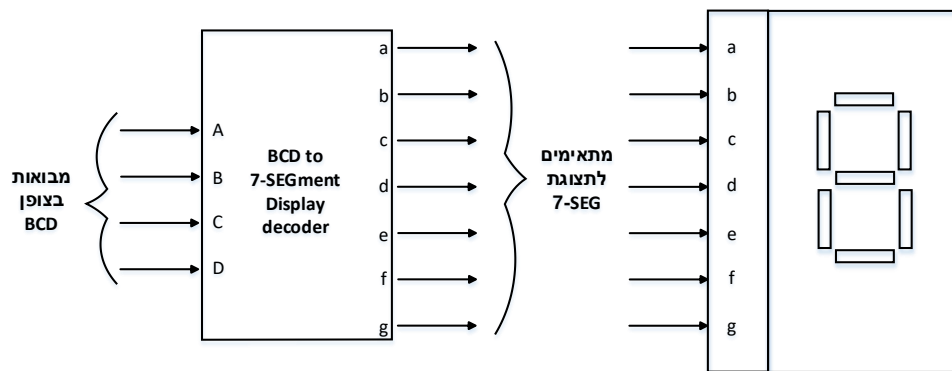
אפשרות נוספת הטמונה במרבבים ובמפלגים היא מימוש פונקציות בוליאניות. תחילה נראה כיצד ניתן לממש פונקציה בוליאנית של n משתנים באמצעות מרבב בעל n מבואות ברירה בצורה ישירה. בהמשך נראה כיצד ניתן לממש אותה פונקציה באמצעות מפלג בעל n מבואות ברירה.

1.5.1 מימוש פונקציות באמצעות מרבבים

מימוש פונקציה בעזרת מרבב מתבסס על הגישה הבאה:

פונקציה בוליאנית בעלת n משתנים קובעת את ערך המוצא - 0 או 1 - לכל אחד מ- 2^n הצירופים האפשריים של המשתנים. אבל מרבב בעל n מבואות ברירה מנתב למוצאו אחד מבין 2^n מבואות הנתונים, על פי הצירופים האפשריים של מבואות הברירה. אם נחבר למבואות הברירה את משתני הפונקציה, ולמבואות הנתונים - את ערכי הפונקציה המתאימים לצירופים השונים של המשתנים - נקבל במוצא ערכים אלו, בהתאם לצירוף שיופיע במבואות הברירה.

להדגמת השיטה, נראה להלן מימוש חלק ממפענח התצוגה להתקן שבעה מקטעים שהוסבר בסעיף 6.4.3. מבואות מפענח התצוגה הם ארבע סיביות A, B, C, D בצופן BCD, ומוציאו הם הפונקציות $a-g$, המשמשות מבוא ליחידת התצוגה המתוארת באיור 6.33.



איור 6.33 מפענח תצוגה מצופן BCD לתצוגת שבעה מקטעים

כזכור, רמה לוגית 0 במבוא המתאים למקטע מסוים תגרום להארת המקטע, ואילו רמה לוגית 1 תשאיר את המקטע כבוי.

טבלת האמת למפענח התצוגה מובאת באיור 6.34.

עשרוני	מבואות (בצופן BCD)				מוצאים מתאימים לתצוגת שבעה מקטעים							הספרה המוצגת
	D	C	B	A	a	b	c	d	e	f	g	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	2
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	3
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	4
5	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	5
6	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	6
7	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	7
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
9	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	9
10	1	0	1	0								צירופי ברירה
11	1	0	1	1								
12	1	1	0	0								
13	1	1	0	1								
14	1	1	1	0								
15	1	1	1	1								

איור 6.34 טבלת אמת למפענח מצופן BCD לתצוגת שבעה מקטעים (המקטעים פעילים בנמור)

דוגמה 6-8

ממשו באמצעות מרבב את הפונקציה הבוליאנית של המקטע d בתצוגת שבעה מקטעים.

פתרון

נכנה גם את הפונקציה בשם d . טבלת האמת של הפונקציה d נתונה באיור 6.35. ניתן לרשום את הפונקציה בתלות ב-4 משתנים גם בייצוג מספרי.

$$d(A, B, C, D) = \Sigma(1, 4, 7, 9) + \Sigma_x(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

כפי שציינו בתחילת הסעיף, למימוש פונקציה של 4 משתנים נשתמש במרבב בעל 4 מבואות ברירה S_0, S_1, S_2, S_3 , כלומר במרבב $16 \rightarrow 1$.

באיור 6.35 תמצאו את אופן המימוש של פונקציית המקטע d באמצעות מרבב $16 \rightarrow 1$ (שמוצאו פעיל בגבוה).

						A	—	S_3
						B	—	S_2
						C	—	S_1
						D	—	S_0
עשרוני	A	B	C	D	d			
0	0	0	0	0	0			I_0
1	0	0	0	1	1			I_1
2	0	0	1	0	0			I_2
3	0	0	1	1	0			I_3
4	0	1	0	0	1			I_4
5	0	1	0	1	0			I_5
6	0	1	1	0	0			I_6
7	0	1	1	1	1			I_7
8	1	0	0	0	0			I_8
9	1	0	0	1	1			I_9
10	1	0	1	0	X	X	—	I_{10}
11	1	0	1	1	X	X	—	I_{11}
12	1	1	0	0	X	X	—	I_{12}
13	1	1	0	1	X	X	—	I_{13}
14	1	1	1	0	X	X	—	I_{14}
15	1	1	1	1	X	X	—	I_{15}

א. טבלת אמת

ב. מימוש

איור 6.35 מימוש פונקציית המקטע d באמצעות מרביב 1 → 16

למבואות הברירה של המרביב נחבר את משתני הפונקציה בסדר המתאים, כלומר: המשתנה A יחובר ל- S_3 , B יחובר ל- S_2 , וכך הלאה.

מוצא המרביב Y יהיה הפונקציה הבוליאנית של המשתנים (הפונקציה d בדוגמה שלנו). כיוון שאנו חופשיים לבחור את מבואות הנתונים I_i למרביב, הרי שבאמצעות חיבור 0 או 1 למבואות I_i נוכל לממש טבלת אמת כרצוננו, או, במילים אחרות, להרכיב כל פונקציה בוליאנית נתונה שמספר משתניה כמספר מבואות הברירה.

מבואות הנתונים $I_9 - I_0$ חוברו ל-0 או 1, לפי טבלת האמת שבאיור 6.35, כך שעבור כל אחד מצירופי הברירה – רמת המוצא Y שווה לרמה הדרושה של d . הפונקציה d אינה מוגדרת עבור הערכים שבין 10 ל-15. לכן אנו רשאים לחבר את המבואות $I_{15} - I_{10}$ לרמה לוגית 0 או 1, כרצוננו. מבואות אלו לכן חוברו ל- X , כלומר צירוף ברירה (0 או 1).

נבחן את המימוש המתואר באיור 6.35 בעזרת דוגמה:

עבור הצירוף $ABCD = 0000$ מתקבל בטבלת האמת הערך $d = 1$. מכיוון שמשתני הפונקציה מחוברים ל- S_0, S_1, S_2, S_3 , בהתאמה, הרי שמתקבל הצירוף הבינארי 0000, הגורם לבחירת המבוא I_0 . במוצא מתקבל I_0 , כלומר הערך 0, כפי שדרוש:

$$d = I_0 = 0$$



שאלה 6.18

ממשו את הפונקציה הבאה של 3 משתנים באמצעות מרבב מתאים

$$f(x, y, z) = xy + \bar{y}z$$

רמז: רשמו תחילה את טבלת האמת של הפונקציה.

1.5.2 מימוש פונקציות באמצעות מפלגים [מפענחים]

מימוש פונקציה באמצעות מפענח מתבסס על הגישה הבאה:

פונקציה בוליאנית בעלת n משתנים קובעת את ערך המוצא - 0 או 1 - לכל אחד מ- 2^n הצירופים האפשריים של המשתנים.

מאידך, למפענח בעל n מבואות ו- 2^n מוצאים יש מוצא אחד פעיל, בהתאם לצירוף במבואות הברירה. אם נחבר למבואות הברירה של המפענח את משתני הפונקציה ואת המוצאים המתאימים לשער OR, נוכל לממש פונקציה של n משתנים באמצעות מפענח, כפי שנראה בדוגמה הבאה.

דוגמה 6-9

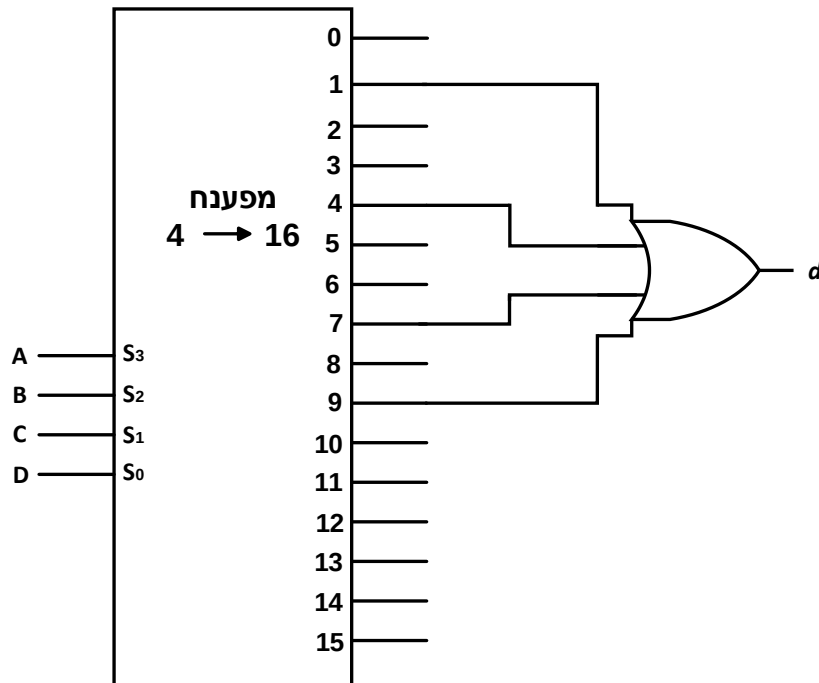
ממשו את פונקציית המקטע d של המפענח לתצוגת שבעה מקטעים באמצעות מפענח.

פתרון

טבלת האמת של פונקציית המקטע d מתוארת באיור 6.35. למימוש דרוש מפענח $4 \rightarrow 16$ (מאחר שיש לממש פונקציה של ארבעה משתנים). למבואות הבקרה של המפענח נחבר את ארבעת המשתנים של פונקציית המקטע $d(A, B, C, D)$, כמתואר באיור 6.36.

כאשר יופיע במבואות המפענח צירוף המייצג מספר בינארי מסוים, יהיה מוצאו מתאים לאותו צירוף ב-1, וכל שאר המוצאים יהיו ב-0.

$$d(A, B, C, D) = \Sigma(1,4,7,9) + \Sigma_x(10,11,12,13,14,15)$$



איור 6.36 מימוש פונקציית המקטע d באמצעות מפענח $4 \rightarrow 16$

מטבלת האמת של הפונקציה נובע שעבור המבואות 1, 4, 7 ו-9 דרוש $d = 0$ (למעשה עבור צירופי המבוא מ-10 עד 15, d יכול לקבל ערך כלשהו, כיוון שצירופים אלו אינם מופיעים במבוא המתאר מספר בצופן BCD). את מוצאי המפענח 1, 4, 7 ו-9* נחבר לשער OR, שתפוקתו היא הפונקציה d . כאשר יופיע אחד מארבעת צירופים אלה (1, 4, 7, או 9) במבואות המפענח, יהיה המוצא המתאים ב-1, ולכן במוצא השער OR יתקבל 1, כדרוש.

* הצירוף 1 במבואות (0001) מייצג את המכפלה הקנונית $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$. הצירוף 4 (0100) את $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ וכדומה.

שאלה 6.20

- א. ממשו את פונקציית המקטע d באמצעות המפענח $16 \rightarrow 4$ שמוציא פעילו בנמוך.
- ב. ממשו את פונקציית המקטע f באמצעות המפענח $16 \rightarrow 4$ שמוציא פעילו בנמוך.
- ג. לכמה מפענחים $16 \rightarrow 4$, ולכמה שערים תזדקקו למפענח לתצוגת שבעה מקטעים?

ראינו כי ניתן לממש פונקציות צירופיות בעזרת מרבבים ומפענחים. למימוש פונקציה יחידה עדיף להשתמש במרבב (מעגל משולב יחיד). למימוש פונקציות אחדות של אותם משתנים עדיף שימוש במפענח. בהנחה שאין בעיות העמסה, נחוץ שער יחיד לכל פונקציה שרוצים לממש. בצורה כזו, מספר המעגלים המשולבים הדרושים למימוש עשוי להיות קטן יותר מאשר במימוש אותן פונקציות באמצעות מרבבים.

1.5.3 מגבלות במימוש פונקציות צירופיות באמצעות מרבבים

ומפלגים

מימוש פונקציה בעזרת מרבב (או מפענח) יעיל וחסכוני מאוד כאשר אפשר לממש את הפונקציה בעזרת מרבב משולב אחד (או מפענח משולב אחד ושער). המרבב המשולב הגדול ביותר הוא $16 \rightarrow 1$; למרבב זה יש ארבעה מבואות ברירה. המפענח המשולב הגדול ביותר הוא $16 \rightarrow 4$, וגם לו יש ארבעה מבואות ברירה. לעתים קרובות צריך לממש פונקציות שיש להן יותר מאשר ארבעה משתנים. במקרים אלה נצטרך להשתמש בכמה מרבבים (או בכמה מפענחים) באופן שיתואר להלן.

דוגמה 6-10

הפונקציה P (Prime) היא פונקציה של 8 משתנים המסומנים $x_7, \dots, x_1, x_0$. נתייחס לצירוף המופיע בשמונת המשתנים כאל מספר בינארי שערכו העשרוני מסומן ב- N (כלומר, הצירוף במשתני הפונקציה המייצג את המספר העשרוני N) הוא מספר ראשוני^{**}, ערך הפונקציה יהיה 1; בכל שאר המקרים ערך הפונקציה הוא 0. כמה מרבבים דרושים למימוש הפונקציה P ?

^{**} מספר ראשוני הוא מספר המתחלק בעצמו ובמספר 1 בלבד.

פתרון

הפונקציה P מתארת את המספרים הראשונים הניתנים לייצוג באמצעות 8 סיביות, כלומר שנמצאים בתחום שבין 0 ל-255.

$$P(x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum_{\text{מספרים ראשוניים}} \sum_{\text{בתחום 0 עד 255}} \\ = \sum (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots, 241)$$

↑

זה המספר הראשוני
האחרון בתחום

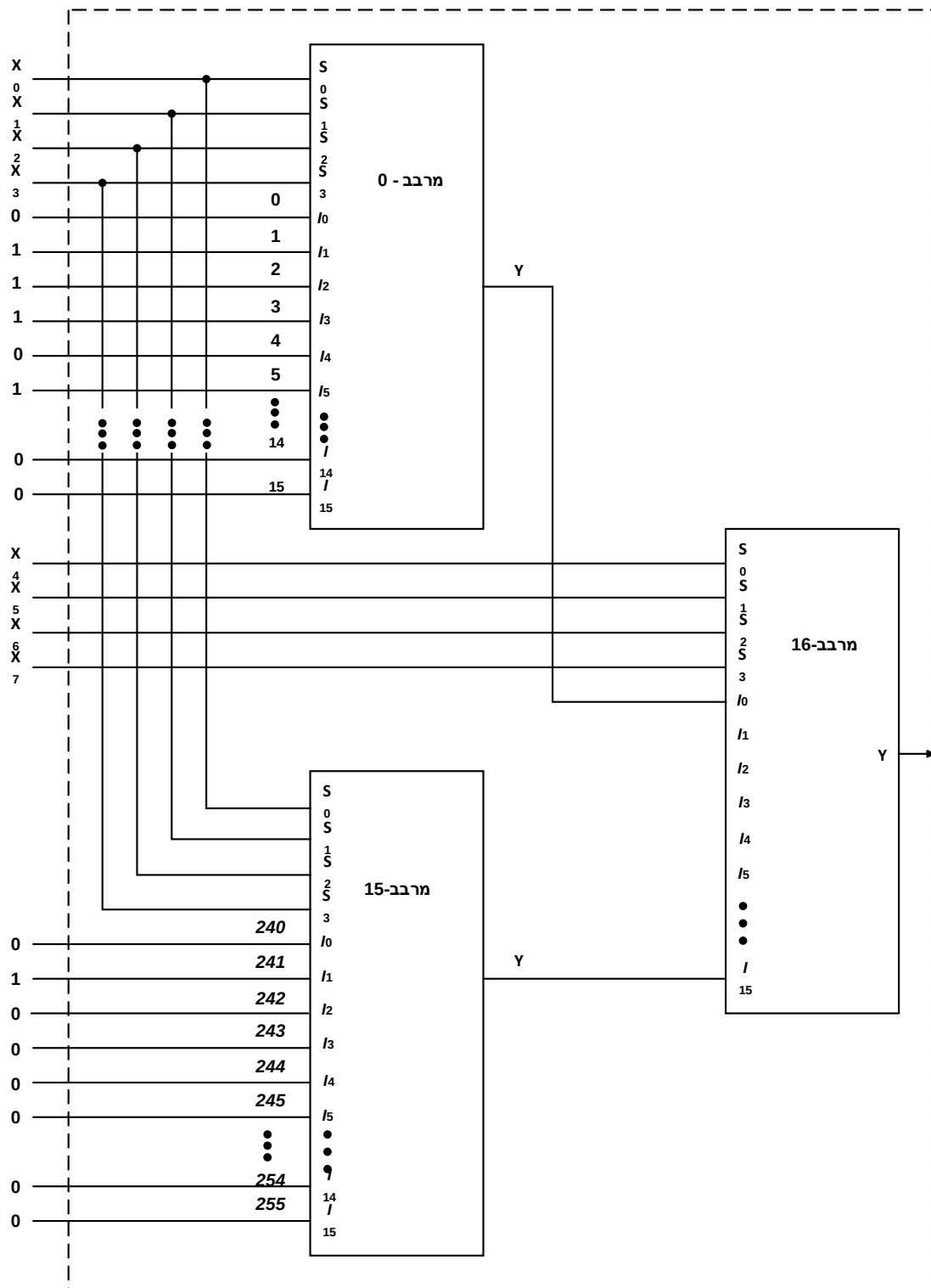
יש לבנות מערך מרבבים בעל 8 מבואות בקרה, 256 מבואות של נתון ומוצא אחד. מבנה אפשרי למערך כזה מתואר באיור 6.37*.

מערך המרבבים המתואר באיור 6.37 מורכב ממרבבים הבנויים בשתי רמות מבחינת מבואות הברירה שלהם. ברמה התחתונה יש מרבב יחיד המסומן מרבב-16; מבואות הברירה שלו הם 4 הסיביות היותר משמעותיות (MSB) של משתני הפונקציה x_6, x_5, x_4 ו- x_7 . ברמה העליונה יש 16 מרבבים המסומנים מרבב-0 עד מרבב-15. לכל המרבבים האלו יש מבואות ברירה זהים, שהם 4 הסיביות הפחות משמעותיות (LSB) של משתני הפונקציה x_2, x_1, x_0 ו- x_3 .

למשל: כאשר הצירוף במשתני הפונקציה הוא $x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0 = 00000101$ בכל המרבבים ברמה העליונה נבחר המבוא I_5 למוצא Y (כי הצירוף בארבע הסיביות הפחות משמעותיות הוא 5-בינארי); במרבב התחתון נבחר המבוא I_0 למוצא Y (כי),

אך מכיוון שמבוא זה מחובר למרבב-0, במוצא P של הפונקציה (מוצא מרבב-16 התחתון) מופיע הערך של המבוא I_5 . ערך זה הוא 1 – כנדרש לפי הפונקציה P .

* מרבב-15 שבאיור 6.37 מממש את הפונקציה $f(x_3x_2x_1x_0) = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1x_0$. לכן ניתן להמירו בשער המממש פונקציה זו. פתרון כזה יחסוך אמנם במרבבים, אך יסרביל את המערכת ויפגע באחידותה.



איור 6.37 מערך מרבבים למימוש הפונקציה q

למימוש מערך המרבבים דרושים אפוא 17 מרבבים של $16 \rightarrow 16$ (16 מרבבים ברמה הראשונה ואחד ברמה השנייה). למערך המרבבים שבאיור 6.37 יש 256 מבואות נתון, שכל אחד מהם

מתאים לצירוף בינארי מסוים בשמונת מבואות הבקרה $x_7, \dots, x_1, x_0$. כאשר מבוא הנתון המתאים מייצג מספר ראשוני, נחבר לו 1; ואם לא - נחבר לו 0.

 תרגול

שאלה 6.21

בהנחה שצירוף משתני הפונקציה הוא

$$\underbrace{x_7 x_6 x_5 x_4}_{1111} \underbrace{x_3 x_2 x_1 x_0}_{0001} = \underbrace{1111}_{1111} \underbrace{0001}_{0001}$$

מהו המבוא המועבר אל המוצא P ?

מדוגמה 6-10 ומשאלה 6.21 ברור כי מימוש פונקציה בעלת מספר משתנים גדול נעשה מסורבל מאוד כאשר משתמשים במרבבים או במפענחים משולבים*.

שאלה 6.22

ממשו מרבב $1 \rightarrow 16$ באמצעות מרבבים $1 \rightarrow 4$, והסבירו את המימוש.

 שאלות חזרה לפרק 6

שאלה 6.23

ממשו את המסכם למחצה (איור 6.2) באמצעות שערי NAND בלבד.

שאלה 6.24

מצאו מימוש למסכם המלא (איור 6.3) שיתבסס על המסכם למחצה (איור 6.1).

היעזרו במשוואות המסכם מחצה והמסכם המלא.

* נסו להעריך כיצד ייראה מערך המרבבים (או המפענחים) עבור פונקציות של 10 משתנים ויותר.

שאלה 6.25

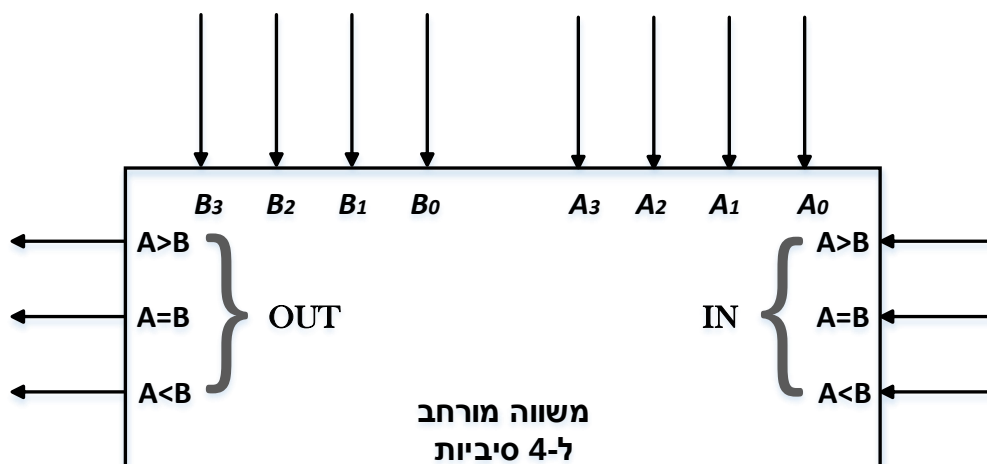
- א. ממשו את המחסר המלא באמצעות שערים, על פי משוואותיו.
 ב. השוו בין המימוש שקיבלתם בסעיף א למימוש המוצע באיור 6.9 מבחינת מספר השערים ומספר המעגלים המשולבים הדרושים.

שאלה 6.26

מצאו מימוש למחסר למחצה (איור 6.7), שיתבסס על המשווה לסיבית אחת (איור 6.10)

שאלה 6.27

נתון משווה מורחב ל-4 סיביות (איור 6.38).



יש להשוות בין המספרים X ו- Y בעלי 11 סיביות כל אחד

$$Y = Y_{10}Y_9 \dots Y_1Y_0, \quad X = X_{10}X_9 \dots X_1X_0$$

השתמשו במשווים מורחבים ל-4 סיביות.

שרטטו את המערכת הדרושה.

שאלה 6.28

תכננו מכפל בינארי לשתי מילים A ו- B , כל אחת בת שתי סיביות, כמתואר באיור 6.39.

- רשמו את טבלת האמת של המכפל.
- רשמו את ביטויה של הפונקציה f_0 (במספר מזערי של ליטרלים).
- ממשו את הפונקציה f_0 הנ"ל, באמצעות שערי NOR בלבד.

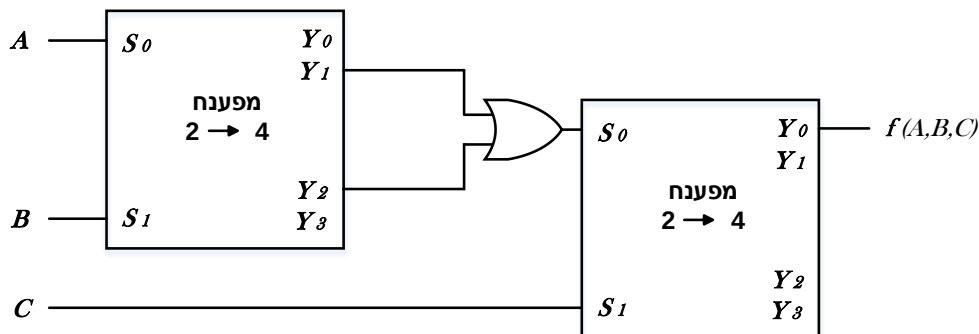


איור 6.39 מכפל לשתי מילים

שאלה 6.29

א. העתיקו למחברת את טבלת האמת של מפענח $2 \rightarrow 4$, ורשמו בה את המוצאים של המפענח כפונקציה של המבואות שלו.

S_1	S_0	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				



איור 6.40

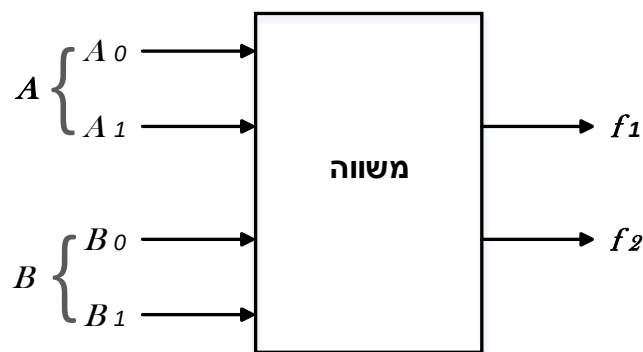
- ב. באיור 6.40 נתון תרשים של מערכת ספרתית, המבוססת על המפענח $2 \rightarrow 4$.
רשמו את ביטוייה של הפונקציה $f(A, B, C)$ כפונקציה של המבואות A, B, C .

שאלה 6.30

- א. הסבירו את ההבדלים בין מרבב $1 \rightarrow 8$ למפענח $8 \rightarrow 3$ מבחינת מבואות, מוצאים ושימושים אפשריים.
- ב. לרשותכם נתונים מפענח $8 \rightarrow 3$ ועוד 5 שערי OR בעלי 8 מבואות כל אחד.
כמה פונקציות לוגיות שונות בעלות 3 משתנים כל אחת, ניתן לממש באמצעות המפענח והשערים הנתונים?

שאלה 6.31

- א. רשמו טבלת אמת של משווה (איור 6.41) לשתי מילים בנות שתי סיביות כל אחת A ו- B .
למשווה שני מוצאים:
אם $A > B$, אז $f_1 = '1'$
אם $B > A$, אז $f_2 = '1'$
- ב. ממשו את הפונקציה f_1 באמצעות מרבב $1 \rightarrow 4$.



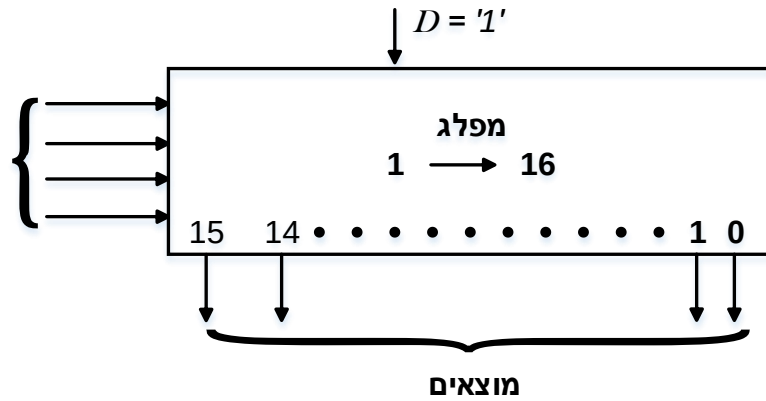
איור 6.41

שאלה 6.32

נתונה הפונקציה הלוגית:

$$f(D, C, B, A) = \Sigma(0, 2, 6, 7, 11, 13)$$

- א. רשמו את ביטוייה של הפונקציה f כסכום קנוני של מכפלות.
- ב. ממשו את הפונקציה f באמצעות מפלג (Demultiplexer) $1 \rightarrow 16$ (איור 6.42) ושער OR בעל מספר בלתי מוגבל של מבואות.



איור 6.42

שאלה 6.33

ממשו את הפונקציה

$$f_{a,b,c} = a\bar{b} + b\bar{c}$$

בעזרת מפענח $3 \rightarrow 8$ ושער נוסף.

שאלה 6.34

באיור 6.43 נתון תרשים עקרוני של מרבב לוגי $1 \rightarrow 4$.

פעולת ההדק CS ניתנת לתיאור כדלקמן:

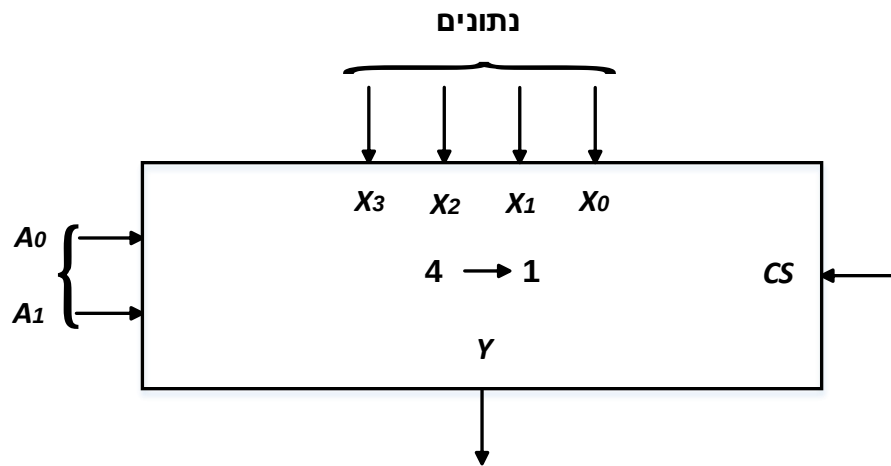
כאשר $CS='0'$, אז $Y='0'$ ללא תלות בשאר המבואות.

כאשר $CS='1'$, אז Y תלוי בשאר המבואות.

א. שרטטו תרשים של המבנה הפנימי של המרבב הנתון העשוי משערים לוגיים.

ב. ממשו את הפונקציה הלוגית הבאה באמצעות מרבבים $1 \rightarrow 4$ ושערים לוגיים.

$$f(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 3, 5, 7)$$



איור 6.43

שאלה 6.35

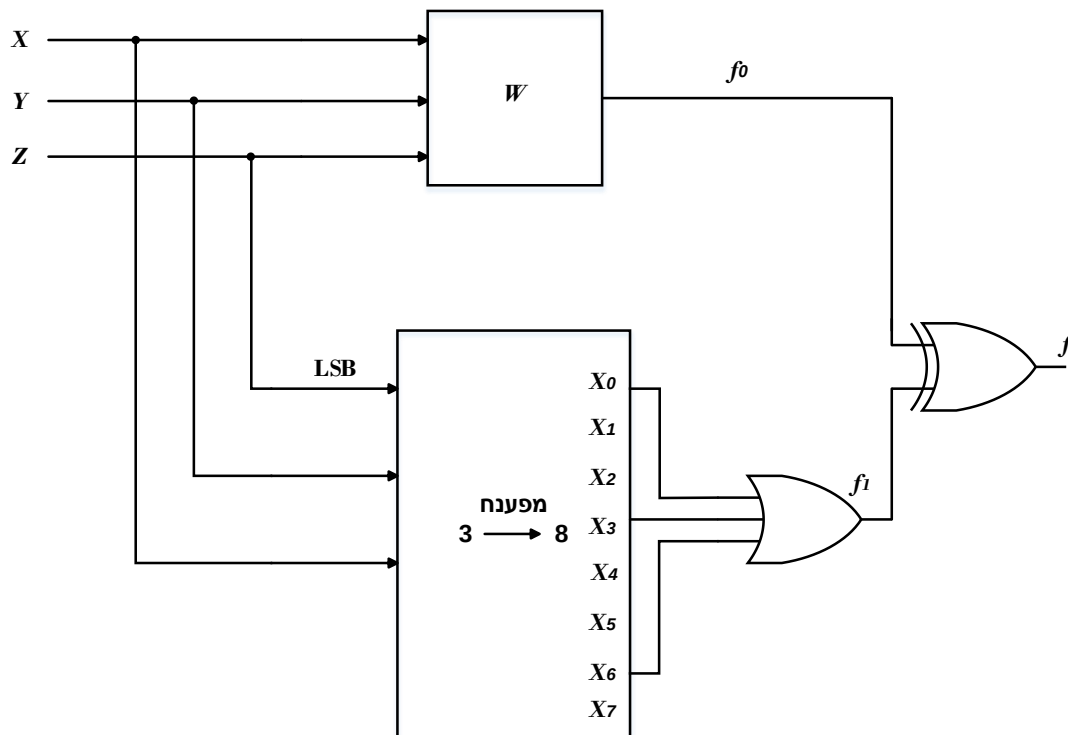
במערכת שבאיור 6.44 מוגדרת מערכת הצירופים W באמצעות טבלת האמת שלהלן:

X	Y	Z	f_0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

א. רשמו ביטויים של הפונקציה f_0 כסכום קנוני של מכפלות בתלות ב- X, Y, Z , ומצאו ביטויים במינימום ליטרלים.

ב. רשמו ביטויים של הפונקציה f_1 כסכום קנוני של מכפלות, ומצאו ביטויים במינימום ליטרלים.

ג. רשמו ביטויים (במינימום ליטרלים) של הפונקציה f .



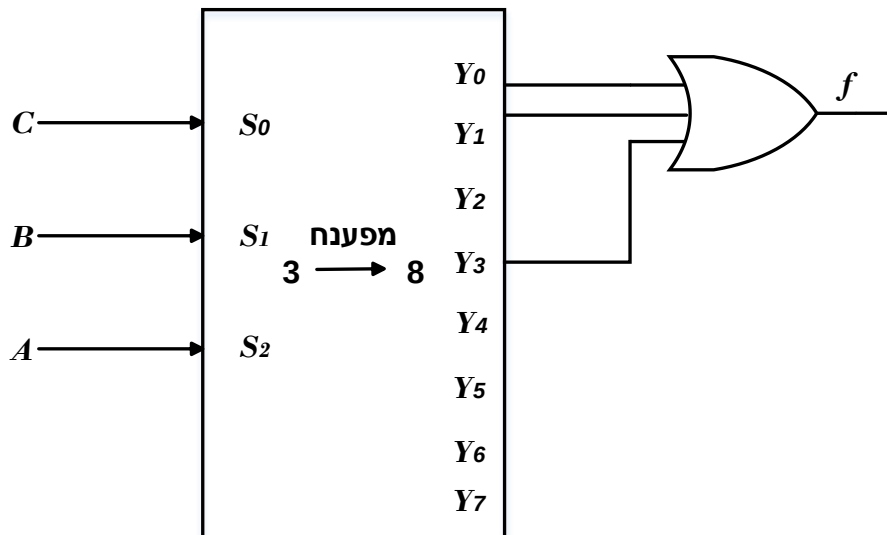
איור 6.44

שאלה 6.36

באיור 6.45 נתונה מערכת ספרתית הממומשת באמצעות מפענח $3 \rightarrow 8$.

א. רשמו את טבלת האמת של הפונקציה f בתלות במשתנים A, B, C .

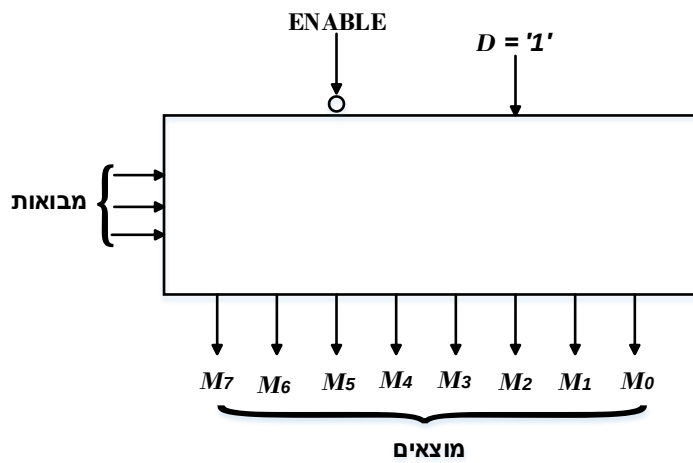
ב. ממשו את הפונקציה f שבסעיף א באמצעות מרבב $1 \rightarrow 8$.



איור 6.45

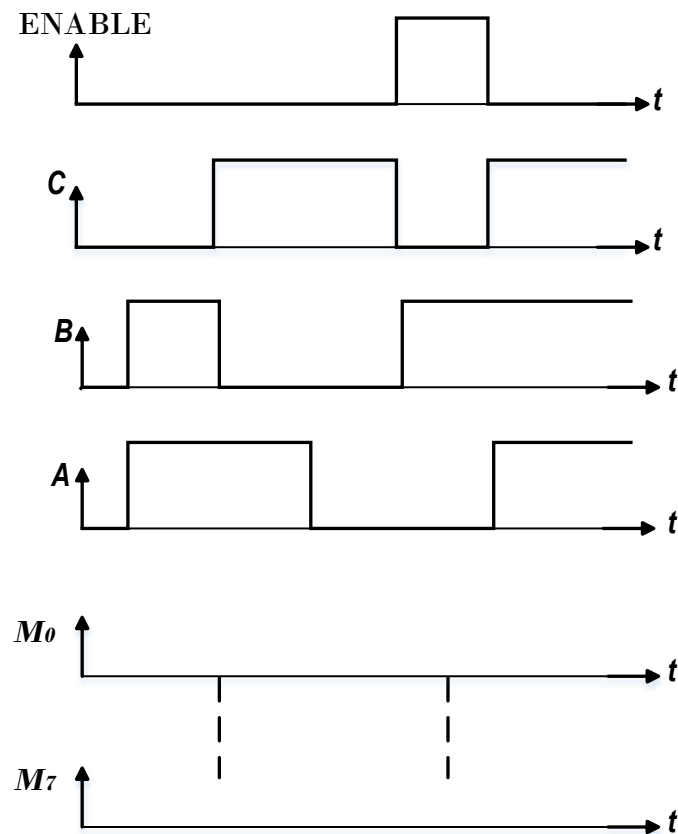
שאלה 6.37

באיור 6.46 נתון התרשים העקרוני של מנתב לוגי (Demultiplexer) מסוג "1 מתוך 8" ("1 out of 8" type).



איור 6.46

באיור 6.47 נתונות צורות הגלים של המבואות השונים של המנתב הנתון. העתיקו למחברת את איור 6.47 והשלימו את צורת האותות במוצאים $M_7 - M_0$.



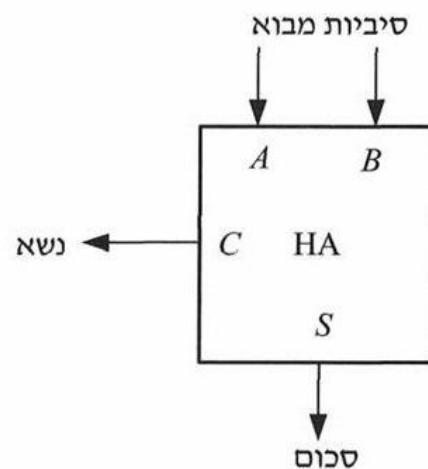
איור 6.47

תרגול מעשי לפרק 6

משימה 6.38

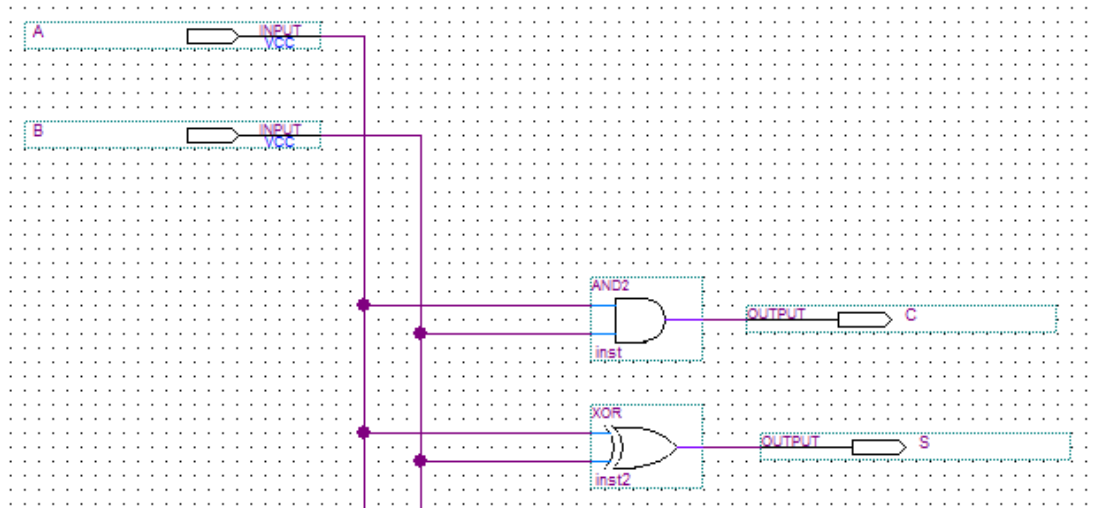
- שרטטו בתוכנה מימוש בשערים של מחבר חסר HA
- בדקו בדיאגרמת זמן את פעולתו לכל האפשרויות בין הכניסות
- הפכו את המחבר החסר ששרטטתם לאחר בדיקה למיבנית\SYMBOL לטובת יצירת רכיב לשימוש עתידי.

מחבר A	מחבר B	נשא c	סכום S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

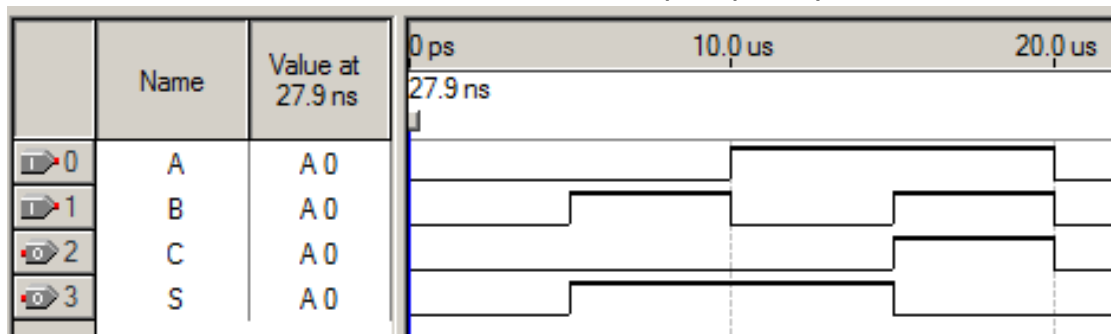


פתרון משימה 6.38

א. שרטוט מערכת השערים למימוש המחבר החסר – חשוב מאוד לקרוא לקובץ בשם המערכת, כדי שנוכל בהמשך למצוא ולהשתמש במערכת שכבר בנינו ובדקנו.



ב. דיאגרמת זמן לבדיקת תקינות פעולת המחבר החסר

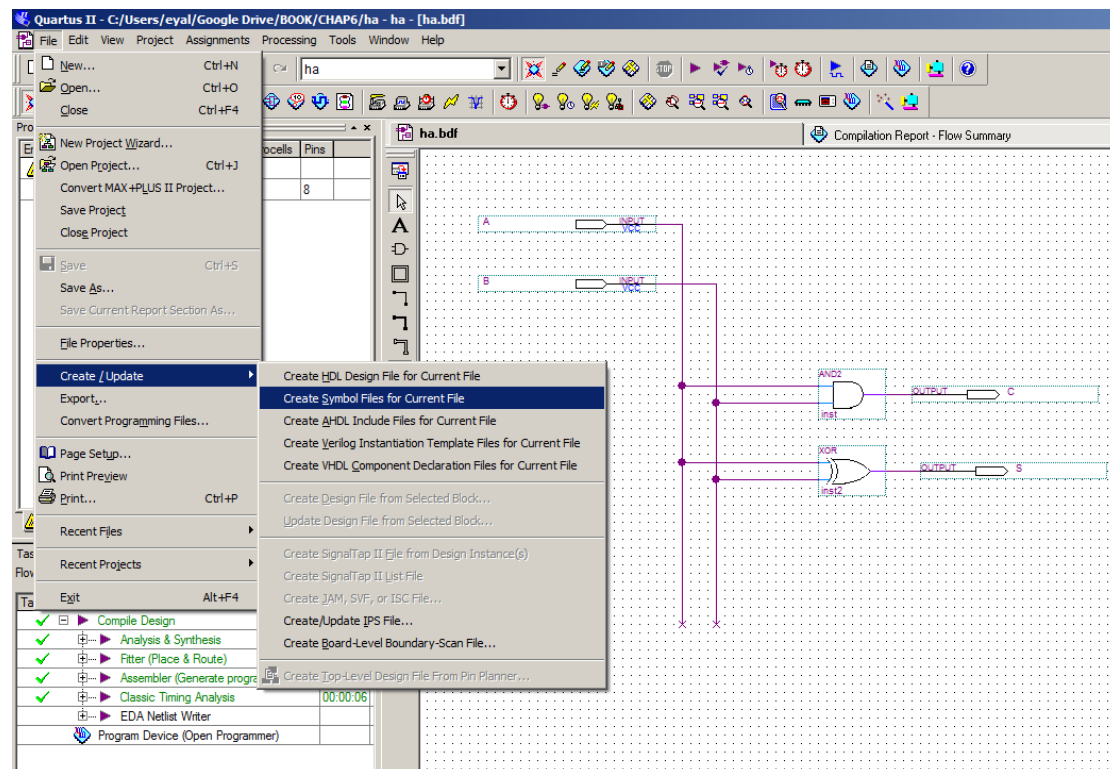


ניתן לראות שתוצאת החיבור בין הסיביות A , B , מופיעה על המוצאים C , S .

כמו כן , מוצאי המערכת מגיבים לכניסות בהתאם לביטוי הלוגי המתאר אותן.

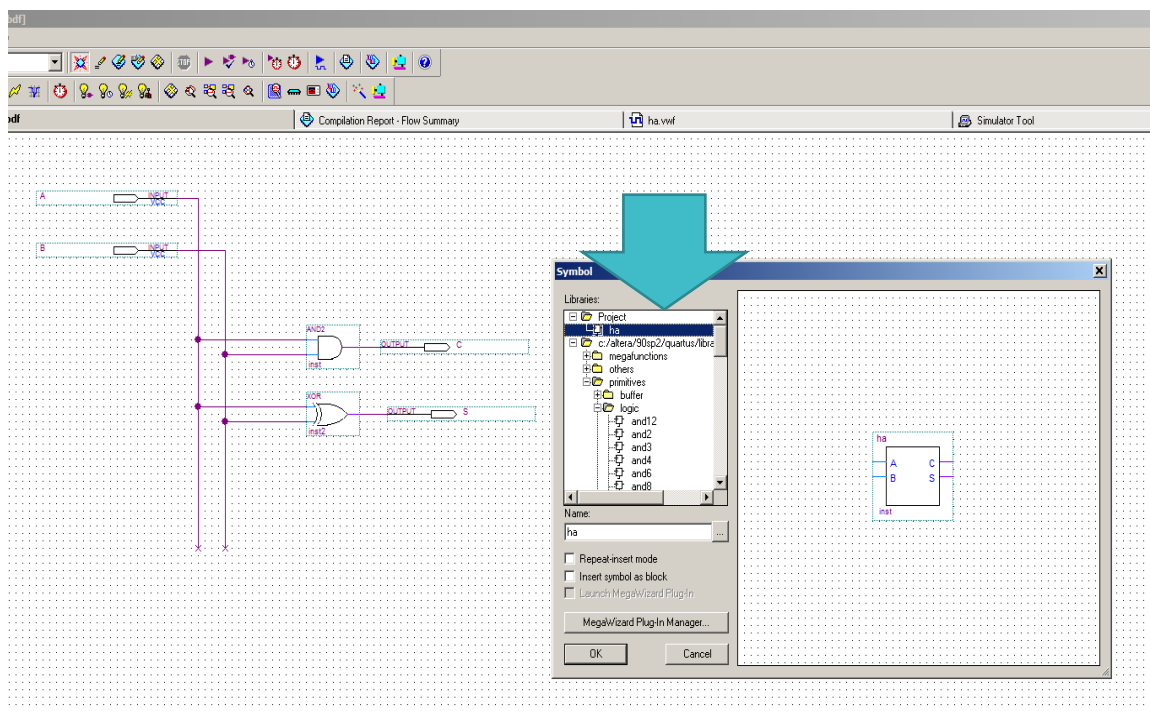
ג. הפיכת המערכת לרכיב\מיבנית\SYMBOL, לצורך שימוש עתידי.

נבצע: CREATE SYMBOL FILES FOR <- CREATE/UPDATE <- FILE CURRENT FILE



לאחר פעולה זו, נוצר הרכיב SYMBOL בתיקיית הפרויקט ונוכל להשתמש בו בהמשך.

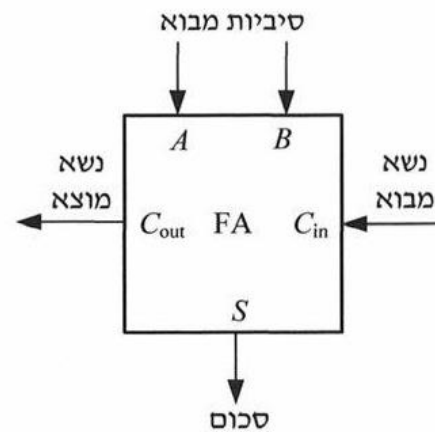
אפשר לראות את הרכיב שבנינו בתוך ספריות הפרויקט, כאשר נלחץ פעמיים בעזרת העכבר על שולחן העבודה:



משימה 6.39

- שרטטו בתוכנה מימוש בשערים של מחבר מלא FA.
- בדקו בדיאגרמת הזמן את פעולתו לכל האפשרויות בין הכניסות.
- הפכו את המחבר המלא ששרטטתם לאחר בדיקה למיבנית SYMBOL, לטובת יצירת רכיב לשימוש עתידי.

סיביות מבוא		נשא מבוא	נשא מוצא	סכום
A	B	c_{in}	c_{out}	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

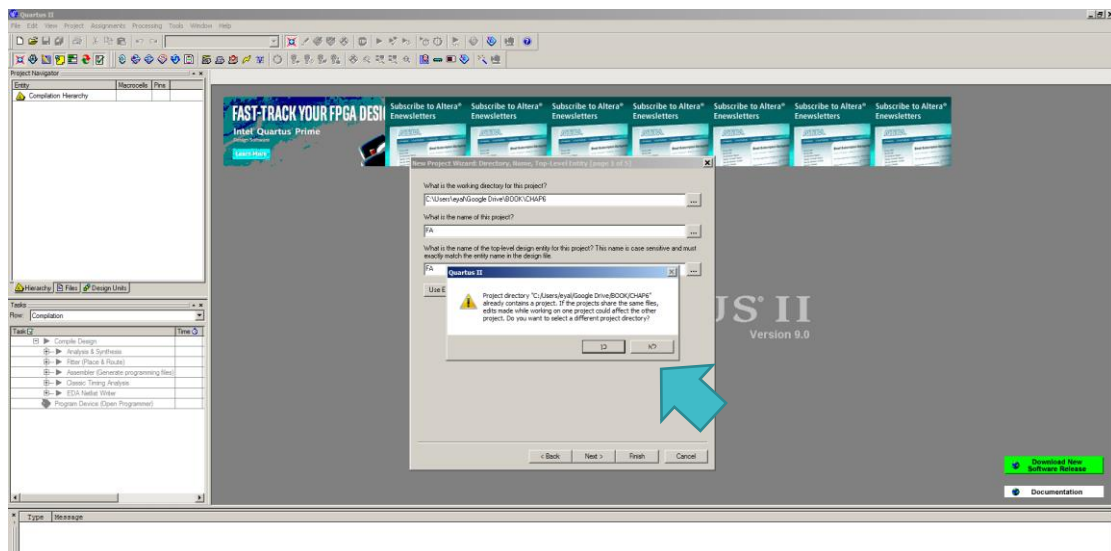


פתרון משימה 6.39

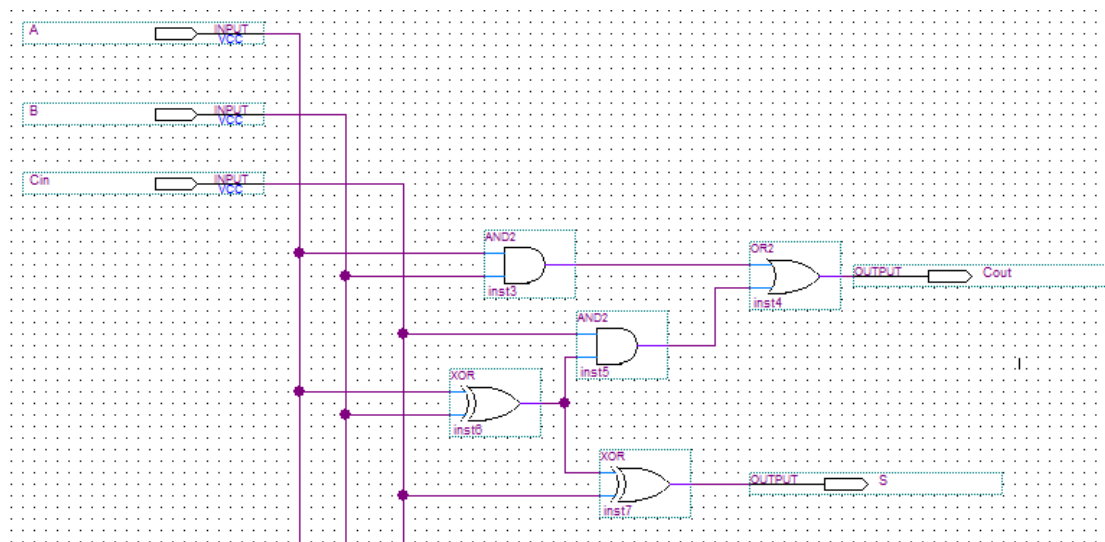
- שרטוט מערכת השערים למימוש המחבר המלא – חשוב מאוד לקרוא לקובץ בשם המערכת, כדי שנוכל בהמשך למצוא ולהשתמש במערכת שכבר בנינו ובדקנו.

חשוב לשים לב!

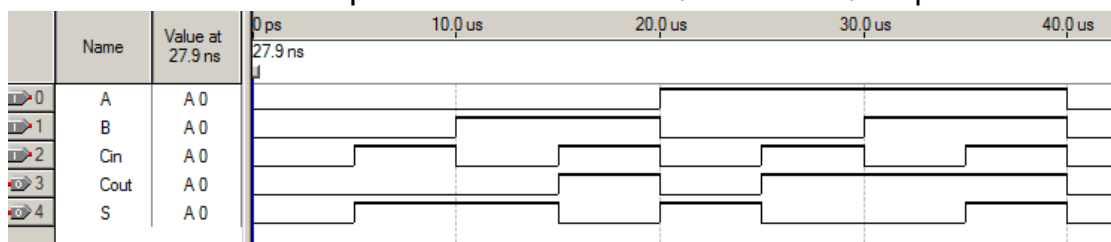
כאשר נפתח פרויקט חדש לטובת תכנון המחבר המלא בשם FA, התוכנה תשאל אם ברצוננו ליצור לו תיקייה חדשה או לשמור אותו בתיקייה של הפרויקט הקודם. במקרה זה נבקש לשמור בתיקייה של פרויקט המחבר החסר, כדי שיהיה נוח יותר להשתמש בשניהם בתרגילים הבאים, ולכן נענה על השאלה בלחיצה על כפתור "לא".



מימוש FA בשערים:



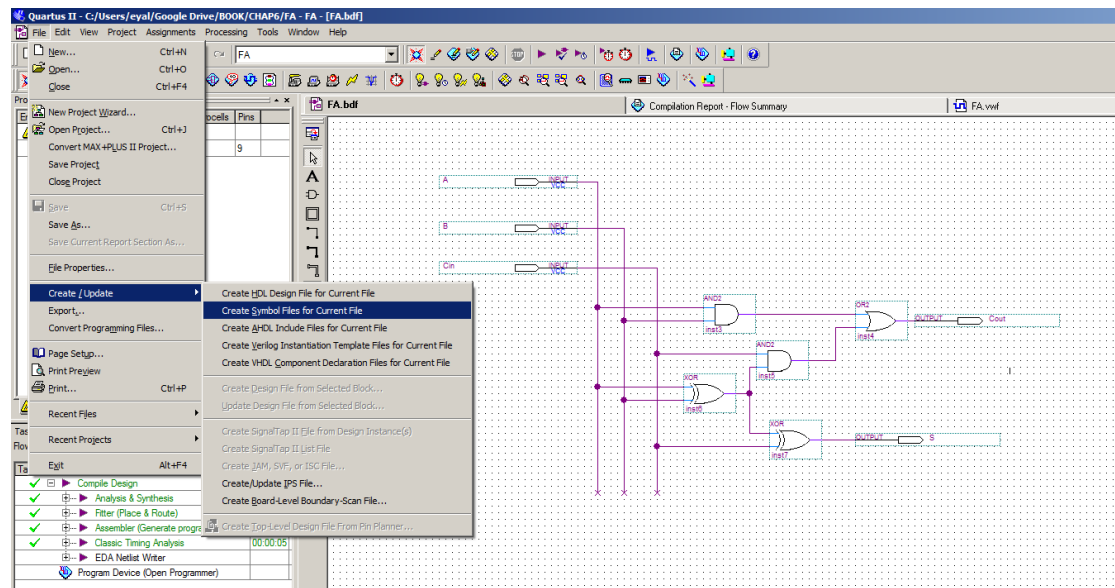
ב. בדיקת פעולת המחבר על ידי הדמיה בדיאגרמת זמן:



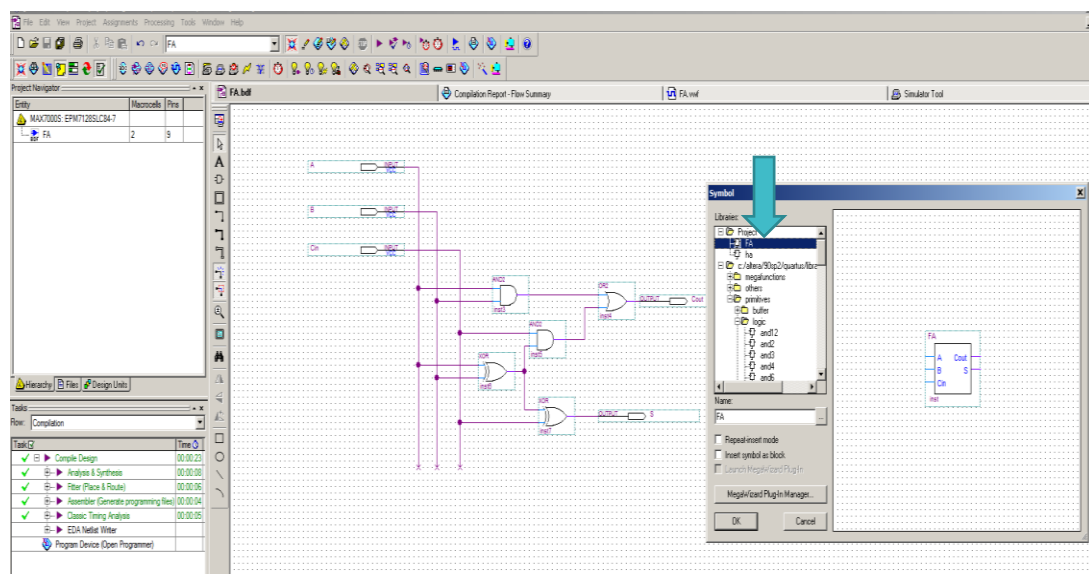
ניתן לראות את תוצאת החיבור בין הכניסות A, B, Cout, במוצאי המערכת S, Cout.

ג. הפיכת המערכת לרכיב/מיבנית\SYMBOL, לצורך שימוש עתידי.

נבצע: CREATE SYMBOL FILES FOR <- CREATE/UPDATE <- FILE CURRENT FILE



הרכיב נוצר לנו בתיקיית הפרויקט וניתן לראות אותו לאחר לחיצה פעמיים על שולחן העבודה וסימונו בסיפריות הפרויקט:



משימה 6.40

חברו בין שני מספרים X , Y בעלי שלוש סיביות כל אחד, באמצעות שרשרת מחבר חסר עם מחברים מלאים.

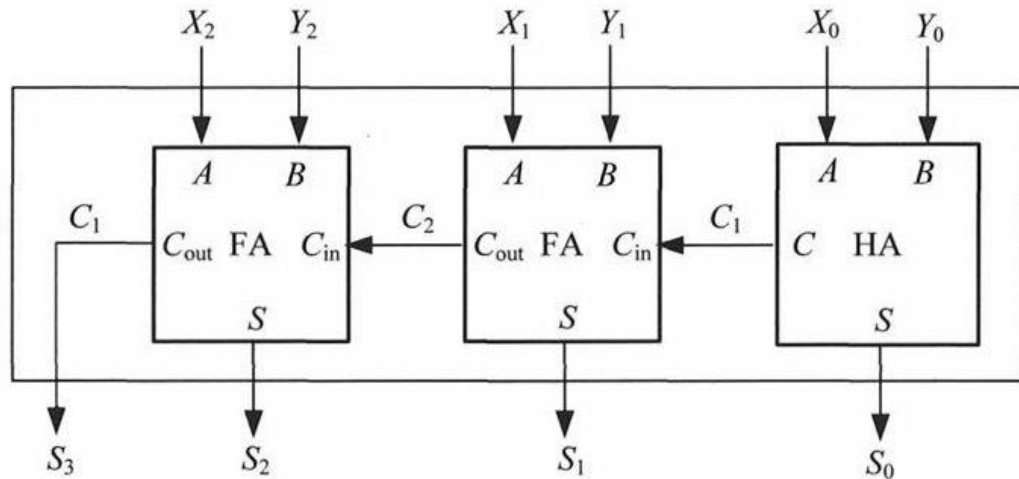
יש להשתמש ברכיבי FA, HA שיצרתם בתרגילים קודמים.

בדקו את המערכת שהרכבתם בדיאגרמת הזמן המציגה שתי תוצאות חיבור:

תוצאת $Y+X$ כאשר:

א. $Y=4$, $X=6$

ב. $Y=7$, $X=5$



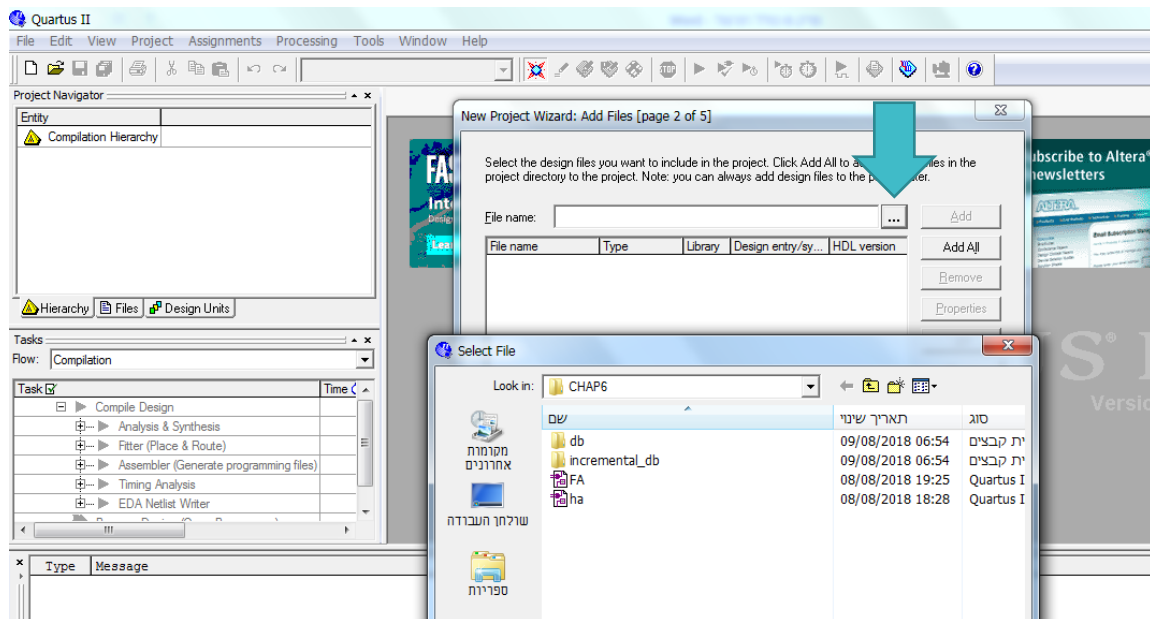
פתרון משימה 6.40

נשתמש ברכיבי FA, HA שכבר תוכננו ונמצאים בתיקיית העבודה שלנו.

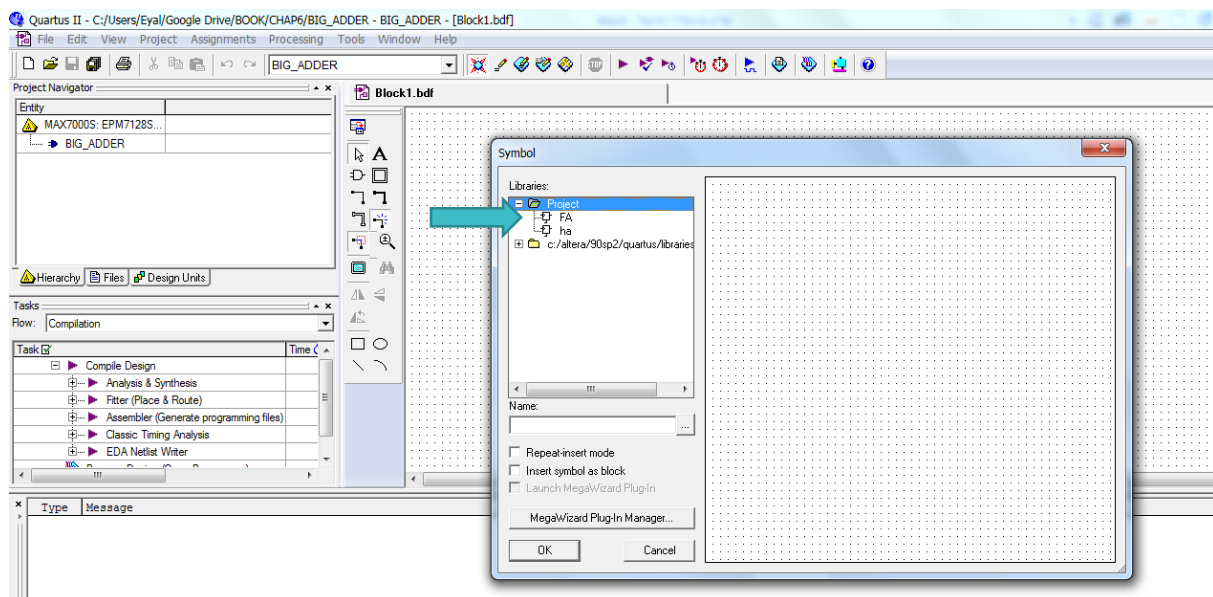
נפתח פרויקט חדש ששמו BIG_ADDER, ובו קובץ BLOCK_DIAGRAM (BDF) חדש באותו שם.

חשוב לענות שוב "לא" על השאלה אם לייצר תיקייה חדשה לפרויקט, וזאת כדי לייצר את הפרויקט החדש בתיקייה שבה מצויים הרכיבים שכבר יצרנו ולהשתמש בהם.

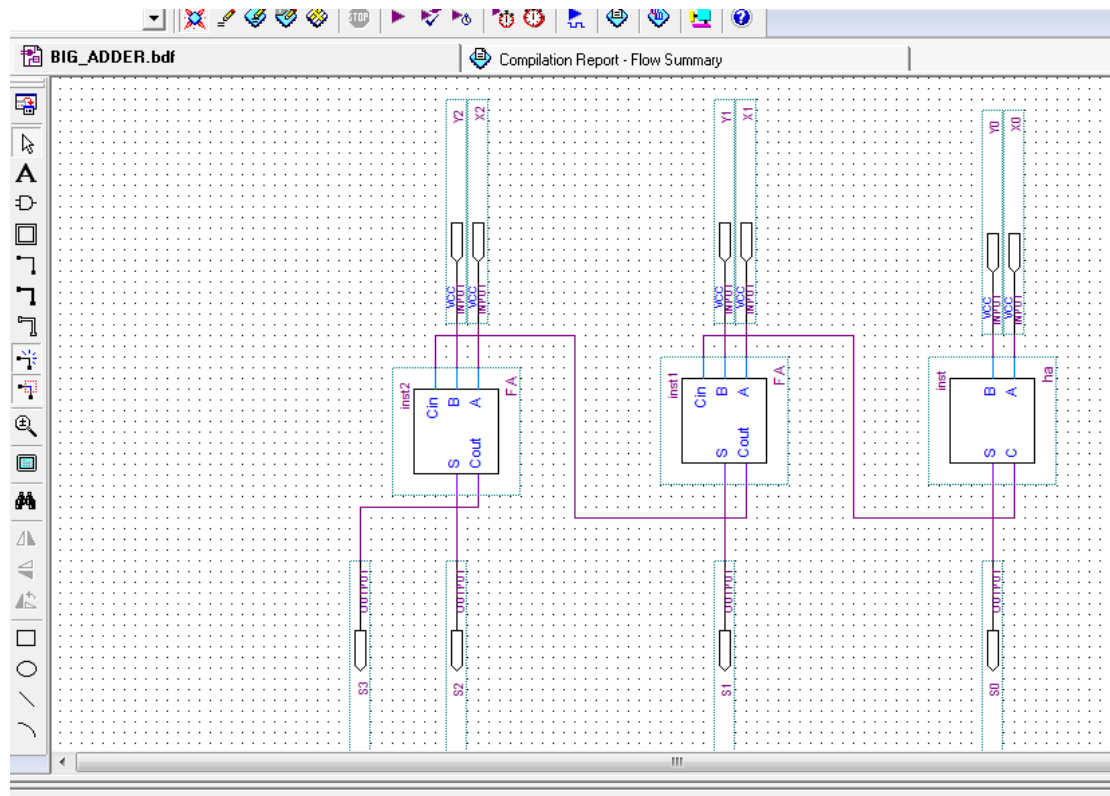
כשנגיע למסך הוספת קבצים לפרויקט, נבחר את קבצי FA, HA שכבר מצויים בתיקייה:



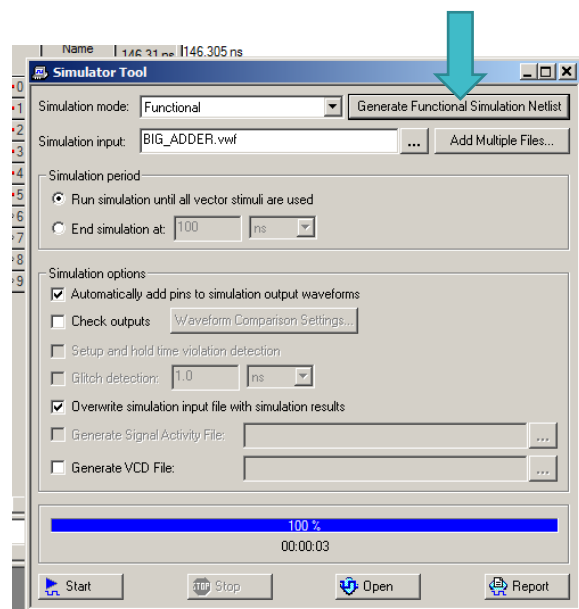
לאחר הקמת הפרויקט ופתיחת קובץ BDF, נלחץ פעמיים על שולחן העבודה ונפתח את הפלוס PROJECT כדי לראות את הרכיבים שכבר תוכננו ומוכנים לשימוש:



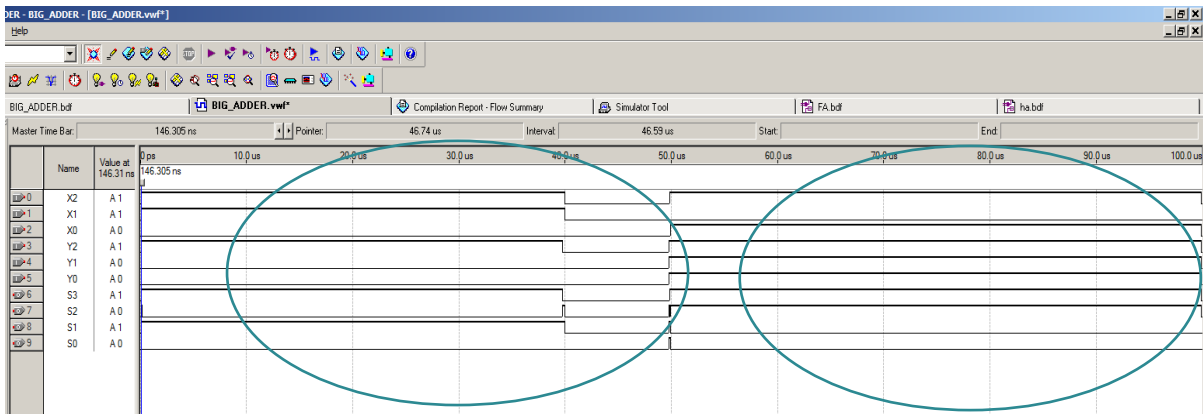
נרכיב את המערכת בעזרת הרכיבים הקיימים ונוסיף כניסות ויציאות בהתאם:



לאחר הידור נבנה דיאגרמת זמן לבדיקת הפעולה. נהדר לאחר הכנסת האותות לכניסות, ולפני הרצת דיאגרמת הזמן נלחץ על "Generate functional simulation netlist" ורק אחר כך על – START.



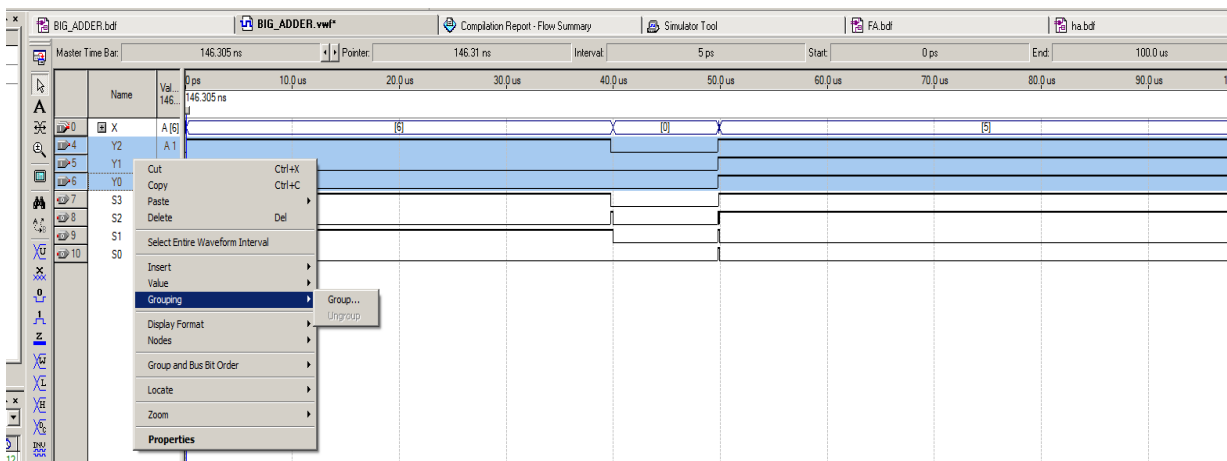
נקבל:



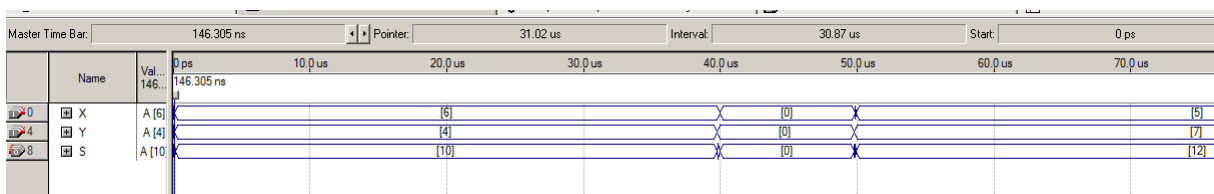
ניתן לראות ביציאות S את תוצאות החיבור בין שני המספרים.

אפשר לראות את דיאגרמת הזמן בצורה נוחה יותר על ידי איחוד לקבוצה את אותות X, Y, S.

נסמן את שורות הקבוצה, נלחץ על לחצן ימני, ונבחר GROUPING.



ניתן לקבוצות את השמות המתאימים X, Y, S ונקבל:



בדרך זאת נבין ונשלוט באופן מוצלח יותר על הנתונים בסימולציה.

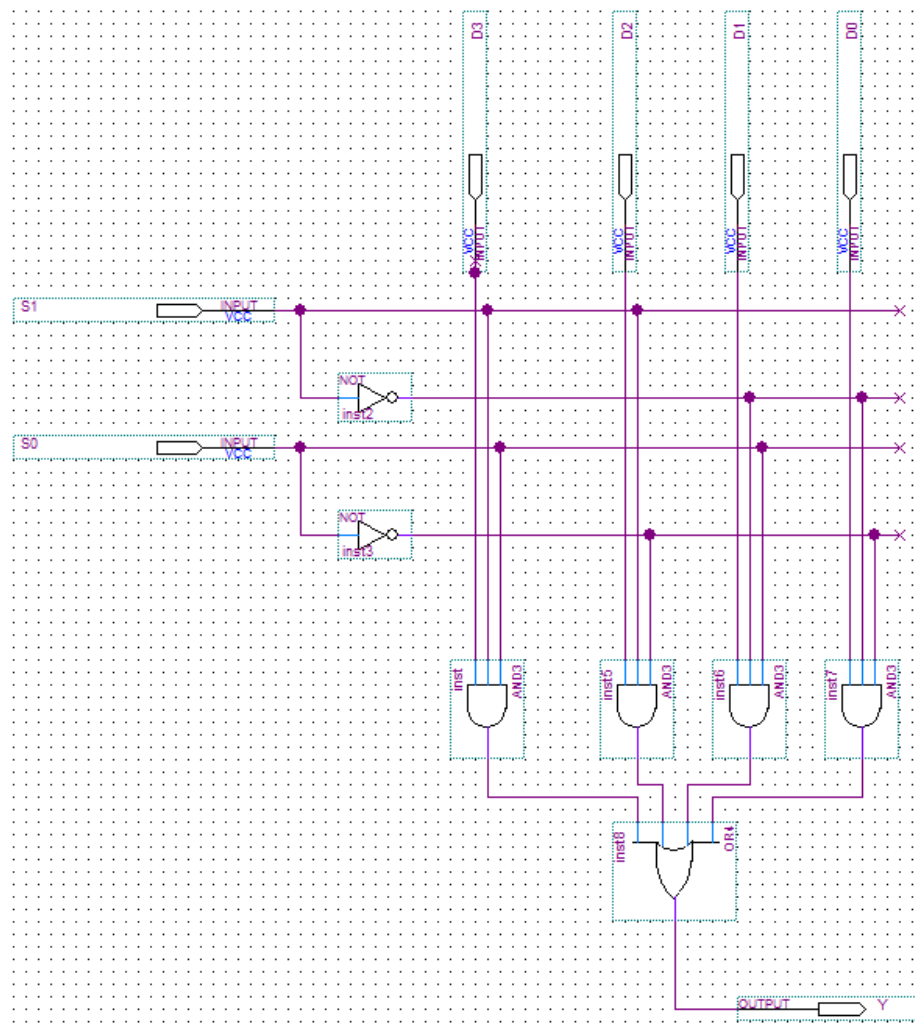
משימה 6.41

- א. שרטטו בתוכנה מרוב בגודל 1 -> 4, קרא לו בשם mux4_1 ובדקו את פעולתו בדיאגרמת זמן.
- ב. אם פעולת המרוב תקינה, הפכו אותו למבנית/SYMBOL.
- ג. השתמשו במבנית המרוב שיצרתם כדי לממש את הפונקציה הבאה:

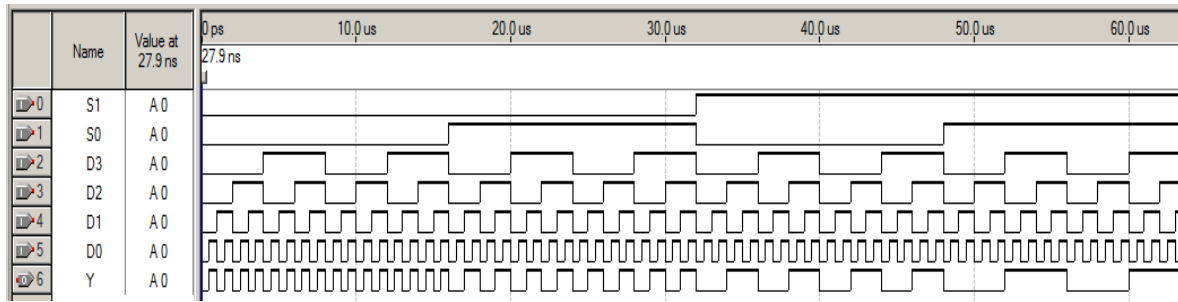
$$F(a, b) = \Sigma(1, 2, 3)$$

פתרון משימה 6.41

מימוש מרוב עם ארבע כניסות נתונים ליציאה אחת:

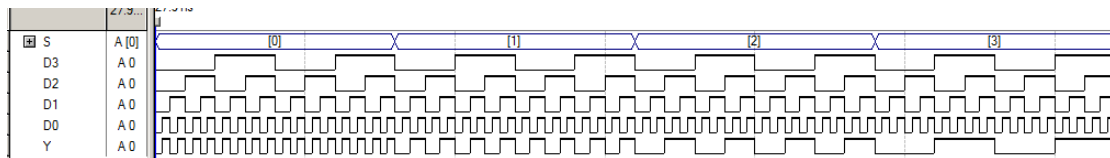


תוצאת הסימולציה לתקינות המרוב:



ניתן לראות שהאות הנמצא בכניסת הנתונים D, שהפיקוד S בחר, קיים במוצא Y.

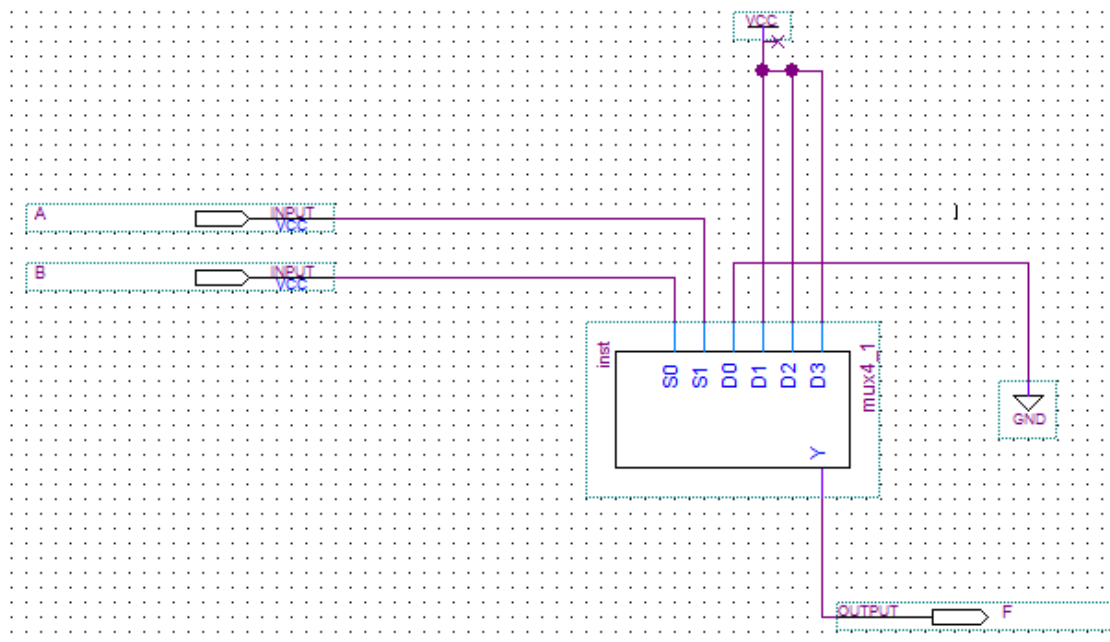
אם נאחד את הכניסות S לקבוצה, נוכל להבין את הסימולציה טוב יותר:



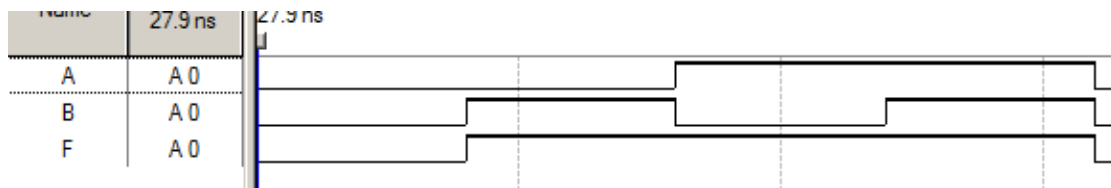
נהפוך את המרבב למיבנית.

נפתח קובץ חדש בשם F_WITH_MUX

ונממש את הפונקציה באמצעות הצבת VCC, GND בהתאם לסיגמה:



לאחר הידור, נציב את כל האפשרויות בין הכניסות A, B ונקבל בסימולציה:



אפשר לראות שרק כאשר בכניסות A, B מופיעים המספרים 1,2,3, אז המוצא F הוא '1' בדיוק כמו בסיגמה המתארת את המערכת.

סיכום פרק 6

- **מסכם למחצה** הוא מערכת המחברת שתי סיביות, ומפיקה סיבית סכום וסיבית נשא.
- **מסכם מלא** הוא מערכת המחברת שתי סיביות - תוך התחשבות בנשא מבוא - ומפיקה סיבית סכום וסיבית נשא.
- ניתן לחבר שני מספרים בינאריים בעלי n סיביות באמצעות **מסכם גלי**, המורכב ממסכם למחצה אחד ומ- $n-1$ מסכמים מלאים. חסרונו העיקרי הוא זמן ההשהיה הארוך שלו.
- **מחסר למחצה** הוא מערכת המחסרת שתי סיביות זו מזו, ומפיקה סיבית הפרש וסיבית לווה.
- **המחסר המלא** הוא מערכת המחסרת שתי סיביות זו מזו - תוך התחשבות בלווה מבוא - ומפיקה סיבית הפרש וסיבית לווה.
- ניתן לחסר שני מספרים בינאריים בעלי n סיביות באמצעות **מחסר גלי**, המורכב ממחסר למחצה אחד ומ- $n-1$ מסכמים מלאים. חסרונו העיקרי הוא זמן ההשהיה הארוך שלו.
- מערכת המבצעת השוואה בין שתי סיביות נקראת **משווה לסיבית אחת**. ניתן לבנות באמצעותה - לאחר הרחבה מסוימת - משווה ל- n סיביות. חסרונו העיקרי הוא זמן ההשהיה הארוך שלו.
- **מרבב** הוא מערכת הבוררת - לפי מצב מבואות הברירה - **מבוא נתונים אחד מבין מספר מבואות**, ומעבירה למוצא את ערכו של המבוא הנבחר.
- **מפלג** הוא מערכת הבוררת - לפי מצב מבואות הברירה - **מוצא אחד מבין מספר מוצאים**, ומעבירה אליו את ערכו של המבוא.
- **מפענח** הוא מערכת המשמשת לפענוח הנתונים שבמבואותיה מהצופן הבינארי שבו הוא מוצפן, לרמה לוגית מסוימת באחד ממוצאיה. המפענח שקול למפלג שאין לו מבוא נתונים.

פרק 7 - מערכות עקיבה

7.1 מבוא

בפרקים הקודמים הצגנו כמה דוגמאות של מערכות צירופים, למשל: מסכמים ומרבבים. במערכת צירופים, המוצאים ברגע מסוים תלויים במבואות של אותו רגע - ובהם בלבד. מערכות הצירופים הן מרכיב חשוב במערכות הספרתיות, אך אינן המרכיב היחיד. מערכות ספרתיות רבות כוללות מרכיב חשוב נוסף: התקני זיכרון המאפשרים אגירת נתונים. בכל רגע תלויים המוצאים של מערכת ספרתית כזאת (הכוללת את שני המרכיבים שלעיל) הן במבואות המערכת והן בנתונים האגורים בה כתוצאה מפעולות קודמות.

מערכות המכילות התקנים לאגירת נתונים נקראות **מערכות עקיבה**.^{*} להמחשת ההבדל שבין מערכת עקיבה למערכת צירופים, נבחן שני מנעולים, כמודגם באיורים 7.1 ו-7.2.

השימוש במנעול שמופיע באיור 7.1 נפוץ בתיקים, ואילו המנעול שבאיור 7.2 נמצא בכספות. נוכל לפתוח את מנעול התיק כאשר ניצור בו צירוף מספרי מסוים אשר נקבע מראש. כלומר, המנעול פועל כמערכת צירופים: מוצא המנעול (האם המנעול פתוח או נעול) ברגע מסוים תלוי במבואותיו באותו רגע, ובהם בלבד.

כדי לפתוח את מנעול הכספת, יש לסובב את הגלגל כמה פעמים ברציפות, בכל פעם עד למספר קבוע מראש. כלומר, ניתן לפתוח את המנעול רק אם בוצעה **סדרה** של מספרים קבועים מראש. מוצא המנעול - בכל רגע - תלוי לא רק במספר שבמבוא, אלא גם במספרים הקודמים שהופיעו במבוא.

כיצד פועל מנעול?

במצב^{**} ההתחלתי המנעול נעול (מוצאו אינו פעיל). כל עוד לא הופיע המספר הנכון במבוא (המספר הראשון הקבוע מראש), נשאר המנעול במצבו ה**נוכחי**, המצב ההתחלתי, שייקרא גם "מצב 0". כשמופיע המספר הראשון הנכון, עובר המנעול למצב ה**בא**, "מצב 1". מצב זה מציין אפוא כי הגיע המספר הראשון הנכון.

^{*} מערכת עקיבה נקראת גם **מערכת סדרתית** (Sequential System).

^{**} מצב של מערכת ספרתית הוא האוסף המזערי של נתונים המתארים את השינויים שהתרחשו במערכת בעבר. אוסף זה צריך להספיק לקביעת התנהגות המערכת בעתיד, לפי המבואות שיינתנו.

המצב הנוכחי של המנעול הוא כעת מצב 1. אם במצב הנוכחי שלו מופיע מספר שגוי (השונה מהמספר השני הקבוע מראש) במבוא המנעול, חוזר המנעול למצבו ההתחלתי. רק כאשר מופיע המספר השני הנכון במבוא המנעול, הוא עובר למצב הבא, "מצב 2". מצב זה מציין, אם כן, כי הופיע המספר השני הנכון.

וכך גם לגבי המספר השלישי: רק אם יופיע המספר השלישי הנכון במבוא המנעול, הוא ייפתח. אך אם במצב הנוכחי (מצב 2) של המנעול יופיע מספר שגוי, הוא יחזור למצבו ההתחלתי. כדי שהמנעול יפעל כשורה במצב 2, עליו לזכור שלושה מצבים לפי סדרם - המצב ההתחלתי, מצב 1 ומצב 2 - ולבדוק את המספר השלישי שבמבוא, וכך הלאה לגבי שאר המספרים.

כאשר המנעול במצב כלשהו, תלוי מוצאו במבואו באותו רגע ובמצבו. כך הדבר גם לגבי מוצא המנעול בשאר המצבים: המוצא תלוי במבוא באותו רגע ובמצב המנעול. בכל רגע תלוי אפוא מוצא המנעול במבואו ובמצבו.

לפעולת מנעול כזה דרושים שני חלקים. חלק אחד - צירופי - בודק את נכונות המספר במבוא ברגע מסוים, ותפקידו של החלק השני - לזכור את מצב המנעול. עקרונית, ניתן להפריד כל מערכת עקיבה לשני חלקים: החלק הראשון הוא מערכת צירופים, והחלק השני כולל התקן זיכרון (איור 7.3). התקן הזיכרון עשוי להכיל מספר סיביות. בהמשך נלמד כיצד בנוי זיכרון כזה.

התקן הזיכרון משמש לזכירת מצב המערכת. מוצאי מערכת הצירופים הם פונקציה בוליאנית של מצב המערכת ומבואותיה.

תרגול

שאלה 7.1

לגבי כל אחת מהמערכות הספרתיות הבאות, ציינו אם היא מערכת צירופים או עקיבה.

נמקו בקצרה את תשובתכם.

א. מערכת אזעקה הפועלת כאשר הדלת או החלון בחדר נפתחים.

ב. מערכת הסופרת את מספר האנשים שנכנסו לאולם.

ג. מערכת הבקרה של רמזור. המערכת קובעת את חילופי האורות ברמזור.

דוגמה 7-1

בבית אריזה לפירות (איור 7.4) פועלת מערכת אוטומטית למילוי ארגזים (המערכת עקרונית

ולא מעשית).

פתרון

הסבר פעולת המערכת

הפירות נעים על סרט נע א ונכנסים לארגז. על פני הסרט הנע יש שקעים במרווחים אחידים (S). בשקעים אלה עשויים להיות פירות. נניח שהסרט נע משקע לשקע (מרחק S) במשך שנייה. בודקים באמצעות מקור אור וגלאי אור אם יש פרי בשקע. אם אמנם יש שם פרי, הוא נספר ונכנס לארגז. כאשר מספר הפירות בארגז הוא 16, נעצר הסרט הנע הראשון (א), וארגז ריק חדש שנע על הסרט השני (ב) נכנס למילוי, וחוזר חלילה.

המערכת המכנית שתוארה לעיל מבוקרת על ידי מערכת עקיבה (איור 7.5). למערכת מבוא אחד (x) ומוצא אחד (F). המבוא x מציין אם יש פרי בשקע; אם יש פרי, מבוא המערכת הוא $x=1$, ואם לאו $x=0$. על המערכת "לזכור" את מספר הפירות בארגז בכל רגע. כאשר יש בארגז 16 פירות, תפוקת המערכת היא $F=1$. נסמן באות N את מספר הפירות שיש בארגז בזמן נתון. כאשר $x=1$, יש לחבר יחידה ל-N ($N < 16$). תיאור סכימטי של המערכת מובא באיור 7.5.

הסבר פעולת מערכת העקיבה

התקן הזיכרון שבאיור 7.5 שומר על הערך הבינארי המציין את מספר הפירות בארגז בזמן מסוים* ($N = n_3 n_2 n_1 n_0$). ערך בינארי זה מאפיין את המצב הנוכחי של מערכת העקיבה. בתחילת הפעולה, כאשר הארגז ריק, נקבע ערכו של N כאפס $n_3 n_2 n_1 n_0 = 0000$. זהו המצב ההתחלתי של המערכת. מערכת הצירופים מבוססת על ארבעה מסכמים למחצה (H.A) המחוברים כמסכם גלי**. באמצעות מסכם זה מתבצעת פעולת חיבור בין N לבין x. אם $x=0$, יופיע המספר הקודם, N, במוצאי המסכם הגלי. אם $x=1$, ערך מוצאי המסכם הגלי יהיה $N+1$. הערך במוצאי המסכם הגלי מאפיין את המצב הבא של המערכת.

מוצאי המסכם הגלי מחוברים למבואות התקן הזיכרון. בכל שנייה מתעדכן התקן הזיכרון, כך שהמצב הבא של המערכת נהפך למצב הנוכחי. כאשר בארגז יש כבר 15 פירות, המצב הנוכחי (במבואות התקן הזיכרון) הוא 15. ואז יופיע במבואות המסכם הגלי המספר $n_3 n_2 n_1 n_0 = 15_{10} = 1111_2$ שהיה בהתקן הזיכרון. כאשר יופיע פרי נוסף, $x=1$, והוא יתוסף למספר N.

* הסיבית n_0 היא הפחות משמעותית, והיא השמאלית ביותר באיור 7.5.

** מסכם גלי נלמד בפרק הקודם.

נשא המוצא (F) של המסכם הגלי יהיה $F=1$, כלומר: הארגז יהיה מלא, ובמוצאי המסכם יופיע המספר 0000 המציין את המצב **הבא**. עם עדכון התקן הזיכרון יוכנס הערך 0000 להתקן זה, כלומר: המצב הנוכחי הוא המצב ההתחלתי, כדרוש.

בפרקים הקודמים למדתם לתכנן מערכת צירופים המהווה חלק ממערכת עקיבה. בפרק זה נעסוק במבנה התקן הזיכרון.

תרגול

שאלה 7.2

- כידוע, המספר 16 מיוצג על ידי 5 סיביות. מדוע אפוא ניתן להסתפק ב-4 סיביות כדי לייצג בכל שנייה את מספר הפירות בארגז?
- מהדוגמה שהובאה לעיל עולות כמה שאלות, שנענה עליהן בפרק זה. השאלה הראשונה והבסיסית ביותר היא:
- מהו התקן זיכרון? כלומר: מהי המערכת הספרתית המאפשרת זכירת נתון בינארי לאורך זמן?
 - מדוע ממד הזמן הוא בעל משמעות רבה במערכות אלו?
- שאלות נוספות:
- כיצד ניתן להפעיל את התקן הזיכרון רק בזמנים מסוימים (בכל שנייה, לפי הדוגמה)?
 - כיצד ניתן לקבוע מצב התחלתי רצוי להתקן הזיכרון (בדוגמה לעיל נדרש שהמצב ההתחלתי יהיה 0000)?
- על שאלות אלה ואחרות יינתנו תשובות בהמשך.

7.2 נועל SR (Latch) בסיסי (Set Reset)

7.2.1 מבוא

הנועל הוא מערכת ספרתית המשמשת התקן זיכרון לסיבית אחת. הנועל שומר על מצבו הבינארי (0 או 1) לאורך זמן, עד אשר מאלצים אותו לשנות את מצבו באמצעות מבואות מיוחדים המשמשים למטרה זו. מבואות אלו נקראים **מבואות עירור**.

בסעיף זה נדון בנועל SR בסיסי (ובקיצור: **נועל בסיסי**), המשמש חלק עיקרי בכל הנועלים שבהם נדון בסעיפים הבאים. לנועל SR בסיסי, המתואר באיור 7.6, שני מבואות עירור (S ו- R) ושני מוצאים (Q ו- $\bar{Q}$).

תרגול

שאלה 7.3

- א. בטאו כל אחד מהמוצאים שבאיור 7.6 כפונקציה של מבוא עירור אחד ושל המוצא השני.
 ב. נתון כי כל מוצא תלוי גם במוצא האחר. האם זו מערכת צירופים?

7.2.2 ניתוח פעולת הנועל

כדי לנתח את פעולתו של הנועל הבסיסי שבאיור 7.6, נזכיר כי מוצאו של שער NOR הוא 1 רק אם שני מבואותיו הם 0. בכל מקרה אחר, מוצאו של השער הוא 0. ננתח עתה את ארבעת הצירופים האפשריים במבואות העירור (R -ו- S) של הנועל.

א. $R=0, S=1$

המבוא S של השער g_2 הוא 1, ולכן $\bar{Q}$ הוא 0, בלי תלות במבוא השני של שער זה. הצירוף במבואות השער g_1 הוא $R=0$ ו- $\bar{Q}=0$, ולכן מתקבל 1 במוצא Q של g_1 .

מסקנה:

כאשר במבואות נועל SR בסיסי מופיע הצירוף $R=0, S=1$, אזי $\bar{Q}=1$ ו- $\bar{Q}=0$.

ב. $R=1, S=0$

תרגול

שאלה 7.4

נתחו את פעולת הנועל הבסיסי שבאיור 7.6 עבור הצירוף $R=1, S=0$.

עבור שני צירופי מבואות העירור הקודמים, א ו-ב ($R=0, S=1$ ו- $R=1, S=0$, בהתאמה), קבענו את המוצאים Q ו- $\bar{Q}$ בלי תלות במצבו הקודם* של הנועל. בצירוף הבא, ג, יהיה עלינו לדעת את מצבו הקודם של הנועל כדי לקבוע את מוצאיו.

ג. $R=0, S=0$

נניח שהנועל היה במצב א שתואר לעיל, כלומר: צירוף מבואותיו היה $R=0, S=1$, ומוצאיו היו $\bar{Q}=0, Q=1$. ננתח עתה את פעולת הנועל כאשר המבוא S יהפוך להיות 0 (המבוא השני $R=0$, כמו קודם לכן). כאשר $Q=1$, באחד המבואות של השער g_2 יש 1, ומוצאו של השער

* במקום להשתמש ב"מצב הקודם" של הנועל, ניתן להשתמש ב"מצב הנוכחי", ולכן המצב השני הוא "המצב הבא".

הוא $\bar{Q} = 0$, בלי תלות ב-S. במבוא השער g_1 מופיע הצירוף 0,0 ומוצא השער הוא $Q = 1$. מכאן נסיק כי כאשר מצבם הקודם של מוצאי הנועל היה $Q = 1$ ו- $\bar{Q} = 0$, אזי צירוף המבואות $R=0, S=0$ שומר על ערכי המוצא הקודמים.

נניח עתה שמוצאי הנועל היו $Q = 0$ ו- $\bar{Q} = 1$. גם במקרה זה, על פי ניתוח דומה לזה שהובא לעיל, נראה כי צירוף המבואות $R=0, S=0$ שומר על ערכי המוצא הקודמים. בדקו טענה זו!

מסקנה:

כאשר במבואות הנועל הבסיסי מופיע הצירוף $R=0, S=0$, הנועל שומר על מצבו הקודם.

הצירוף הרביעי של מבואות העירור ($R=1, S=1$) אינו חוקי. בטרם נסביר מדוע יש להימנע ממתן צירוף זה במבואות נועל SR בסיסי, נסכם את פעולת הנועל בשלושת צירופי המבוא החוקיים שתוארו לעיל.

לנועל שני מצבים חוקיים:

- במצב הראשון $Q = 1$ ו- $\bar{Q} = 0$. זהו מצב 1, הנקרא גם מצב SET.
- במצב השני $Q = 0$ ו- $\bar{Q} = 1$. זהו מצב 0, הנקרא גם מצב RESET (לעתים נקרא מצב זה גם Clear).

בשני המצבים החוקיים של הנועל, הערך במוצא $\bar{Q}$ הוא ההיפוך הלוגי של הערך במוצא Q , והמוצאים סומנו בהתאם לכך. כאשר המבוא S פעיל (כלומר $R=0, S=1$), נקבע מצב הנועל כ- SET (כלומר: $Q = 1, \bar{Q} = 0$, בלי תלות במצב הקודם). כאשר המבוא R פעיל (כלומר: $S=0, R=1$), נקבע מצב הנועל כ- RESET (כלומר $Q = 0, \bar{Q} = 1$), בלי תלות במצבו הקודם. כאשר שום מבוא S ו-R אינו פעיל ($R=0, S=0$), הנועל שומר על מצבו הקודם.

אפשר לסכם את פעולת הנועל בטבלת מצבים, כמתואר באיור 7.7.

טבלת המצבים שבאיור 7.7 שונה במקצת מטבלאות המצבים שהצגנו בפרקים הקודמים. לא כללנו בטבלה את המוצא השני $\bar{Q}$, שהוא ההיפוך הלוגי של Q . הסימון q מציין את מצבו הקודם (הערך במוצאו) של הנועל. מכיוון שהנועל עשוי לשמור על מצבו או לשנות אותו, דרושה הבחנה בין מצבו הקודם (q) למצבו החדש (Q). המצב החדש של הנועל נקבע בהתאם לצירוף במבואותיו ולמצב הקודם של הנועל.

* לעתים נהוג לסמן Q_n במקום q; ו- Q_{n-1} במקום Q. האות n מציינת אירוע בציר הזמן. המצב החדש מסומן ב- $n+1$, והמצב הקודם – ב-n. יש המסמנים Q_t במקום Q_n ו- Q_{t+1} במקום Q_{n+1} .

נסביר, למשל, את השורה השנייה בטבלת המצבים: כאשר $S=0$ ו- $R=1$, מקבלים כי $Q=0$, בלי תלות במצבו הקודם של הנועל.

 תרגול

שאלה 7.5

הסבירו בקצרה את השורה הראשונה והשלישית בטבלת המצבים שבאיור 7.7.

באיור 7.8 נתון תרשים זמנים (חלקי) המתאר את השתנות המוצא Q כפונקציה של מבואות העירור S ו- R .

נסביר בקצרה את תרשים הזמנים שבאיור 7.8: בתחילה (t_0) , צירוף המבואות הוא $S=1$ ו- $R=0$, ולכן $Q=1$ (מצב SET), בלי תלות במצב הקודם. גם לאחר ש- S יורד ל-0, הנועל שומר על מצבו עד לרגע t_1 . ברגע זה המבוא R פעיל ($R=1$), ואילו $S=0$, ולכן Q יורד ל-0 (מצב $RESET$).

 תרגול

שאלה 7.6

המשיכו את תיאור Q כפונקציה של המבואות, לפי תרשים הזמנים שבאיור 7.8.

7.2.3 הצירוף האסור: $R=1, S=1$

עד כה ניתחנו את פעולתו של נועל SR בסיסי עבור שלושת הצירופים החוקיים. נבחן עתה את הצירוף הרביעי ($R=1, S=1$) במבואות העירור של הנועל. כאמור, ערכו של R במבוא השער g_1 (איור 7.8) הוא 1, ולכן מוצא השער הוא 0, בלי תלות במבוא השני. $S=1$ במבוא השער g_2 , ולכן גם מוצא שער זה הוא 0.

מסקנה:

כאשר צירוף המבואות הוא $S=1, R=1$, מוצאי הנועל הם $Q=0$ ו- $\bar{Q}=0$. במצב זה, שני המוצאים $(Q, \bar{Q})$ הם בעלי אותה רמה לוגית, אך מנועל SR בסיסי נדרש כי המוצא $\bar{Q}$ יהיה ההיפוך הלוגי של המוצא Q . לכאורה אפשר לבטל את הדרישה: נסמן, למשל, את המוצא $\bar{Q}$ באות P , ולא נדרוש כי $Q = \bar{P}$. אך הצירוף $S=1, R=1$ יישאר בכל זאת אסור, כפי שניווכח להלן.

נניח, לצורך דיוננו, כי התקבל הצירוף האסור במבואות העירור של הנועל. במעבר של צירוף המבואות מ- $S=1, R=1$ ל- $S=0, R=0$ (איור 7.9) לא ניתן לדעת מה יהיה ערכו של Q . הסיבה

לכך היא שקיימת אי-סימטריה בפעולת השערים המעשיים המרכיבים את הנועל, התופעה נובעת מתהליך הייצור*.

7.2.4 מימושים של נועל SR בסיסי

באיור 7.6 הצגנו נועל הממומש באמצעות שערי NOR. אפשר לממש נועל SR בסיסי גם באמצעות שערי NAND ומהפכים (איור 7.10). ** פעולתו של נועל כזה זהה – מבחינה לוגית – לפעולת הנועל הממומש באמצעות שערי NOR, פרט לערכי המוצאים במצב האסור.



שאלה 7.7

נתחו את פעולת הנועל הבסיסי שבאיור 7.10. לצורך כך עליכם לבדוק את כל הצירופים האפשריים של המבואות.

7.3 נועל מבוקר (סינכרוני)

בדרך כלל אנו מעוניינים לפקח על פעולת הנועל, כך שמבואות העירור ישפיעו על מצבו רק בזמנים מסוימים. זמנים אלו ייקבעו (על ידי המשתמש בנועל) באמצעות מבוא בקרה מיוחד המשמש למטרה זו. מבוא זה ייקרא **מבוא אפשר** (Enable input) או **מבוא שער**. נועל בעל מבוא אפשר כזה נקרא נועל **מבוקר** (Gated Latch) (או נועל **סינכרוני**). לעומת זאת, נועל SR בסיסי מגיב בכל זמן לכל שינוי במבואות העירור שלו, S ו- R , בהתאם לטבלת המצבים (בלי תלות בזמן התרחשות השינוי).

נועל המגיב באופן מיידי לשינויים במבואות העירור שלו נקרא **נועל אסינכרוני**. הנועל SR הבסיסי הוא אפוא נועל אסינכרוני. בסעיף זה נעסוק בנועלים סינכרוניים, כלומר: בנועלים מתוזמנים.

בדוגמה 7-1, בראשית הפרק, הראינו כי דרוש להפעיל את התקן הזיכרון רק בזמנים מסוימים (בדוגמה זו דרשנו שהתקן הזיכרון, הנועל, יופעל אחת לשנייה). כלומר: דרוש התקן זיכרון סינכרוני*.

* בתהליך הייצור לא ניתן לשמור על אחידות מלאה, כתוצאה מאפיונות או סיבולת (tolerance), הנובעת משינויים בתהליך הייצור.

** המבוא S באיור 7.10 הוחלף עם המיתוג של R. בניגוד למיקום המבואות באיור 7.6, אין שום חשיבות מעשית להגדרת סדר / מיקום המבואות.

* המלה **סינכרוני** מקורה ביוונית ופירושה מתוזמן (כרונוס = זמן). התוספת **א** למלה **סינכרוני** (אסינכרוני) מציינת שלילה; ומכאן אסינכרוני - שאינו מתוזמן.

בסעיפים הבאים של פרק זה נדון במערכות עקיבה סינכרוניות ואסינכרוניות. כדי לבצע משימה כזו, יש להוסיף מבוא אפשר לנעל SR בסיסי. רק כאשר מבוא האפשר פעיל (כלומר: מאפשרים לנעל לפעול), ישפיעו מבואות העירור (R, S) על מצב הנעל, בהתאם לטבלת המצבים שלו. במצב שבו אין מאפשרים לעורר את הנעל (כלומר: מבוא האפשר אינו פעיל), ישמור הנעל על מצבו הקודם.

7.3.1 נעל SR מבוקר באמצעות מבוא אפשר E (Enable)

התוספת הדרושה בנעל SR בסיסי, כדי להופכו לנעל SR מבוקר, מתוארת (בנוסף לנעל עצמו) באיור 7.11. בחרנו באיור זה בנעל SR בסיסי הממומש באמצעות שערי NOR . המבואות M ו- N (של הנעל המבוקר) מתאימים למבואות R ו- S של הנעל הבסיסי. בשני הנעלים יש מבואות R ו- S . מבואות אלה אינם זהים בנעלים אלה.

כאשר מבוא האפשר E^{**} (איור 7.11) אינו פעיל, כלומר $E=0$, מוצאי השערים g_1 ו- g_2 הם $M=0$ ו- $N=0$, בהתאמה. עבור צירוף זה של מבוא, הנעל הבסיסי שומר על מצבו הקודם (ראו $R=0$ ו- $S=0$ באיור 7.7ב). כאשר מבוא האפשר פעיל, כלומר $E=1$, מקבלים כי $M=R$ ו- $N=S$, והנעל המבוקר מגיב לפי טבלת המצבים של הנעל הבסיסי.

התוספת g_1 ו- g_2 לנעל SR הבסיסי מאפשרת להפעיל את הנעל בזמנים מסוימים, שהבחירה ביניהם נתונה לשליטתנו. כאשר נרצה שהמבואות S ו- R ישפיעו על מצב הנעל, נספק $E=1$. כאשר לא נרצה לשנות את מצב הנעל, נספק 0 למבוא האפשר E .

טבלת המצבים המתאימה לנעל SR מבוקר מוצגת באיור 7.12ב. התרשים הלוגי של הנעל מופיע שוב, והפעם סומנו רק המבואות והמוצאים של הנעל המבוקר (איור 7.12א).

כאשר $E=1$, הנעל פועל כנעל SR בסיסי; וכאשר $E=0$, שומר הנעל על מצבו הקודם ($Q=q$), בלי תלות בצירוף שבמבואות העירור S ו- R . כדי לציין את אי-התלות של מצב הנעל במבואות העירור S ו- R (כאשר $E=0$), נרשום $\times$ (כלומר don't care) כערך המתאים של כל אחד ממבואות העירור.

^{**} מבוא האפשר (E) נקרא גם מבוא השער - (G) Gate.

שאלה 7.8

שרטטו את התוספת הנדרשת לנועל SR בסיסי, הממומש באמצעות שערי $NAND$ (איור 7.10), כדי להופכו לנועל SR מבוקר.

7.3.2 נועל D מבוקר

באמצעות מבוא האפשר של נועל SR מבוקר אפשר לקבוע את הזמנים הרצויים להפעלת הנועל, ואילו שני מבואות העירור קובעים את מצבו.

לנועל SR יש שלוש תגובות חוקיות (שלושה מצבים), בהתאם לערכי מבואות העירור:

- שמירת מצב.
- מצב SET ($Q=1$).
- מצב $RESET$ ($Q=0$).

כדי שנוכל לקבל את שלושת המצבים האלו, דרושים שני מבואות עירור. פעמים רבות ניתן להסתפק בנועל בעל שני אופני פעולה בלבד: SET ו- $RESET$. לנועל כזה מספיק מבוא עירור בודד. על פי הרמה הלוגית (0 או 1) במבוא זה ייקבע מצב הנועל, כלומר: מוצאו.

נועל מתאים לתיאור שלעיל נקרא **נועל מסוג D** . האות D מציינת Data. נועל D מבוקר מתואר באיור 7.13.

נועל D מבוקר זהה בפעולתו לנועל SR מבוקר, שבו מתקיים השוויון: $R = \bar{S}$. המבוא D בנועל D מבוקר מתאים – במצב זה – למבוא S בנועל SR מבוקר, ואילו המבוא R הוא $\bar{D}$.

ניתוח פעולת נועל D מבוקר

- כאשר $E=0$ (איור 7.13), הנועל שומר על מצבו המקורי ($M=N=1$).
- כאשר $E=1$, מתקבל $N = D, M = \bar{D}$.
אם $D=0$, אז המוצא Q יהיה 0.
אם $D=1$, אז המוצא Q יהיה 1.
במצב שבו $E=1$, הנועל **שקוף**, כלומר: הנועל מעביר אל מוצאו את הרמות הלוגיות במבוא D .

כל עוד הנועל אינו מאפשר ($E=0$), נשמר הערך האחרון שהיה בנועל. ערך זה נשמר (בלי תלות בשינויים ב- D) עד שהנועל מאפשר ($E=1$). כאשר מופסק אפשר הנועל, כלומר ברגע

שבו E יורד ל-0, מתבצעת למעשה **נעילה** בתוך הנועל של הנתון האחרון שהיה ב- D . לכן נקרא נועל זה גם "נועל D מבוקר".

באיור 7.14 משורטט תרשים זמנים (חלקי) המתאר את המוצא (Q) של נועל D מבוקר, בתלות במבואותיו (E, D).

ניתוח תרשים הזמנים שבאיור 7.14

מבוא האפשר E פעיל ($E=1$) בתחילה. כאמור, הנועל שקוף במצב זה, והמוצא עוקב אחר השינויים ב- D , זאת עד לפרק הזמן t_1 , שבו מבוא האפשר יורד ל-0. בזמן t_1 ננעל הנתון האחרון שהיה בנועל ($Q=1$, במקרה שלנו), וכך יישאר הנתון עד לקבלת אפשר חוזר $E=1$.



שאלה 7.9

השלימו את תרשים הזמנים המופיע באיור 7.14. ציינו מתי מתבצעת נעילה, מתי הנועל נעול ומתי הוא שקוף.

שאלה 7.10

כתבו את טבלת המצבים המתאימה לנועל D מבוקר.

התיאור המפורט של הנועלים באמצעות שערים מסורבל ומיותר במקרים רבים. באיור 7.15 מופיע תיאור פשוט של הנועלים שעליהם למדנו עד כה.

באיור 7.15 מתואר נועל SR בסיסי. באיור 7.15 ב.1 מופיע נועל SR מבוקר. כאשר מבוא האפשר (E) הוא 1, הנועל פעיל. כלומר: מבוא האפשר פעיל בגבוה, כלומר כאשר במבוא האפשר קיים '1'.

לעתים מבוא האפשר פעיל בנמוך. כלומר, כאשר $E=0$, הנועל פעיל. אם $E=1$, הנועל שומר על מצבו הקודם. ההיפוך במבוא E (איור 7.15 ב.2, ד) מציין כי המבוא פעיל בנמוך.

7.4 דפקי שעון במערכות עקיבה

בסעיף הקודם למדנו כי ניתן לקבוע את מצבו של נועל באמצעות מבואות העירור שלו ומבוא האפשר. הפעולה שבאמצעותה קובעים את מצבו של הנועל נקראת **דרבון** (Trigger). לדוגמה, דרבון נועל SR בסיסי נעשה באמצעות מבואות העירור.

נועלים מבוקרים מדורבנים באמצעות מבוא האפשר שלהם. כלומר, עם עליית מבוא האפשר רגישים הנועלים למבואות העירור שלהם (המבואות SR - בנועל SR מבוקר, או המבוא D - בנועל D מבוקר), וכך נקבע מצב הנועלים.

כדי להפעיל נועל מבוקר רק בזמנים מסוימים, יש לספק **דופק** למבוא האפשר. דופק נוצר כתוצאה משינוי כפול ברמה הלוגית. למשל, כתוצאה משינוי מ-0 ל-1, ולאחריו שינוי מ-1 ל-0 - נוצר דופק, כמתואר באיור 7.16. כאשר קיים דופק במבוא האפשר, יופעל הנועל בהתאם לצירוף במבואות העירור שלו.

בדוגמה 7-1, בראשית פרק זה, דרוש להפעיל את התקן הזיכרון (הנועלים) פעם בשנייה. באותה דוגמה יש לספק למבוא האפשר דופק אחד בכל שנייה. באיור 7.16 מופיע דופק אחד בכל זמן מחזור T . משתנה לוגי המורכב מדפקים מחזוריים נקרא **שעון** (clock). השעון משמש כקוצב האירועים במערכת שאליה הוא מחובר (בדוגמה 7-1 מחובר השעון למבוא האפשר של הנועל). זמן מחזור השעון באיור 7.16 הוא T .

השעון הוא אפוא משתנה לוגי מחזורי הנמצא ברמה לוגית 1 או ברמה לוגית 0. $t_w(1)$ הוא פרק הזמן שבו ערך השעון הוא 1; $t_w(0)$ הוא פרק הזמן שבו ערך השעון הוא 0. סכומם של שני פרקי הזמן הללו הוא זמן המחזור (T) של השעון*:

$$T = t_w(0) + t_w(1)$$

בפרק הזמן $t_w(1)$ קיים **דופק חיובי** בשעון, ובפרק הזמן $t_w(0)$ קיים **אפס** בשעון. נהוג לסמן את השעון כך: Clk, Ck או Cp. ביחידה זו יסמן Cp (או C_p) את השעון.



שאלה 7.11

עבור דופק שעון נתונים פרקי הזמן הבאים:

$$t_w(1) = 20 \text{ ns}$$

$$t_w(0) = 80 \text{ ns}$$

א. שרטטו את תרשים הזמנים המתאים לדופק השעון. יש לשרטט 3 מחזורים.

ב. מהו זמן המחזור T ?

* t , T מציינות זמן (time); w מציינת רוחב (width).

ג. מהו התדר, f , של דופק השעון?

הערה: $f = \frac{1}{T}$ ** יחידת התדר היא הרץ (Hz):

$$1 \text{ Hz} = \frac{1}{s}$$

כאשר מבוא האפשרות של הנועל פעיל בגבוה, המבוא יופעל בדופק חיובי של השעון. כלומר, בפרק הזמן $t_w(1)$ שבו $Cp=1$. כאשר מבוא האפשרות פעיל בנמוך, הוא יופעל בפרק הזמן $t_w(0)$. לצורך פישוט ההסברים, נתייחס בהמשך לנועלים מבוקרים בעלי מבוא אפשרות פעיל בגבוה.

7.5 דלגלים (Flip-Flop)

הנועלים המבוקרים רגישים למבואות העירור כל זמן שהרמה הלוגית פעילה במבוא האפשרות שלהם. לכן, נועלים אלו **מדורבנים ברמה**.

בפרק זה נעסוק בנועלים מדורבנים **במעבר** ולא **ברמה**. כלומר, **מעבר** בדופק השעון (מ-0 ל-1 או מ-1 ל-0) הוא הגורם לנועלים לשנות את מצבם. בדופק השעון (איור 7.17) יש מעברים חיוביים ושלייליים. מעבר חיובי מתרחש בעליית הרמה הלוגית מ-0 ל-1, ואילו מעבר שלילי מתרחש בירידה מ-1 ל-0. התקני זיכרון אלה נקראים בשם **דלגלים**.

נועל המדורבן במעבר עשוי להיות מדורבן במעבר חיובי או במעבר שלילי. ישנם שני סוגים עיקריים של דלגלים מדורבנים במעבר:

א. דלגלים מדורבני קצה;

ב. דלגלים מסוג אדון-עבד (Master Slave).

בשני סוגי הדלגלים שצינו נפתרת בעיית מגבלות דופק השעון, היות שהשינויים במצב הדלגלים מתרחשים בפרק זמן קצר ביותר (**במעבר** דופק השעון בלבד).

7.5.1 דלגלים מדורבני קצה (Edge Triggered)

כאמור, דלגלים מדורבני קצה מאפשרים לפרק זמן קצר. אף כי קשה להקטין את פרק הזמן של דופק השעון, לא יהיה בכך מכשול לגבי הדלגלים שנתאר בסעיף זה. בדלגלים אלה קיים מנגנון פנימי המאפשר הפעלתם לפרק זמן קצר ביותר. פרק זמן זה צריך להיות ארוך דיו, כך

** f מצוין תדר (frequency); יש המציינים שנייה (s) כר: sec.

שמבואות העירור ישפיעו על קביעת מצבו של הדלגלג; אך פרק זמן זה צריך להיות קצר דיו, כך שלאחר עדכון מצבו של הדלגלג תיחסם השפעתם של מבואות העירור.

דלגלג הפועל על פי העיקרון שתואר לעיל נקרא **דלגלג מדורבן קצה**. מבנה עקרוני של דלגלג מסוג D מדורבן קצה מתואר באיור 7.18.

אל הדלגלג המבוקר מסוג D (איור 7.18) מיתוסף מנגנון שתפקידו להפעיל, לפרק זמן קצר בלבד, את הדלגלג המבוקר. למנגנון כזה קוראים **מעגל גזירה**, היוצר דופק חיובי צר בכל עליית שעון.

באיור 7.19 נתון תרשים זמנים המתאר את מבוא האפשר (E) של הדלגלג כפונקציה של מבוא השעון (Cp) .

בפרק הזמן שבין t_1 ל- t_2 הערך של כל אחד ממבואות הדלגלג הוא 1 ($Cp=1, E=1$), אך מוצא מעגל הגזירה נשאר 0 בגלל זמן ההשהיה. במוצא E מתקבל 1 בפרק זמן קצר בכל מחזור של דופק השעון (במחזור הראשון מתקבל 1 בפרק הזמן שבין t_2 ל- t_3). בכל מצב אחר ערך המוצא E הוא 0. המוצא E משמש כמבוא האפשר של דלגלג מבוקר מסוג D (איור 7.18).

קיבלנו אפוא דופק צר במבוא האפשר של הדלגלג המבוקר. הדופק מופיע כעבור זמן ההשהיה מסוים, $t_2 - t_1$, מרגע המעבר החיובי של דופק השעון. רוחב הדופק הוא t_{pd} . בפרק זמן זה הדלגלג מאופשר, ולכן מבוא הנתון (D) משפיע על מצב הדלגלג. בכל פרק זמן אחר הדלגלג חסום. כלומר, כשדופק השעון יעלה ל-1, יועתק מבוא הנתון D אל המוצא Q , ובכל זמן אחר יישמר ערך זה. לכן, הדלגלג המתואר באיור 7.18 הוא **פעיל בעליית השעון**, או **מדורבן קצה חיובי** (או קצה עולה).

 **תרגול**

שאלה 7.12

תכננו ושרטטנו דלגלג מסוג D , המדורבן קצה שלילי (הפעיל בירידת השעון). שרטטנו גם תרשים זמנים מתאים למעגל הגזירה שתכננתם.

כדי לסמל דלגלג מדורבן במעבר (ולא ברמה), מוסיפים ' > ' ליד מבוא השעון (Cp) , כפי שמופיע באיור 7.20. כאשר הדלגלג מדורבן במעבר שלילי (מדורבן קצה שלילי), מוסיפים גם היפוך ליד מבוא השעון (איור 7.20). סימונים אלה תקפים, כמובן, לא רק לגבי דלגלג SR , אלא לגבי כל דלגלג.

שאלה 7.13

באיור 7.21 נתונה דוגמה להשתנות במבוא הנתון (D) של דלגלג D, מדורבן קצה שלילי.

העתיקו את האיור למחברת והוסיפו את השתנות המוצא Q.

הניחו כי במצב ההתחלתי $Q=0$.

7.6 מערכות עקיבה אסינכרוניות וסינכרוניות

בסעיף זה נדון בקצרה במערכות עקיבה אסינכרוניות וסינכרוניות ונעמוד על השוני ביניהן. נדון

תחילה במערכת אסינכרונית, שאיור עקרוני שלה הצגנו בתחילת הפרק באיור 7.3.

נאמר תחילה כי מוצאן של מערכות עקיבה אסינכרוניות מתעדכן רק כאשר חל שינוי במצב מבואותיה. באיור 7.22 מתואר תרשים מלבנים של מערכת עקיבה אסינכרונית הכולל דלגלג מסוג D הפעיל בגבוה. החצים המרוסקים המופיעים באיור מסמנים את המסלולים שדרכם משפיעים מבואות מערכת הצירופים על מוצאה. כדי שהמערכת שבאיור 7.22 תפעל כשורה, דרוש כי מבואות המערכת ישפיעו על מצב הדלגלג, בהתאם לנתון המחובר למבוא הדלגלג הנוצר במוצאי מערכת הצירופים.

לכל מערכת מעשית דוגמת מערכת צירופים ודלגלג, קיים פרק זמן שהיה. זמן שהיה הוא הזמן שעובר מהרגע שמשנתנה מבוא המערכת עד לזמן שמתעדכן מוצאה. נבדוק את השפעת זמני ההשהיה על המערכת שבדיון. נניח שהמבואות למערכת הצירופים אינם משתנים במשך זמן ארוך יותר מזמן ההשהיה הדרוש לעדכון אות במוצא הדלגלג (זמן זה הוא, למעשה, סכום זמני ההשהיה של מערכת הצירופים וזמן ההשהיה של הדלגלג). במקרה זה תתרחש התופעה הבאה: המבוא D של הדלגלג נקבע לפי מוצא מערכת הצירופים המחובר אליו. ערך מוצא זה של מערכת הצירופים תלוי במבואות המערכת ובמצבו הנוכחי של הדלגלג. מצב הדלגלג יתעדכן אפוא על פי הערך במבוא. במבוא למערכת הצירופים יופיע, עבור אותם אותות, אות שונה של מוצא הדלגלג. מערכת הצירופים תחשב אות מבוא חדש לדלגלג, שישנה שוב את מצבו. מצב מבוא הדלגלג במערכת הצירופים ישתנה שוב, וחוזר חלילה. תופעה זו נקראת **תופעת מרוץ**, והיא פוגעת בפעולתה התקינה של המערכת.

נבחן עתה מצב הפוך, כלומר: מצב שבו מבואות מערכת הצירופים משתנה בפרק זמן קצר מדי. נסביר מה פירוש קצר מדי.

במצב זה, הדלגלג אינו מספיק להתעדכן במידע החדש שבמבואן, מפני שהזמן שבו מידע זה קיים במבוא קצר מזמן ההשהיה של הדלגלג - הזמן הדרוש לדלגלג להתעדכן. הדלגלג ישמור אפוא על מצבו הקודם ופעולת המערכת תשתבש.

מסקנה:

כדי שמערכת העקיבה האסינכרונית, המופיעה באיור 7.22, תפעל כראוי, פרק הזמן שבו מצב המבואות למערכת אינו משתנה צריך להיות שווה **לפחות** לזמן ההשהיה של הדלגלג; עם זאת, עליו להיות **קצר** יותר מזמן ההשהיה הכולל של מערכת הצירופים ושל הדלגלג. מבחינה מעשית, תכנון של מערכת עקיבה אסינכרונית מורכב יחסית לחלופה שלה - מערכת סינכרונית. במערכת סינכרונית מתגברים על הבעיות שהזכרנו באמצעות שימוש בדלגלג קצה ושימוש בשעון דפקים. במערכת סינכרונית מחובר שעון לכל אחד מהדלגלגים. משך הדופק ארוך מספיק כדי שהדלגלגים יגיבו לשינוי מבואם, אך שינוי זה לא יגרום לתופעת מרוץ. על מערכות סינכרוניות נרחיב בהמשך.

נסכם את ההבדלים הבולטים בין שני סוגי המערכות בטבלה שבאיור 7.23, שבחלקם דנו כבר, וחלקם הוספנו לטבלה.

7.7 דלגלגים מסוג אדון-עבד

תופעת המרוץ קיימת במערכת עקיבה אסינכרונית. שימוש בדלגלגים מסוג אדון-עבד (MASTER-SLAVE) מסייע בפתרון הבעיה. הרעיון שלפיו בנויים הדלגלגים מסוג אדון-עבד הוא קטיעת מסלול המרוץ, כלומר: הפרדה בין מבואות הדלגלג למוצאיו.

מימוש הרעיון מודגם באיור 7.25.

באיור 7.25 בחרנו בדוגמה בדלגלג SR, הפועל לפי העיקרון של אדון-עבד. הדלגלג שבאיור 7.25 מורכב משני דלגלגי SR מבוקרים. כאשר דופק השעון (C_p) עולה, פועל מבוא האפשר של הדלגלג הראשון (FF_1), ומבואות העירור (S -ו- R) קובעים את מצב הדלגלג (Y -ו- $\bar{Y}$). כל פרק הזמן $t_w(1)$, כאשר $\bar{C_p} = 1$, רגיש הדלגלג הראשון למבואות העירור (R, S), ואילו הדלגלג השני חסום. נבהיר זאת. מבוא האפשר (E) של FF_1 מחובר למבוא השעון C_p . כאשר $C_p = 1$, $E = 1$ בדלגלג זה, ואילו ערך מבוא האפשר (E) של FF_2 הוא $\bar{C_p}$; וכאשר $\bar{C_p} = 1$, $C_p = 0$.

עם ירידת C_p ל-0, מתרחשים שני מאורעות:

- הדלגלג הראשון (FF_1) נחסם (ערך מבוא האפשר שלו הוא $C_p = 0 = E$).
 - הדלגלג השני (FF_2) מאפשר, כי הוא מקבל את $\bar{C_p}$ ($\bar{C_p} = E = 1$).
- מצב זה מתקיים כל עוד $C_p = 0$ ($\bar{C_p} = 1$), כלומר בפרק הזמן $t_w(0)$.

במשך זמן זה משמשים המוצאים Y ו- $\bar{Y}$ של הדלגלג הראשון כמבואות עירור לדלגלג השני. מבואות אלו קבועים במשך זמן זה, מכיוון שהדלגלג הראשון חסום. המצב המאוחר בדלגלג השני מוצג במוצאים $Q, \bar{Q}$ של הדלגלג המורכב (אדון-עבד).

תמיד כאשר אחד הדלגלגים באיור 7.25 פעיל, השני חסום. במצב כזה לא נוצר מסלול מרוץ. כלומר: הפרדנו בין מבואות הדלגלג (המורכב) למוצאיו. מבואות העירור של הדלגלג המורכב מחוברים אל הדלגלג הראשון, FF_1 . דלגלג זה נקרא **אדון**, כי הוא זה אשר קובע מה יהיה מוצא הדלגלג המורכב.

תפקידו של הדלגלג השני הוא להפריד בין מבואות העירור S ו- R , לבין המוצאים $Q, \bar{Q}$. **דלגלג** זה מעביר את מוצאי הדלגלג הראשון $(\bar{Y}, Y)$ אל מוצאי הדלגלג המורכב $(Q, \bar{Q})$. הדלגלג השני נקרא **עבד**. מבחינת המשתמש בדלגלג SR-MS, המבואות הם R, S והמוצאים הם $Q, \bar{Q}$.

אין המשתמש "רואה" את המתרחש במוצאים $Y, \bar{Y}$ של הדלגלג הראשון. מוצאי הדלגלג המורכב $(Q, \bar{Q})$ מושפעים רק בזמן אפשר העבד, כלומר: בירידת דופק השעון מ-1 ל-0. לכן הדלגלג המתואר באיור 7.25 **מדורבן במעבר שלילי** (של דופק השעון), או "פעיל בירידת השעון".

הסימול של דלגלגים מסוג אדון-עבד זהה לסימול של דלגלגים מדורבני קצה (שני סוגי הדלגלגים מדורבנים במעבר). לעתים, כדי להפריד בין שני הסוגים, מוסיפים בתוך מסגרת הדלגלג את האותיות M-S עבור דלגלג מסוג אדון-עבד, ו-E-T עבור דלגלג **מדורבן קצה**.*

תרגול

שאלה 7.14

באיור 7.26 נתונה דוגמה להשתנות מבואות העירור ומבוא השעון של הדלגלג SR-MS שבאיור 7.25. הוסיפו את השתנות המוצא Q , בהנחה שהמצב ההתחלתי $Q=0$.

שאלה 7.15

שרטטו דלגלג מסוג D, הבנוי לפי העיקרון של "אדון-עבד". נתון כי הדלגלג פעיל **בעליית** דופק השעון.

* לעתים נקראים **דלגלגים מדורבנים במעבר** גם **דלגלגים מדורבני קצה**. לפי הגדרה זו, גם דלגלגים מסוג אדון-עבד הם מדורבני קצה. אנו העדפנו לכלול בספר זה את דלגלגי אדון-עבד ומדורבני קצה תחת הכותרת **דלגלגים מדורבנים במעבר**.

7.8 סוגי דלגלים נפוצים

עד כה דנו בשני סוגי דלגלים: SR ו-D. בפרק זה נדון בשני סוגים אחרים של דלגלים נפוצים מאוד: JK ו-T.

7.8.1 דלגלג JK

עסקנו קודם בדלגלג SR, הן בסיסי והן מבוקר. כאמור, צירוף מבואות העירור $1,1=R,S$ אסור בדלגלים אלה. איסור זה מגביל את המתכנן המשתמש בדלגלג SR. באמצעות תוספת פשוטה לדלגלג זה אפשר לבנות דלגלג שבו כל הצירופים במבואות העירור יהיו מותרים. דלגלג כזה נקרא **דלגלג JK**. באיור 7.27 בחרנו בתצורת אדון-עבד של דלגלג זה.

ננתח את פעולת הדלגלג JK שבאיור 7.27. כאשר $C_p=0$, האדון אינו מאפשר, ולכן הדלגלג שומר על מצבו. מתייחס אפוא למקרה שבו $C_p=1$.

א. $J=0, K=0$

בצירוף זה $S=0, R=0$ באדון (FF_1) , לכן מוצא הדלגלג JK נשאר ללא שינוי.

ב. $J=1, K=0$

נניח שבמצב הקודם היה הדלגלג JK במצב 0 ($\bar{Q} = 0, Q = 0$). המבוא S של האדון הוא מוצא השער g_1 . במוצא זה קיים 1 ($J \cdot \bar{Q} = 1$), ובמבוא R של הדלגלג (מוצא השער g_2) קיים 0. לכן המוצא Q הוא 1. אם הדלגלג JK היה קודם במצב 1 (כלומר $\bar{Q} = 0, Q = 1$), נקבל באדון $S=0, R=0$; והדלגלג ישמור על מצבו, כלומר $Q=1$.

מסקנה:

כאשר $K=0$ ו- $J=1$, מתקבל $Q=1$.

 **תרגול**

שאלה 7.16

נתחו את צירוף המבואות $K=1, J=0$ בדלגלג מסוג JK שבאיור 7.27.

בשלושת הצירופים של J,K שנתחנו עד כה, ראינו כי דלגלג (אדון-עבד) JK שקול בפעולתו לדלגלג (אדון-עבד) SR, כך ש-J מתאים ל-S, ו-K מתאים ל-R.

ג. $J=1, K=1$

נניח שהמצב הקודם היה 0 ($\bar{Q} = 1, Q = 0$). באדון (FF_1)

נקבל: $S = J \cdot \bar{Q} = 1$, $R = K \cdot \bar{Q} = 0$, לכן Q ישתנה ל-1.

נניח שהמצב הקודם היה 1 ($\bar{Q} = 0, Q = 1$). נקבל: $S = 1$, $R = 1$, ולכן Q ישתנה ל-0.

מסקנה:

כאשר $K=1$ ו- $J=1$, משתנה מצבו של Q, כלומר $Q = \bar{Q}$ (המצב החדש הוא היפוכו של המצב הקודם).

טבלת המצבים של דלגלג מסוג JK, בצד סימול הדלגלג, נתונים באיור 7.28.

באיור 7.27 מתואר דלגלג JK אדון-עבד. דלגלג זה פעיל בירידת דופק השעון (ואז דלגלג העבד מאופשר, ודלגלג האדון נחסם).

כאמור, אפשר להוסיף את האותיות M-S (Master-Slave) לסימול דלגלג, כדי לציין שזהו דלגלג אדון-עבד. קיימים גם דלגלגים מסוג JK מדורבני קצה. הסימול באיור 7.28 מתאים גם לדלגלגים אלו.



שאלה 7.17

באיור 7.29 נתון דלגלג JK מבוקר. האם דלגלג זה יעבוד כשורה, בהתאם לטבלת המצבים שבאיור 7.28? נמקו את תשובתכם.

הערה: שימו לב למיקום הסימונים J, K ו- S, R באיור זה.

7.8.2 דלגלג T (Toggle)

באיור 7.30 משורטט הסימול של דלגלג T. כאשר $T=1$, יחליף הדלגלג את מצבו בכל מעבר פעיל. כאשר $T=0$, יישמר המצב הקודם בדלגלג.

ניתן לממש דלגלג T, תוך שימוש בדלגלג JK מדורבן במעבר, באמצעות חיבור המבואות K, J זה לזה (איור 7.30 ב). באיור זה נתון דלגלג JK המדורבן במעבר שלילי, ולכן גם הדלגלג T מדורבן במעבר שלילי. ניתן, כמובן, לבנות דלגלג T מדורבן במעבר חיובי אם משתמשים בדלגלג JK הפועל כך.

באיור 7.30 ג נתון תרשים זמנים המדגים את פעולת הדלגלג T. נסביר תרשים זה.

המוצא Q היה 0 בהתחלה. בכל מעבר פעיל (במקרה זה – ירידת דופק השעון) מתנהג Q בהתאם למבוא העירור T . אם $T=1$ ($J=K=1$), הדלגלג משנה את מצבו. כאשר $T=0$ ($J=K=0$), שומר הדלגלג על מצבו הקודם.

תרגול

שאלה 7.18

באיור 7.31 נתון דלגלג D המדורבן מעבר חיובי. שרטטו את השינויים הדרושים בדלגלג זה כדי שיפעל כמו דלגלג T , שבו $T=1$ באופן קבוע. כלומר: בכל עליית דופק שעון יחליף הדלגלג את מצבו.

סוגי הדלגלגים אשר תיארונו בסעיף זה, בנוסף לאלו שתוארו בסעיפים הקודמים, הם הנפוצים ביותר.

7.9 מבואות ישירים לדלגלג

הדלגלגים שבהם עסקנו עד כה היו בעלי מבואות עירור, ולחלק מהדלגלגים היו גם מבוא אפשרי או שעון. קיימים, בדרך כלל, מבואות נוספים לדלגלג כדי לקבוע את מצבו ההתחלתי (0 או 1), בלי תלות במבואות העירור והשעון. המבואות הנוספים נקראים **מבואות ישירים**. השם **ישיר** בא לציין שניתן לקבוע ישירות את מצב הדלגלג, בלי תלות במבואות העירור והשעון.

כבר בדוגמה 7-1 (בראשית פרק זה) תיארונו את הצורך באיפוס התקן הזיכרון (הדלגלגים), כדי לקבל את המצב ההתחלתי הדרוש למערכת אשר באיור 7.5. לעתים דרוש דווקא לקבוע את מצבו ההתחלתי של הנועל ב-1. לצרכים אלו משמשים, כאמור, המבואות הישירים. נועל SR מבוקר, בתוספת המבואות הישירים, מתואר באיור 7.32. גם לשאר הנועלים, שתיארונו עד כה, ניתן להוסיף בצורה דומה מבואות ישירים. המבואות הישירים עשויים להיות פעילים בגבוה או פעילים בנמוך. המבואות הישירים באיור 7.32 פעילים בנמוך.

המבוא הישיר העליון שבאיור 7.32 נקרא **מבוא איפוס**, וסימונו $Clear$. מבוא זה גורם לאיפוס הנועל: $Q=0$. המבוא השני נקרא $PRESET^*$. SET מציין שדרוש כי $Q=1$, והתוספת PRE מציינת שזהו הערך ההתחלתי הדרוש. כאשר $Q=0$, $\overline{Clear} = 0$; וכאשר $Q=1$, $\overline{PRESET} = 0$ (באופן בלתי תלוי במבואות העירור והאפשר).

ננתח עתה את פעולת הנועל שבאיור 7.32.

$$\overline{PRESET} = 1, \overline{Clear} = 1 \quad \text{א.}$$

* $PRESET$, $Clear$ - מבואות ישירים לקביעת מצבו ההתחלתי של הנועל.

המבואות הישירים בצירוף זה אינם פעילים (כי הם פעילים בנמוך). מוצאי השערים g_5 ו- g_6 הם $Q = Y$ ו- $\bar{Q} = \bar{Y}$, בהתאמה. כלומר, מתקבל נועל SR מבוקר רגיל.

$$\text{ב. } \overline{PRESET} = 1, \overline{Clear} = 0$$

המבוא Clear פעיל. במוצא g_5 מתקבל 0, בלי תלות ב-Y, לכן $Q=0$. ערך זה של Q גורם לכך שבמוצא g_4 יתקבל $\bar{Y} = 1$. המבואות לשער g_6 הם $\overline{PRESET} = 1$ ו- $\bar{Y} = 1$, ולכן במוצאו מתקבל $\bar{Q} = 1$.

מסקנה:

$\overline{PRESET} = 1, \overline{Clear} = 0$ גורמים ל- $Q=0$ ($\bar{Q} = 1$), באופן בלתי תלוי במבואות האפשר.

$$\text{ג. } \overline{PRESET} = 0, \overline{Clear} = 1$$

 תרגול

שאלה 7.19

נתחו את צירופי המבואות הישירים $\overline{PRESET} = 0, \overline{Clear} = 1$ עבור הנועל שבאיור 7.32.

ד. הצירוף $\overline{PRESET} = 0, \overline{Clear} = 0$ הוא **צירוף אסור**. בצירוף זה שני המבואות הישירים פעילים, ובמוצא מתקבל $Q = \bar{Q} = 0$, שהוא מצב אסור.

כאמור, המבואות הישירים אינם תלויים במבוא האפשר (או השעון). המבואות הישירים נקראים גם מבואות **אסינכרוניים**, מכיוון שאין הם מתוזמנים. לעומת זאת, מבואות העירור הם מתוזמנים (בתלות במבוא האפשר או השעון). סימול נועל SR מבוקר, בעל מבואות ישירים, נתון באיור 7.33. תיאור מפורט יותר של הסימול אשר באיור 7.33, נתון באיור 7.32.

באיור 7.33 מופיעים סימונים מקוצרים למבואות הישירים: CLR במקום Clear, ו-PR במקום PRESET. ישנם גם סימונים אחרים למבואות אלו. הנה הנפוצים שביניהם:

מבוא Clear: $RESET, R_D$

מבוא PRESET: SET, S_D

הסימון R_D מציין Reset Direct (איפוס ישיר), להבדילו ממבוא העירור המסומן R . בצורה דומה, S_D מציין Set Direct (קביעה ישירה).

7.10 אוגרים (Registers)

בסעיפים הקודמים בפרק זה ראינו כי לעתים דרושים מספר התקני זיכרון הפועלים יחדיו, למשל: במערכת עקיבה, אשר בה דרוש (בין השאר) לזכור את ערכו של מספר בינארי המורכב מסיביות אחדות. כדי שהמערכת תזכור זאת, עליה לכלול (בין השאר) התקני זיכרון, כמספר הסיביות של המספר. מערכת כזאת נדונה כבר קודם, והיא מתוארת שוב באיור 7.34.

ניתן לממש אוגרים באמצעות נועלים ובאמצעות דלגלים. בעזרת הדלגלים שבאיור 7.34 נשמר ("נאגר") המספר $N = n_3n_2n_1n_0$. בכל עליית דופק שעון, Cp , מתעדכן ערכו של N . דופק השעון מחובר לכל הדלגלים, משום שדרוש לעדכן בבת אחת את כל סיביות המספר N . גם מבוא האיפוס, $\overline{CLR}$, המשמש לאיפוס הדלגלים כאשר מתחילים את המנייה, מחובר למבוא האיפוס הישיר של כל הדלגלים.

הגדרה

מספר התקני זיכרון המופעלים יחדיו, כיחידה אחת, נקראים אוגר. תפקידו של האוגר, כשמו, הוא לאגור נתון בינארי. מספר סיביות האוגר, או מספר הדלגלים באוגר, הוא כמספר הסיביות שיש לאגור.

באיור 7.34 ישנם ארבעה דלגלים המופעלים יחדיו (דופק השעון ומבוא האיפוס מחוברים לכולם), והם נקראים **אוגר לארבע סיביות**.

בסעיפים הבאים נדון במספר סוגים של אוגרים.

7.10.1 אוגר מקבילי

אוגר מקבילי הוא אוגר אשר ניתן לטעון לתוכו בבת אחת ("במקביל") מספר סיביות - וכמספר הסיביות גם מספר המוצאים של אוגר זה.

אוגר מקבילי נקרא אוגר PIPO (Parallel Input Parallel Out). באיור 7.35 תמצאו שני אופנים למימוש אוגר מקבילי בעל ארבע סיביות: האחד באמצעות נועלי D מבוקרים, והשני באמצעות

דלגלי D מדורבנים במעבר. גם ארבעת הדלגלים באיור 7.34 משמשים כאוגר מקבילי לארבע סיביות.

נדון תחילה באוגר שבאיור 7.35. מדוע האפשר (E) של האוגר מחובר למבוא האפשר של כל אחד מארבעת הדלגלים? כאשר E פעיל $(E=1)$, האוגר שקוף. כלומר מבואות הנתון D_0, D_1, D_2 ו- D_3 מופיעים במוצאיו Q_0, Q_1, Q_2 ו- Q_3 , בהתאמה. עקב ירידת E ל-0, **ננעל** הנתון האחרון שהיה באוגר. כל עוד $E=0$, מצב האוגר נשאר ללא שינוי.

אוגר זה הוא אפוא **נועל ל-4 סיביות**. למבוא האפשר נהוג לקרוא אפשר נועל ולסמנו LE .

הנועלים משמשים לאחסון נתונים בינאריים. אי-אפשר להשתמש בנועל כהתקן זיכרון במערכות עקיבה. לעומת זאת, האוגר שבאיור 7.35 יכול לתפקד כהתקן כזה, מאחר שאוגר זה מדורבן במעבר.

הדלגלים באיור 7.35 מדורבנים במעבר חיובי. אפשר לבנות את האוגר באמצעות דלגלים מדורבני קצה או מסוג אדון-עבד. עדכון מצב האוגר הוא בהתאם למבואות $(D_0, D_1, D_2$ ו- $D_3)$. ניתן לעדכן את מצב האוגר רק בכל עליית דופק שעון, ולא בפרקי זמן אחרים. עובדה זו מגבילה מאוד את המתכנן, ולכן מוסיפים בדרך כלל לאוגר כזה גם מבוא אפשר טעינה, שיידון להלן. באמצעות מבוא זה ובאמצעות דופק השעון ניתן לטעון את האוגר בזמן רצוי (ולאו דווקא בכל דופק שעון). באיור 7.36 מתואר אוגר מקבילי בעל מבוא טעינה $Load$. נוח להשתמש באוגר כזה בדלגלים מסוג SR. ה"שערים" g_1, g_2 ו- g_3 שבאיור 7.35 נקראים **חוצצים**. הרמה הלוגית במוצא החוצץ זהה לרמה הלוגית שבמבואו. לכן אין לחוצצים השפעה מבחינה לוגית ונתעלם מקיומם.

נניח תחילה שמבוא האיפוס אינו פעיל, כלומר $\overline{Clear} = 1$, וננתח את פעולת האוגר.

א. $Load=0$

כאשר מבוא הטעינה ($Load$) הוא 0, מקבלים כל מבואות העירור של הדלגלים את הצירוף $0,0=R,S$, לכן שומרים הדלגלים על מצבם הקודם.

ב. $Load=1$

כאשר מבוא הטעינה הוא 1, במבואות העירור של הדלגל העליון מתקבל הצירוף $S = D_0$ ו- $R = \bar{D}_0$. מצב זה שקול להפעלת דלגל SR כדלגל D (ראו איור 7.13). באותו אופן גם שאר הדלגלים פועלים כדלגלי D עבור המבואות המתאימים $(D_1, D_2$ ו- $D_3)$. הדלגלים שבאיור 7.36 הם מדורבני מעבר שלילי, לכן כאשר דופק השעון יורד ו- $Load=1$, ייקבע מצב הדלגלים בהתאם למבואות הנתון $(D_0, D_1, D_2$ ו- $D_3)$.

מסקנה:

כאשר $Load=0$, שומר האוגר על מצבו; כאשר $Load=1$, ניתן לקבוע את מצב האוגר בעת המעבר הפעיל בדופק השעון. מצב האוגר נקבע בעזרת המבואות D_0, D_1, D_2 ו- D_3 .

כאשר מבוא האיפוס פעיל, ($\overline{Clear} = 0$), יתאפסו באופן אסינכרוני כל הדלגלים המרכיבים את האוגר, בלי תלות במבואות הנתון, במבואות הטעינה ובדופק השעון.

תרגול **שאלה 7.20**

בתרשים הזמנים שבאיור 7.37 הסתפקנו בתיאור שני מבואות נתון (D_0 ו- D_1) מתוך הארבעה הקיימים באוגר שבאיור 7.36.

שרטטו את תרשים הזמנים של המוצאים Q_0 ו- Q_1 עבור אוגר זה.

באיור 7.38 מתואר אוגר מקבילי בעל מבוא טעינה ומבוא איפוס. אוגר זה ממומש באמצעות דלגלים מסוג SR. כאשר מבוא הטעינה אינו פעיל ($Load = 0$), $S=0$, $R=0$ בכל דלגלג, לכן הדלגלים שומרים על מצבם הקודם.

אפשר לממש אוגר מקבילי, בעל מבוא טעינה ומבוא איפוס, גם באמצעות דלגלים מסוג D. לדלגלים אלו מבוא עירור אחד, D, הקובע את הערך שייטען בדלגלג. כאשר מבוא הטעינה אינו פעיל, דרוש לשמור על המצב הקודם שהיה בדלגלים. באיור 7.38 נתון פתרון אפשרי לאוגר מקבילי בעל דלגלים מסוג D, המדורבנים במעבר חיובי.

כל אחד מהמהפכים, g_1 ו- g_2 (איור 7.38), משמש כחוצץ מהפך. שני המהפכים יחדיו – כשמבוא אחד מחובר למוצא קודמו – משמשים כחוצץ רגיל (ללא היפוך).

תרגול **שאלה 7.21**

הסבירו בקצרה את פעולתו של האוגר המקבילי שבאיור 7.38. התרכזו בתשובתכם בשתי הרמות הלוגיות שבמבוא הטעינה Load.

7.10.2 אוגר הזזה (Shift Register)

אוגר שבו ניתן להזיז את הנתונים הבינאריים (האגורים בו) ימינה או שמאלה, נקרא **אוגר הזזה**. אוגר הזזה בנוי מדלגלים המחוברים זה לזה בטור, כך שמוצא דלגלג אחד משמש

כמבוא הדלגלג הבא בשרשרת (איור 7.39). כל הדלגלגים מחוברים לאותו דופק שעון. דופק השעון קובע את הזמן לביצוע הזזה אחת של הנתונים הבינאריים שבאוגר ההזזה.

אוגר הזזה בסיסי

באיור 7.39 מתוארים שני מבנים בסיסיים של אוגר הזזה ימינה. לכל אוגר יש **מבוא טורי** (SI-Serial Input) ו**מוצא טורי** (SO-Serial Output). אוגר אחד (איור 7.39א) בנוי מדלגלגים מסוג D והאוגר השני (איור 7.39ב) בנוי מדלגלגים מסוג JK.

הדלגלגים באיור 7.39א פעילים במעבר חיובי. דלגלגים אלה מחוברים ביניהם בטור, כך שמוצא של דלגלג אחד משמש כמבוא של הדלגלג שמימינו. לכן, במוצא של דלגלג מסוים יופיע (לאחר המעבר הפעיל בדופק השעון) הערך הלוגי, שהיה קודם לכן במוצא הדלגלג שמשמאלו. כלומר: בכל עליית דופק שעון, המצב הבינארי - האוגר בדלגלגים - מוזז ימינה בסיבית אחת. אוגר כזה הוא **אוגר הזזה ימינה**.

התוכן (כלומר המצב) של FF_3 עובר ל- FF_2 , מ- FF_2 ל- FF_1 , ומ- FF_1 ל- FF_0 . למקום המתפנה ב- FF_3 מועבר הערך הלוגי שבמבוא הטורי SI. המוצא הטורי (SO) הוא המוצא Q_0 של הדלגלג הימני ביותר (FF_0). הסיבית (כלומר, הערך הקודם של Q_0) שהייתה בדלגלג FF_0 - אובדת.



דוגמה 7-2

נניח שמצב האוגר שבאיור 7.39, **לפני** עליית דופק השעון, הוא $Q_2 = 0101, Q_3 = 0$ ($Q_0 = 1, Q_1 = 0, Q_2 = 1, Q_3 = 0$). במבוא הטורי קיים $SI=1$.

מה יהיה מצב האוגר **לאחר** עליית דופק השעון?

פתרון

הנתונים האגורים באוגר ההזזה יוזזו בסיבית אחת (איור 7.40).

כפי שניתן לראות באיור 7.40, הסיבית שהייתה אגורה בדלגלג FF_0 לפני עליית דופק השעון, אובדת כתוצאה מהתזוזה ימינה (בעליית דופק השעון), והערך הלוגי שהיה במבוא הטורי SI עובר עתה ל- FF_3 .



שאלה 7.22

אוגר ההזזה שבאיור 7.39ב מורכב מדלגלגים מסוג JK, הפעילים בירידת דופק השעון.

- א. הסבירו בקצרה את פעולתו של אוגר הזזה זה.
- ב. האם ניתן לממש אוגר הזזה תוך שימוש בדלגלים (פעילים ברמה) מבוקרים? נמקו את תשובתכם.
- אחת הדרישות ממערכות ספרתיות מסוימות היא העברת נתונים (בעלי 8 סיביות, למשל) ממקום למקום. באחד המימושים של מערכת כזאת משתמשים במספר קווים במקביל להעברת הנתון - קו עבור כל סיבית. מימוש כזה הוא יקר ובלתי מעשי, בגלל המחיר הגבוה של הקווים וקשיי התקנתם (כאשר שני המקומות מרוחקים זה מזה).
- במימוש מעשי יותר פועלת המערכת הספרתית באופן טורי. כלומר: בכל רגע ורגע מועברת ו/או מעובדת בה סיבית אחת לכל היותר.
- שימוש במערכת ספרתית הפועלת באופן טורי יאפשר להעביר את סיביות הנתונים באופן טורי, בזו אחר זו, במקום לשלחן במקביל (בבת אחת) על כל הקווים. בצורה כזו, במקום להשתמש במספר קווים כמספר סיביות של הנתון, דרוש קו אחד להעברת הנתון, סיבית אחת בכל פעם. בנוסף לקו הנתון (הקו המשמש להעברת הנתון), דרוש קו לסינכרון. בקו זה יועבר דופק השעון. מעבר פעיל בדופק השעון יציין את הרגע שבו יש לבצע הזזה באוגר ההזזה, כך שהסיבית שבקו הנתון תיקלט כהלכה. באיור 7.41 נתון תיאור סכמטי של מערכת ספרתית, הפועלת באופן טורי להעברת נתונים.
- נתאר עתה את תהליך ההעברה של נתון אחד מהמשדר (מקום א) אל המקלט (מקום ב). נניח כי בתחילת הפעולה נטען - במקביל - הנתון באוגר ההזזה ¹* שבצד המשדר. לאחר מכן מתחיל שידור הנתון. בכל מעבר פעיל של דופק השעון מועברת סיבית המוצא מאוגר ההזזה 1 אל סיבית המבוא של אוגר ההזזה 2 (שבצד הקולט). לאחר מספר דפקי שעון, כמספר הסיביות בנתון, מסתיים תהליך סינכרוני של העברת הנתון מהמשדר אל המקלט.
- העברת נתון בעל 8 סיביות דורשת אפוא 8 דפקי שעון. במערכת שבה קיימים 8 קווי נתון, אפשר להעביר נתון כזה - בדופק שעון בודד. אם כן, פעולת מערכת טורית (בעלת קו נתון אחד) איטית יותר מזו של מערכת בעלת מספר קווי נתון. מובן כי במערכת הטורית דרושים פחות קווים להעברת הנתון.

* * *

אוגרי ההזזה שתיארנו באיור 7.41 היו בעלי מבוא טורי (SI) ומוצא טורי (SO). אוגר כזה

* בהמשך נלמד כיצד לטעון נתון, במקביל, לכל דלגלי אוגר ההזזה.

נקרא SISO (Serial Input Serial Output). במערכות מסוימות דרוש מבוא מקבילי (PI – Parallel Input) ומוצא מקבילי (PO-Parallel Output), ובמערכות אחרות דרוש שילוב של מבוא מקבילי ומוצא טורי - ולהיפך. למשל, בצד המשדר דרוש אוגר בעל מבוא טורי ומוצא טורי (PISO), ואילו בצד המקלט דרוש אוגר בעל מבוא טורי ומוצא מקבילי (SIPO). בצד המשדר יש לטעון את אוגר ההזזה בנתון המיועד לשידור. מקובל לעשות זאת בצורה מקבילה (PI), מאחר שהטעינה מהירה יותר (הנתון המיועד לשידור כולל שתי סיביות לפחות).

מוצאו הטורי של האוגר מיועד לשידור סיבית אחת בלבד בכל דופק שעון. בצד המקלט יש לקלוט את הסיביות ששודרו בטור, ולכן מבוא האוגר צריך להיות טורי (SI). בסוף התהליך יש להציג במקביל (בבת אחת) את סיביות הנתון במוצא האוגר. מכאן שהמוצא של אוגר זה צריך להיות מקבילי (PO).

בסעיף הבא נתאר אוגר הזזה רב-שימושי ("אוניברסלי"), אשר ישלב את כל ארבעת סוגי האתרים (SIPO, PISO, SISO, PIPO) וגם אפשר לבצע הזזה ימינה ושמאלה.

אוגרי הזזה דו-כיווניים

א. אוגר הזזה דו-כיווני

אוגרי ההזזה שבאיור 7.41 מבצעים הזזה ימינה בלבד. כדי לבצע הזזה שמאלה, יש להפוך את הסדר, כך שהמבוא הטורי יחובר לדלגלג הימני ביותר, FF_0 (איור 7.42א); המוצא של דלגלג זה יחובר למבואו של הדלגלג שמשמאלו; וכך הלאה (Q_0 מחובר ל- D_1 , Q_1 ל- D_2). המוצא של הדלגלג האחרון (FF_2) יהיה המוצא הטורי (S_0).

באיור 7.42 מתואר אוגר הזזה עם אפשרות להזזה ימינה או שמאלה, תוך תלות במבוא הבקרה RIGHT. אל המבוא D (D_0 בדלגלג FF_0 וכו') של כל דלגלג מחובר המוצא של מרבב $2 \rightarrow 1$. למבוא X_1 של כל בורר (מלבד המרבב השמאלי ביותר) מחובר מוצא הדלגלג שמשמאלו, לצורך הזזה ימינה (למשל, הזזה של Q_1 – דרך X_1 – ל- D_0), ואל X_0 מחובר מוצא הדלגלג שמימינו (הזזה שמאלה).

המבואות הטוריים של האוגר באיור 7.42 הם SIR ו- SIL , כלומר: מבוא טורי ימינה ומבוא טורי שמאלה, והמוצאים הטוריים הם SOR ו- SOL .*

* SIR, SIL, SOR, SOL .

SI – מבוא טורי.

SO – מוצא טורי.

R – ימינה.

L – שמאלה.

תרגול

שאלה 7.23

מה יהיה ערכו של מבוא הבקרה (*RIGHT*) שבאיור 7.42 לצורך הזזה ימינה ; ומה יהיה ערכו לצורך הזזה שמאלה?

ב. אוגר הזזה דו-כיווני אוניברסלי

עד עתה הראינו הזזה ימינה והזזה שמאלה באוגר הזזה. נדון עתה באוגר הזזה דו-כיווני אוניברסלי המשלב את ארבעת סוגי האתרים (*PIPO, PISO, SIPO, SISO*), בנוסף להזזה הדו-כיוונית (ימינה ושמאלה). באיור 7.43 נתון התיאור הכללי של אוגר זה.

לאוגר שבאיור 7.43 שני מבואות בקרה (S_1, S_0) .

כאשר הצירוף במבואות אלו הוא $S_1, S_0 = 0, 0$, האוגר שומר על מצבו.

עבור הצירוף $S_0 = 1$ ו- $S_1 = 0$ מתבצעת הזזה ימינה ;

ועבור הצירוף $S_0 = 0$ ו- $S_1 = 1$ מתבצעת הזזה שמאלה (ההזזות מתבצעות בעת עליית דופק השעון).

כאשר הצירוף במבואות הבקרה הוא $S_0 = 0$ ו- $S_1 = 1$, הדלגלים באוגר נטענים במקביל מסיביות הנתון D_0, D_1, D_2 ו- D_3 (עם עליית דופק השעון).

SIR הוא מבוא הנתון הטורי בהזזה ימינה (איור 7.43א), ו- *SIL* הוא מבוא הנתון המתאים בהזזה שמאלה. בנוסף לכך, קיים המבוא *CLR* לאיפוס האוגר. מבוא זה הוא אסינכרוני ופעיל בנמוך.

תרגול

שאלה 7.24

בטבלה הבאה (איור 7.44) רשומים צירופים אחדים של מבואות האוגר שבאיור 7.43 לפני עליית דופק השעון.

השלימו את הטבלה: רשמו את המוצאים המתקבלים לאחר עליית דופק השעון. הסבירו בקצרה את תשובתכם על פי הדוגמה אשר בטור ההערות שבטבלה.

רעיון המימוש של אוגר זה באמצעות מרבבים דומה לזה של אוגר ההזזה הדו-כיווני, אך הוא לא יתואר כאן.

7.11 מונים (Counters)

סיווג מונים

היכולת **למנות** קיימת במערכות ספרתיות רבות. השעון הספרתי הוא דוגמה למערכת ספרתית כזאת. שעון כזה מסוגל למנות שניות, דקות ושעות. במערכת לספירת פירות (איור 7.5) הייתה דרושה **מנייה** של חפירות.

הגדרה

מונה (ספרתי) הוא מערכת ספרתית המסוגלת למנות את מספר דפקי השעון המוזנים למבוא דופק השעון, ולהפיק במוצאה מספר זה בצופן ספרתי (בדרך כלל – בינארי).

סימול לוגי של מונה מופיע באיור 7.45. למונה זה יש n מבואות מקבילים, $D_0 \dots D_{n-1}$, שדרכם ניתן לטעון למונה מצב התחלתי מסוים.

למונה עשויים להיות מספר מבואות בקרה, שעל חלקם כבר למדנו בעבר. דוגמאות למבואות בקרה:

- מבוא טעינה (*Load*) – מאפשר לטעון אל המונה את הנתון $D_0 \dots D_{n-1}$ שבמבואותיו.
 - מבוא איפוס (*Clear*) – לאיפוס המונה.
 - מבוא המאפשר מנייה (*COUNT ENABLE*) – כאשר מבוא זה פעיל, יספור המונה את דפקי השעון (Cp); כאשר מבוא זה אינו פעיל, ישמור המונה על מצבו.
- מצבו של המונה מוצג במוצאיו $Q_0 \dots Q_{n-1}$.

לפי המבנה הפנימי, אפשר לסווג את המונים לשני סוגים עיקריים. כל אחד ממונים אלה מורכב ממספר דלגלים.

א. מונה סינכרוני

במונה זה מחובר דופק השעון לכל מבואות השעון של הדלגלים.

ב. מונה אסינכרוני

במונה אסינכרוני קיים לפחות דלגלג אחד שמבוא השעון שלו אינו מחובר (ישירות) לדופק השעון.

בנוסף לסיווג של המונים לשני סוגים (סינכרוניים ואסינכרוניים), קיימים סוגים נוספים של מונים, בהתאם לתכונותיהם. מרבית המונים שנכיר הם **מונים מחזוריים**. נתבונן, למשל, באופן

המנייה של השעון הספרתי: מונה השניות, למשל, מונה מ-0 עד 59 שניות, ובמנייה הבאה ערכו מתאפס, וחוזר חלילה. מחזור המנייה של מונה השניות בשעון הוא אפוא 60.

לעומת זאת, מונה השעות מונה מ-0 עד 23, ולאחר מכן הוא מתאפס. מחזור המנייה שלו הוא 24.

מונה החוזר למצבו ההתחלתי לאחר כל N מניות נקרא **מונה מחזורי מודולו N** או **מונה מודולו N** . מונה השניות הוא אפוא **מונה מודולו 60**, ואילו מונה השעות הוא **מונה מודולו 24**.

המונים מודולו N הפשוטים ביותר למימוש הם אלה שמחזור המנייה שלהם הוא חזקה של 2 (כמו 2, 4, 8, 16 וכדומה), כלומר:

$$N = 2^k; \quad K = 1, 2, 3 \dots$$

עם זאת, נפוצים גם מונים בעלי מחזורי מנייה אחרים, למשל מונה עשרוני (10).

מונה עשוי לספור כלפי מעלה, כמו מונה השניות בשעון, אך גם עשוי לספור כלפי מטה, כמו המונה הספרתי בעת שיגור לווין. מונה הסופר כלפי מעלה נקרא **מונה מעלה** (Up Counter); ומונה הסופר כלפי מטה נקרא **מונה מטה** (Down Counter).

עד כה עסקנו בהגדרת מונים, בסעיפים הבאים נלמד על המבנה ועל אופן הפעולה של המונים השונים.

7.11.1 מונה אסינכרוני

מונה אסינכרוני, הממומש באמצעות חיבור טורי של דלגלי T המדורבנים במעבר, נקרא **מונה גלי**. בטרם נתאר את המבנה של מונה כזה, ניעזר בשאלה הבאה כתזכורת לאופן פעולתו של הדלגל ממנו הוא מורכב.

 **תרגול**

7.25 שאלה

נתון דלגל JK, שמבואות העירור שלו (J ו- K) מחוברים ביניהם וערכם 1, כמתואר באיור 7.46א.

א. השלימו את תרשים הזמנים שבאיור 7.46ב.

ב. יהיה f_{IN} התדר של השעון שבמבוא Cp של הדלגלג, ויהיה f_{OUT} התדר המתקבל במוצא Q של הדלגלג. בטאו את f_{OUT} באמצעות f_{IN} .

הדלגלג שבאיור 7.46 נקרא גם מחלק תדר. יחס החלוקה (f_{IN}/f_{OUT}) של דלגלג בודד כזה הוא 2.

מונה מעלה (Up Counter)

בדוגמה הבאה נתכנן מונה מעלה אסינכרוני הסופר בצורה בינארית באמצעות דלגלגים מסוג T , שבו $T=1$.



דוגמה 7-3

תכננו מונה בינארי מודולו 8 אסינכרוני באמצעות דלגלגים מסוג T .

פתרון

באיור 7.47 מתוארת המנייה הבינארית מ-0 עד 7, וחוזר חלילה. אלו הן הספרות המופיעות במונה מודולו 8.

דרוש שהמונה יספור כמתואר באיור 7.47. בכל מעבר פעיל בדופק שעון יתעדכן ערכו של המונה למנייה החדשה, כלומר: מספר בינארי חדש יופיע (לפי הסדר שבאיור 7.47) במוצאי המונה. ננתח את הדרישות לכך שהמונה אכן יבצע את המנייה כהלכה.

- כדי להציג בצורה בינארית את הספרות 0 עד 7, דרושות שלוש סיביות, כלומר שלושה דלגלגים. נבחר דלגלגים מהסוג המתואר באיור 7.46.
 - הדלגלג שבו תאוחסן הסיבית הפחות משמעותית (Q_0) ישנה את מצבו בכל מעבר פעיל בדופק השעון (ערך הסיבית משתנה בכל שורה באיור 7.47).
 - הדלגלג שבו תאוחסן הסיבית השנייה (Q_1) ישנה את מצבו בכל דפקי השעון: בכל פעם שבסיבית Q_0 תתרחש ירידה מ-1 ל-0, יהפוך דלגלג זה (שבו מאוחסנת הסיבית Q_1) את מצבו. החצים באיור 7.47 (בין העמודות Q_0 ו- Q_1) מדגימים זאת.
 - הדלגלג שבו תאוחסן הסיבית Q_2 ישנה את מצבו בכל ארבעה דפקי שעון: בכל פעם שבסיבית Q_1 תתרחש ירידה מ-1 ל-0, יהפוך דלגלג זה (שבו מאוחסנת הסיבית Q_2) את מצבו. (ראו את החצים המתאימים באיור 7.47).
- באיור 7.48 נתון תרשים לוגי של מונה מודולו 8, שבו מתקיימות הדרישות שלעיל.

FF_0 , הדלגלג הימני שבאיור 7.48, הופך את מצבו בכל דופק שעון. במוצא דלגלג זה מתקבלת הסיבית Q_0 (הסיבית הפחות משמעותית). המוצא (Q_0) של דלגלג זה מחובר אל מבוא השעון של הדלגלג השני (FF_1).

הדלגלגים פעילים בירידת דופק השעון, לכן עם ירידת Q_0 מ-1 ל-0, ידורבן הדלגלג השני ומוצאו (Q_1) יחליף מצב. ירידה של Q_1 מ-1 ל-0 תדורבן את הדלגלג השלישי. במוצאים תופיע אפוא המנייה הבינארית, כמתואר בתרשים הזמנים שבאיור 7.49. בתרשים זה רשומות הספרות הבינאריות המתקבלות בכל דופק שעון. המספר הבינארי במוצאי המונה הוא Q_0, Q_1, Q_2 (הסיבית הפחות משמעותית). בתחתית התרשים רשומים המספרים העשרוניים המתאימים למספרים הבינאריים שבמוצאי המונה.

בתחילת הפעולה מאפסים את הדלגלגים באמצעות מבוא האיפוס ($\overline{CLR}$ באיור 7.48). בכל ירידת דופק שעון מתהפך מצבו של הדלגלג FF_0 ; ובכל ירידת Q_0 מתהפך מצבו של הדלגלג FF_1 ; ובכל ירידת Q_1 מתהפך מצבו של הדלגלג FF_2 .

מבוא השעון של המונה אינו מחובר לכל הדלגלגים, ולכן זהו מונה אסינכרוני. שמו של המונה הוא **מונה גלי**, משום שדרגה אחת גורמת להיפוך מצבה של הדרגה הבאה. יש כאן מעין התפשטות גלית (בדומה להתפשטות הנשא במסכם גלי, שעליו למדתם בפרקים הקודמים).

תרגול

שאלה 7.26

- א. תכננו מונה בינארי מודולו 16 באמצעות דלגלגים מסוג T .
- ב. מהי חלוקת התדר המתקבלת עבור המוצאים Q_2 ו- Q_3 במונה שתכננתם? באמצעות המוצא של הסיבית המשמעותית ביותר, של המונה הגלי, אפשר לדרבן דרגה נוספת, ובכך להגדיל את מחזור המנייה. לכן, לעתים נקרא מוצא זה גם **נשא מוצא** (כמו נשא המוצא של המסכם הגלי).

מונה מטה (Down Counter)

כפי שהזכרנו קודם, לעתים קרובות יש למנות כלפי מטה. באיור 7.50 מתואר מונה בינארי, אסינכרוני, מודולו 8, הסופר כלפי מטה. גם מונה זה הוא גלי.

שלושת המוצאים (Q_0, Q_1 ו- Q_2) באיור 7.50 מחוברים בהתאמה אל המוצאים (Q) של הדלגלגים השונים. מבוא השעון של הדלגלגים FF_1 ו- FF_2 מדורבן באמצעות המוצא $\bar{Q}$ (ולא באמצעות המוצא Q) של הדלגלגים FF_0 ו- FF_1 , בהתאמה.

שאלה 7.27

הראו באמצעות תרשים זמנים מפורט (לפחות 8 מניות) כי המונה הבינארי המתואר באיור 7.50 הוא אכן מונה גלי מטה מודולו 8. הניחו שהמונה מאופס בתחילת הפעולה.

שאלה 7.28

תכננו מונה מעלה/מטה, בינארי גלי, מודולו 8, בעל אות בקרה המסומן UP. המונה פועל באופן הבא: כאשר $UP=1$, המונה סופר כלפי מעלה; וכאשר $UP=0$, המונה סופר כלפי מטה. רמז: השתמשו במרבב.

חסרונו העיקרי של המונה הגלי הוא זמן ההשהיה שלו. כדי שהדרגה האחרונה (המשמעותית ביותר) תשנה את מצבה, דרושה התפשטות של הנשא (דופק השעון) בכל הדרגות הקודמות. לכל דלגלג יש זמן השהיה $t_{pd}(FF)$ בין המבוא למוצא. אם במונה הגלי יש n דרגות, הרי שזמן ההשהיה של המונה יהיה $n \cdot t_{pd}(FF)$.

כל זמן שכל הדלגלגים במונה לא הגיבו לדופק השעון, אין לספק דופק שעון נוסף במבוא השעון, כדי שלא ייווצרו שיבושים בפעולת המונה. לכן, אסור שמרווח הזמן בין שני דופקי מבוא עוקבים יהיה גדול מ- $n \cdot t_{pd}(FF)$.

יתרונותיו של המונה הגלי מודולו N (בהשוואה למונים שבהמשך) נובעים מפשטות המבנה שלו: המונה (מעלה או מטה, אך לא מעלה/מטה) אינו מכיל שערים בין הדלגלגים, וקל להרחיבו לכל מחזור מנייה N מהצורה $N = 2^k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). למונה כזה נדרשים K דלגלגים.

7.11.2 מונה סינכרוני

השעון במונה סינכרוני מחובר לכל הדלגלגים, וכך אותו דופק שעון גורם לדרבון כל הדלגלגים בו-זמנית. חיבור כזה מאפשר להתגבר על חסרונו העיקרי של המונה הגלי.

מונה מעלה סינכרוני פשוט

באיור 7.51 נתון תרשים לוגי חלקי של מונה מעלה סינכרוני מודולו 8. מכיוון שדופק השעון מחובר לכל דלגלג, ההחלטה אם להפוך את מצבו של הדלגלג תיקבע בהתאם לערכים במבוא העירור T (בדלגלג FF_0 וכדומה). כאשר $T=0$, ישמור הדלגלג על מצבו הקודם; ואם $T=1$, יחליף הדלגלג את מצבו בכל ירידה של דופק השעון.

תרגול

דוגמה 7-4

תכננו מונה מעלה סינכרוני מודולו 8.

פתרון

דופק השעון באיור 7.51 מחובר לכל הדלגלים. השאלה היא אפוא מה צריך להיות ערכם של T_0, T_1, T_2 , כך שהמונה ימנה כמתואר באיור 7.47?

- בהתאם לאיור 7.47, נראה כי הדלגלג הראשון (FF_0) מחליף את מצבו בכל דופק שעון, ולכן דרוש כי $T_0 = 1$. ראו גם תשובה 7.1.
- הדלגלג השני (FF_1) ישנה את מצבו רק אם ערכו של Q_0 במנייה הקודמת היה 1. אם ערכו הקודם של Q_0 היה 0, שומר הדלגלג השני על מצבו לכן Q_0 צריך להיות מחובר ל- T_1 .
- הדלגלג השלישי (FF_2) ישנה את מצבו רק אם התקיימו שני תנאים במנייה הקודמת: ערכו של Q_1 במנייה הקודמת היה 1, וגם ערכו של Q_0 היה 1. לכן $T_2 = Q_0 \cdot Q_1$.

נסכם את המשוואות עבור מבואות העירור:

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = Q_0$$

$$T_2 = Q_0 \cdot Q_1$$

באיור 7.52 נתון תרשים לוגי מלא של מונה מעלה סינכרוני, בינארי, מודולו 8.

תרגול

שאלה 7.29

שרטטו תרשים זמנים של המונה שבאיור 7.52 עבור חמשת המחזורים הראשונים של דופק השעון. הניחו מצב התחלתי: $Q_2, Q_1, Q_0 = 0, 0, 0$.

שאלה 7.30

כתבו את המשוואות עבור מבואות העירור במונה מעלה סינכרוני מודולו 16.

מונה מעלה סינכרוני עם נשא

עבור המונה הסינכרוני שתואר בדוגמה 4-7 קיבלנו את המשוואות הבאות:

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = Q_0$$

$$T_2 = Q_0 \cdot Q_1$$

ועבור מונה מודולו 16 התווספה המשוואה:

$$T_3 = Q_0 \cdot Q_1 \cdot Q_2$$

את המשוואות האלו אפשר לרשום גם בצורה שונה:

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = Q_0$$

$$T_2 = T_1 \cdot Q_1$$

$$T_3 = T_2 \cdot Q_2$$

ובאופן כללי נקבל:

$$(T_k = T_{k-1} \cdot Q_{k-1})$$

באיור 7.53 משורטט התרשים הלוגי של **מונה מודולו 16**, לפי משוואות אלו. המונה הוא מונה מעלה סינכרוני, עם נשא. הנשא במונה זה עובר מדרגה לדרגה. נשא זה נקרא לעתים **נשא מתפשט**, והמונה נקרא גם **מונה ללא נשא**.

אפשר להרחיב את המונה המתואר באיור 7.53 על ידי הוספת דלגלג אחד ושער AND בעל שני מבואות בלבד. המונה המתקבל הוא מאותו סוג, אך בעל סיבית נוספת, כלומר: זהו מונה מודולו 32 (5 סיביות) עם נשא.

בסעיף זה ניתחנו עד כה שני מונים סינכרוניים: עם נשא ובלעדיו. מי משני המונים עדיף?

התשובה לשאלה זו אינה חד-משמעית (ראו שאלה 7.31סעיף ב').

תרגול

שאלה 7.31

I שרטטו תרשים לוגי של מונה מעלה סינכרוני, מודולו 32:

I. עם נשא;

II. בלי נשא.

II (רשות) השוו בין שני המונים ששרטטתם.

- עם נשא;

- בלי נשא.

מונה סינכרוני עם טעינה

נדון עתה במונה סינכרוני שבו ניתן לטעון נתון לכל דלגלגיו, ולאפשר את המנייה רק בזמנים מסוימים. מונה כזה נקרא **מונה סינכרוני עם טעינה**.

תרגול

דוגמה 7-5

תכננו מונה סינכרוני מודולו 16 עם טעינה, באמצעות דלגלגים מסוג JK. תרשימו הלוגי ותיאור פעולתו של המונה מתוארים באיור 7.54. להלן הסבר מפורט יותר על פעולת המונה.

- כאשר מבוא האיפוס פעיל (0), מתאפסים כל הדלגלגים במונה, ללא תלות בשני מבואות הבקרה האחרים (Load ו-CE) וללא תלות בדופק השעון (מבוא האיפוס, CLR), הוא אסינכרוני).

נניח עתה שמבוא האיפוס אינו פעיל.

- כאשר שני מבואות הבקרה האחרים אינם פעילים (Load=0 ו-CE=0), שומר המונה על מצבו הקודם.

- כאשר מבוא הטעינה פעיל (Load=1), הרי שעם עליית דופק השעון נטענים דלגלגי המונה בנתון שבמבואותיו, כלומר: $Q_1 = D_1$, $Q_0 = D_0$ וכו' (המבואות CE ו-Load הם סינכרוניים).

- כאשר מבוא הטעינה אינו פעיל, אך מבוא אפשר המנייה פעיל (CE=1), הרי שעם עליית דופק השעון מתעדכן ערך למנייה הבינארית הבאה

פתרון

מתיאור אופן פעולתו של המונה ניתן לקבוע את הקווים המנחים הבאים לפתרון בעיית התכנון.

- מבוא האיפוס יחובר למבואות האיפוס של כל הדלגלים. כשמבוא זה יהיה פעיל, הוא יאפס את המונה, בלי תלות בדופק השעון ובשאר מבואות הבקרה. ננתח את שאר הצירופים במבואות הבקרה, בהנחה שמבוא האיפוס אינו פעיל ($CLR=1$).
- כאשר $Load=1$ ו- $CE=0$, נגרום לכך שבכל אחד מהדלגלים יתקבל $J=0$ ו- $K=0$, ולכן המונה ישמור על מצבו הקודם.
- כאשר $Load=1$ (בלי תלות בערך של CE), נגרום לכך שבמבואות כל דלגלג יתקבל $J = D_i$ ו- $K = \bar{D}_i$. מצוין את הסיבית המתאימה במבוא הנתון. חיבור כזה גורם להפעלת דלגלג JK כדלגלג D . לכן תתבצע טעינת דלגלגי המונה בנתון שבמבואותיו.
- כאשר $Load=0$ ו- $CE=1$, נגרום לכך שתתקבל בכל דלגלג הפונקציה המתאימה למנייה כלפי מעלה. ניעזר במקרה זה במונה סינכרוני פשוט (ללא נשא). באיור 7.55 מתואר מונה המיישם את כל הדרישות שהובאו לעיל.

 תרגול

שאלה 7.32

כל הסעיפים בשאלה זו מתייחסים לאיור 7.55.

- א. מהי פונקציית המוצא של השער g ? הסבירו בקצרה מדוע היה דרוש להעביר את מבוא אפשר המנייה (CE) דרך השער.
- ב. בטאו את J ו- K של FF_1 בתלות במבואות המתאימים. הסבירו בקצרה את המשמעות של הפונקציות שרשמתם.
- ג. מהי משוואת המוצא (CO) ? הסבירו את משמעותה.

7.11.3 מונים בעלי מחזור מנייה השונה מ- 2^n

לכל אחד מהמונים שתיארנו בסעיפים הקודמים היה מחזור מנייה של 2^n (מ-0 עד $2^n - 1$).

לצורך זה היו למונה n דלגלגים. למשל, מונה בעל ארבעה דלגלגים מבצע מנייה מ-0 עד 15 ($2^4 - 1 = 15$), לאחר מכן, המונה מתאפס ומתחיל את המנייה מחדש. קראנו למונה כזה **מונה מודולו 16** ($2^4 = 16$). לעתים קרובות מתעורר צורך בפעולת מנייה, שבה המודולו שונה מ- 2^n , למשל מודולו 10. המונה המתאים הוא, כמובן, מונה עשרוני (מ-0 עד 9).

ניתן להשתמש במונה מודולו 2^n , בעל מבוא טעינה או איפוס, כדי ליצור בעזרתו מונה מודולו K כאשר $2^n < K$. בדוגמה הבאה נמחיש זאת עבור **מונה מודולו 6**.

תרגול

דוגמה 7-6

תכננו מונה מודולו 6 בעזרת מונה מודולו 16^* , אשר נלמד בסעיף הקודם. סימולו הלוגי מתואר שוב (מטעמי נוחות) באיור 7.56. הטעינה מתרחשת בעליית דופק השעון (כמו המנייה), ואילו האיפוס מתבצע בצורה אסינכרונית.

פתרון

במונה מודולו 6 מופיעות ספרות המנייה 0, 1, 2, 3, 4 ו-5. יש מספר שיטות לתכנון מונה מודולו 6 בעזרת מונה מודולו 16. אנו נציג שתי שיטות נפוצות.

א. זיהוי הספרה 5 וטעינת המונה ב-0

מימוש המונה מודולו 6 מוצג באיור 7.57. נסביר את פעולת המונה.

נניח כי בתחילת הפעולה מאופס המונה ($Q_3 = 0, Q_2 = 0, Q_1 = 0, Q_0 = 0$), למשל – באמצעות מבוא האיפוס. מבוא אפשר המנייה פעיל ($CE=1$), ולכן המנייה מאפשרת.

במצב זה $Q_0 = Q_2 = 0$, ולכן מוצא השער g הוא 0. מוצא זה מחובר למבוא הטעינה ($Load$), ולכן לא מתבצעת טעינה. עם עליית דופק השעון מתרחשת מנייה אחת. במוצאי המונה תוצג הספרה 1 ($Q_3 = 0, Q_2 = 0, Q_1 = 0, Q_0 = 1$), במבוא $Load$ מתקבל 0, כלומר מבוא זה אינו פעיל. המנייה תימשך עד לקבלת הספרה 5 במוצאי המונה ($Q_3 = 0, Q_2 = 1, Q_1 = 0, Q_0 = 1$).

במצב זה $Load = Q_0 \cdot Q_2 = 1$, ולכן מבוא הטעינה פעיל. בעקבות עליית דופק השעון **הבא** – תתבצע הטעינה והמונה יתאפס, כי במבואות הנתון מצוי המספר 0, כלומר ($D_3 = 0, D_2 = 0, D_1 = 0, D_0 = 0$) (איור 7.57). במצב כזה קיבלנו 6 מצבי מנייה, מ-0 ועד 5, וחוזר חלילה. מוצאי המונה יהיו Q_2, Q_1, Q_0 .

* די להשתמש במונה מודולו 8 (הכולל 3 דרגות) למימוש מונה מודולו 6. ובאופן כללי, כדי לתכנן מונה מודולו K ($K \neq 2^m$), יש לבחור מונה מודולו 2^n , כך שיתקיים $2^{n-1} < K < 2^n$.

שאלה 7.33

הספרה 5 מיוצגת על ידי $Q_0 = 1, Q_1 = 0, Q_2 = 1, Q_3 = 0$. מדוע לא מחובר השער g (איור 7.57) לכל ארבע הסיביות האלה, אלא רק ל- Q_0 ול- Q_2 ?

בשיטה שהוצגה כאן השתמשנו במבוא הטעינה (שהוא **מבוא סינכרוני**) של המונה. בשיטה שתואר להלן ייעשה שימוש במבוא האיפוס (שהוא **מבוא אסינכרוני**) של אותו מונה.

ב. זיהוי הספרה 6 ואיפוס המונה

מימוש המונה מודולו 6 מתואר באיור 7.58. נסביר את פעולת המונה.

נניח שבתחילת הפעולה מאופס המונה. מוצא השער g הוא 1 ($\overline{Q_1 \cdot Q_2} = \overline{0 \cdot 0} = 1$). מוצא זה מחובר למבוא האיפוס, וכאשר הערך של מוצא זה הוא 1, לא מתבצע איפוס. המנייה מאפשרת כי $CE=1$, ולכן מתבצעת מנייה אחת בכל עליית דופק שעון. מניית הספרה 6 מתבצעת, כמובן, בעליית הדופק השישי.

עם המנייה של הספרה 6 ($Q_0 = 0, Q_1 = 1, Q_2 = 1, Q_3 = 0$), מתקבל במבוא האיפוס:

$\overline{CLR} = \overline{Q_1 \cdot Q_2} = 1 \cdot 1 = 0$. לכן מבוא האיפוס פעיל ומתבצע איפוס **מידי** של המונה, והמונה חוזר למצבו ההתחלתי. גם כאן התקבלו שישה מצבי מנייה.

מבוא האיפוס הוא **אסינכרוני**, כלומר: השפעתו מיידית, ללא תלות בדופק השעון. בשיטה הקודמת מבוא הטעינה הוא **סינכרוני**, ולכן מבוא הטעינה ישפיע רק כשיעלה דופק השעון.

כאשר הספרה 5 מופיעה במוצאי המונה שבאיור 7.57, אין היא גורמת מיד לטעינה, אלא רק כשיעלה דופק השעון הבא. משום כך, זיהינו שם את הספרה 5, שהיא הספרה האחרונה - בכל מחזור מנייה - הדרושה במוצאי מונה מודולו 6.

החיסרון של המימוש של המונה שבאיור 7.58 הוא בכך שהספרה שאינה כלולה במחזור המנייה (במקרה זה 6), מופיעה במוצאי המונה לפרק זמן קצר. אילו מבוא האיפוס היה סינכרוני, לא הייתה ספרה זו מופיעה כלל. במקרה זה היה דרוש לזהות את הספרה 5.

כדי לתכנן מונה מודולו K כך ש- $2^{n-1} < K < 2^n$, יש לבצע את השלבים הבאים:

א. יש לתכנן מונה עם מחזור מנייה 2^n ($2^{n-1} < K < 2^n$). מונה זה יכול לפעול באחת מהשיטות שלעיל.

ב. אם מבוא הבקרה שבו משתמשים (מבוא איפוס או טעינה) הוא סינכרוני, יש לזהות את הספרה $K-1$, ואת תוצאת הזיהוי יש לחבר למבוא זה. אם מבוא הבקרה הוא אסינכרוני,

יש לזהות את הספרה K . אם משתמשים במבוא הטעינה, הערך של כל אחד ממבואות הנתון צריך להיות 0 ($D_1 = 0, D_0 = 0$ וכן הלאה).
לדוגמה: דרוש לתכנן מונה מודולו 24 ($K=24$).

- א. נתכנן מונה עם מחזור מנייה $2^5 = 2^n = 32$ עם מבוא טעינה סינכרוני ואיפוס אסינכרוני.
ב. נזהה את הספרה 23 ($Q_4 = 1, Q_3 = 0, Q_2 = 1, Q_1 = 1, Q_0 = 1$) ונחברה למבוא הטעינה; ואז נקבע במבוא הנתון: $D_4 = 0, D_3 = 0, D_2 = 0, D_1 = 0, D_0 = 0$. או שנזהה את הספרה 24 ($Q_4 = 1, Q_3 = 1, Q_2 = 0, Q_1 = 0, Q_0 = 0$) ונחברה למבוא האיפוס.

 תרגול

שאלה 7.34

שרטטו מימוש של מונה מודולו 10 בכל אחת משתי השיטות שלעיל.

 שאלות חזרה לפרק 7

שאלה 7.35

- שניים מבין הלחצנים W, Z, Y, X מספיקים להפעלת הנורה L של המעגל הנתון באיור 7.59.
א. מצאו מה צריכים להיות הערכים הלוגיים של E ו- F , כך ש- H יהיה '1' ויפעיל את הנורה (הניחו שהנורה כבויה לפני הלחיצה).
ב. מצאו אילו שני לחצנים יש להפעיל כדי להדליק את הנורה, ומה יקרה כאשר נשחרר את הלחצנים.
ג. אילו לחצנים יש להפעיל כדי לכבות את הנורה הדולקת זמן מה?

שאלה 7.36

באיור 7.60 נתון נועל הממומש בשערי NAND.

- א. בנו טבלת מצבים של הנועל.
ב. מה יש לשנות במעגל כדי להפוך את הנועל הנתון ל- $S-R$?
ג. שרטטו את המעגל המתוקן ואמתו את פעולתו באמצעות טבלת מצבים.

שאלה 7.37

באיורים 7.61 ו-7.62 מתוארים האותות הספרתיים המסופקים לכל אחד משני הדלגלים הנתונים, בהתאמה. העתיקו למחברת כל אחד מהאיורים והשלימו את מהלך אות המוצא Q עבור כל דלגלג. הדלגלים הם בעלי דרבון קצה שלילי. לפני הופעת הדופק הראשון, המוצא Q הוא אפס.

שאלה 7.38

- א. הסבירו את עקרון פעולתו של דלגלג מסוג JK . לוו את הסברכם בטבלת המצבים.
- ב. העתיקו למחברת את איור 7.63, שבו נתונות צורות הגלים במבוא לדלגלג מסוג JK המגיב בירידת השעון. שרטטו, בהתאמה, את צורת אותות המוצא Q של הדלגלג JK .

שאלה 7.39

- א. לדלגלג מסוג $JKFF$ המגיב לעליית שעון מספקים את האותות שבאיור 7.64. הניחו שעבור $t < 0$ המוצא Q הוא '1'.
- העתיקו למחברת את צורות הגלים והשלימו את צורת הגל במוצא Q .
- ב. ממשו דלגלג מסוג T באמצעות דלגלג מסוג JK .

שאלה 7.40

- א. הסבירו מהו דלגלג מסוג D . רשמו את טבלת המצבים שלו וממשו אותה באמצעות דלגלג JK ורכיבים לוגיים, כנדרש.
- ב. לדלגלג D מסוג דרבון קצה חיובי (Positive Edge Trigger), המתואר עקרונית באיור 7.65, מספקים את האותות שבאיור 7.65. העתיקו את האותות למחברת והשלימו את צורת אות המוצא Q , בהתאמה ליתר האותות.

שאלה 7.41

- א. הסבירו את עקרון פעולתו של אוגר ההזזה הנתון שבאיור 7.66, וציינו את תפקידו של כל אחד מהדקיו.
- ב. האם ניתן להשתמש באוגר שבאיור 7.66 כאוגר הזזה עם מבוא טורי ומוצא טורי (Out Serial In /Serial)? נמקו את תשובתכם.

שאלה 7.42

- א.** הסבירו את ההבדל בין אוגר הזזה מקבילי-טורי לבין אוגר הזזה טורי-מקבילי באשר לתכונותיהם ולשימושם. הביאו דוגמה לשימוש בכל אחד מהם והסבירו כל דוגמה. לוו את ההסברים בתרשימים מתאימים.
- ב.** לאוגר ההזזה שבאיור 7.67 א ניתן אות המידע המתואר באיור 7.67 ב. העתיקו למחברת את איור 7.67 ב ושרטטו בציר זמן חדש את אותות המוצא **בכל אחד** ממוצאי המעגל למשך 5 דופקי שעון עוקבים.

שאלה 7.43

המעגל שבאיור 7.68 מכיל שני אוגרי הזזה. נתחו את התנהגותם של האתרים הנתונים באיור ורשמו את תוכנם לאחר 4 דופקי שעון עוקבים.

שאלה 7.44

נתון אוגר ההזזה שבאיור 7.69. העתיקו למחברת את איור 7.70 והשלימו אותו עם צורות האותות של Q_1 , Q_2 ו- Q_3 .

שאלה 7.45

נתון המעגל שבאיור 7.71.

- א.** רשמו את טבלת המצבים של נועל SR מבוקר שעון.
- ב.** שרטטו במחברת את צורת האותות במוצאים Q_0 , Q_1 ו- Q_2 לעומת אותות המבוא והשעון שבאיור 7.72.

שאלה 7.46

- א.** הדלגלגים מסוג T שבאיור 7.73 מגיבים לירידת השעון. המצב ההתחלתי של הדלגלגים הינו '0'. שרטטו במחברת את צורת האותות במוצאים Q_1 , Q_2 ו- Q_3 , בהתאמה, עבור 8 דופקי השעון הראשונים.
- ב.** הסבירו מה יקרה אם נחבר את המוצא Q_1 למבוא T_2 ואת המוצא Q_2 למבוא T_3 (במקום חיבורם של המוצאים $\bar{Q}$ למבואות T).

שאלה 7.47

מונה מורכב משלושה דלגלי JK , כמתואר באיור 7.74. הדלגלים פועלים בדרכון קצה שלילי (בירידת השעון).

- א.** שרטטו את צורות הגל בהדקים Q_0, Q_1, Q_2 עבור 10 דופקי שעון במבוא. הניחו שהמצב ההתחלתי הוא: $Q_0 = '0'; Q_1 = '1'; Q_2 = '0'$.
- ב.** זהו את סוג המונה ואת מספר המצבים שלו (מודולו). נמקו את תשובתכם.
- ג.** העתיקו את איור 7.74 למחברת והציעו תוספת עבורו כך שהמעגל החדש יפעל כמונה מודולו 5. לרשותכם שערים לוגיים כרצונכם. הניחו שפקודת ה-RESET פועלת ב-'0'.

שאלה 7.48

נתון המונה שבאיור 7.75. הדלגלים פועלים בדרכון קצה שלילי.

- א.** רשמו את טבלת המצבים במוצאים Q_1, Q_2 ו- Q_3 (MSB - Q_3) עבור 7 דופקי שעון. הניחו מצב התחלתי: 110.
- ב.** זהו את סוג המונה ואת יחס החלוקה (מודולו) שלו.

שאלה 7.49

נתון המונה שבאיור 7.76.

- א.** שרטטו את צורת האותות במוצאים Q_1, Q_2 ו- Q_3 בתלות בשעון הפועל בעלייה.
- ב.** רשמו את טבלת המנייה והגדירו את סוג המונה הנתון.

שאלה 7.50

באיור 7.77 נתון תרשים מלבנים של מונה. הדלגלים מגיבים לירידה. במבוא ה-CLK של FF_1 מחברים אות של 8 דופקי שעון. לפני הדופק הראשון מוצאי הדלגלים היו במצב '0'. שרטטו במחברת את צורות הגל של Q_1, Q_2 ו- Q_3 בתלות בזמן וביחס לאותות ה-CLK.

שאלה 7.51 – רשות

באיור 7.78 נתון מונה טבעתי שפועל ללא צורך בטעינה התחלתית. שרטטו תיאור אותות מוצאי הדלגלים עבור 5 דופקי השעון, אם בדופק הראשון:

$$Q_1 = 0 ; Q_0 = Q_2 = Q_3 = 0$$

שאלה 7.52

- א. הסבירו את ההבדל בין מונה סינכרוני למונה אסינכרוני.
- ב. רשמו את תרשימים המצבים של המונה המתואר באיור 7.79.

שאלה 7.53

באיור 7.80 נתון תרשים עקרוני של מערכת לוגית. הניחו שבתחילת פעולת המערכת:

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = 0$$

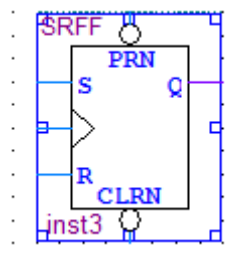
הדלגלים פועלים בירידת דופקי השעון ופקודת האיפוס (R) היא '1'.

- א. הסבירו את פעולת המערכת וזהו את ייעודה.
- ב. רשמו את טבלת המצבים של המערכת הנתונה, וציינו את מספר המצבים השונים של המערכת.

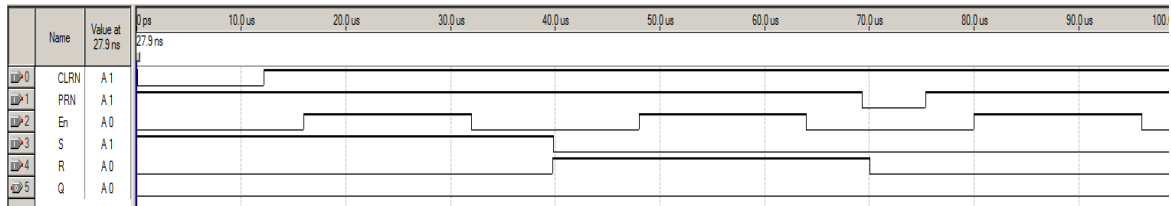
תרגול 

משימה 7.53

נתון הדלגלג הבא:



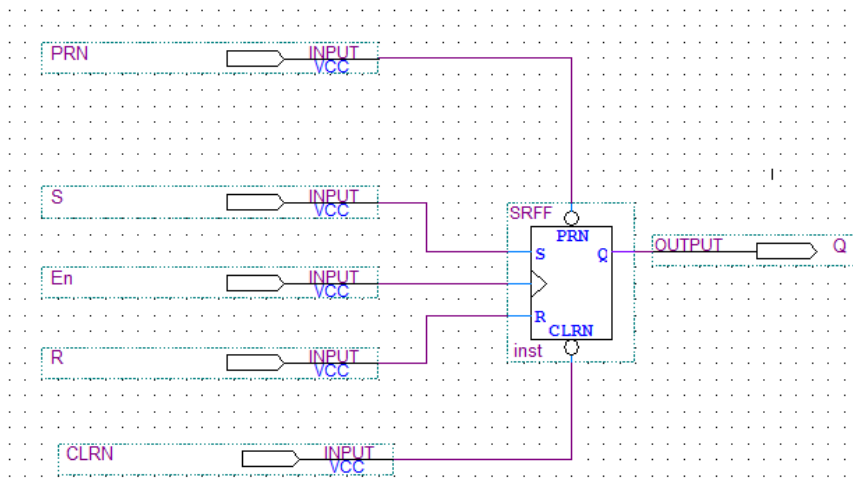
- א. העתיקו למחברת את דיאגרמת הזמן והשלם את גרף המוצא Q של הדלגלג הנתון.



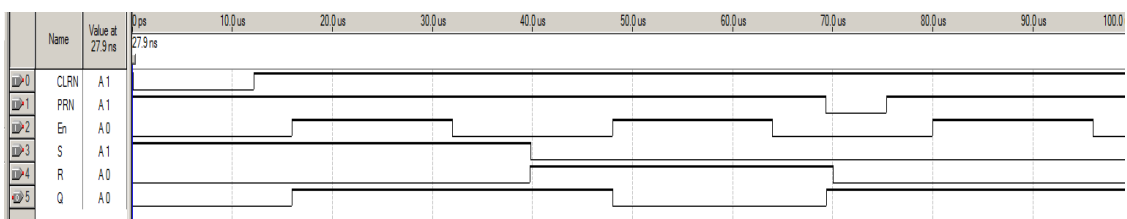
ב. ממשו בתוכנה את המערכת הנתונה, שרטטו את אותות המבוא הנתונים בדיאגרמת הזמן, ובדקו אם תשובתכם בסעיף א' תואמת את תוצאות הסימולציה שבתוכנה.

פתרון משימה 7.53

שרטוט המערכת בתוכנה:

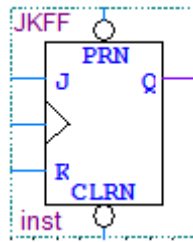


תוצאות הסימולציה של דיאגרמת הזמן הנתונה:

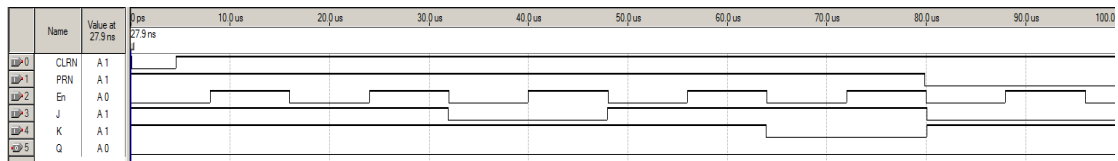


משימה 7.54

נתון הדלגלג הבא:

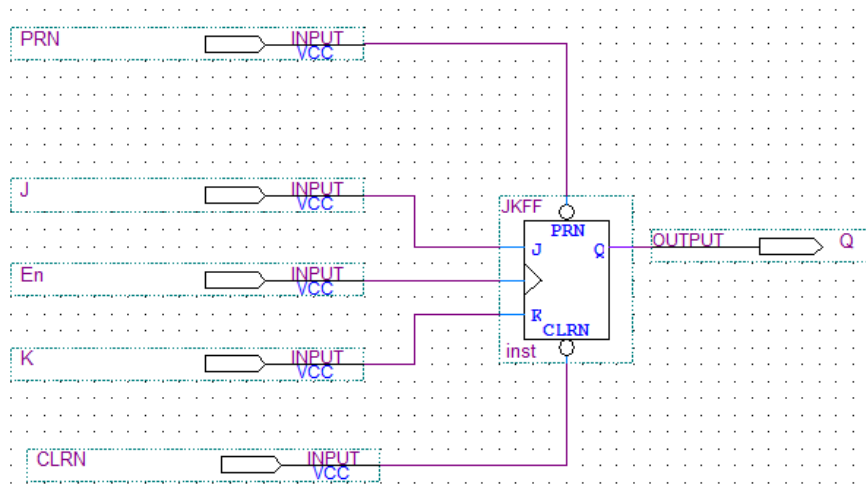


א. העתיקו למחברת את דיאגרמת הזמן והשלימו את גרף המוצא Q של הדלגלג הנתון.

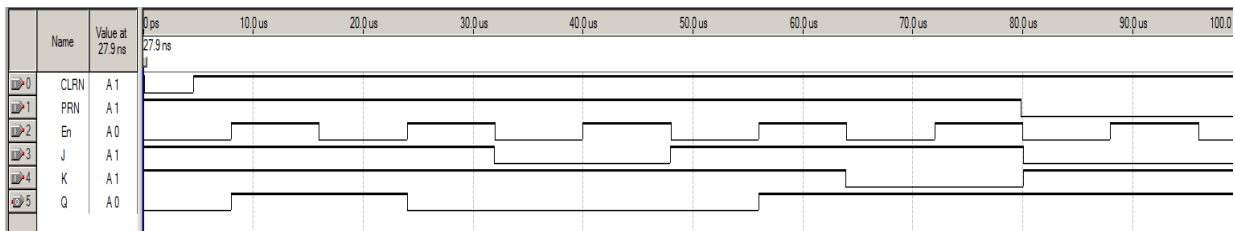


פתרון משימה 7.54

שרטוט המערכת בתוכנה:

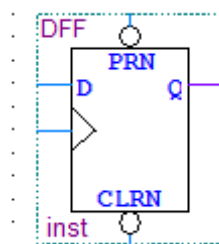


תוצאות הסימולציה של דיאגרמת הזמן הנתונה:

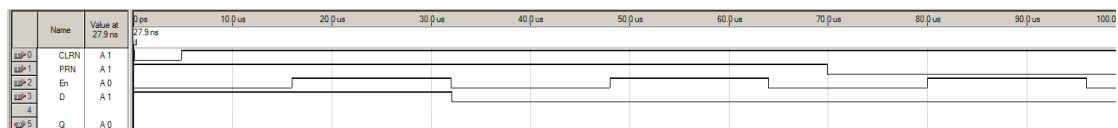


משימה 7.55

נתון הדלגלג הבא:

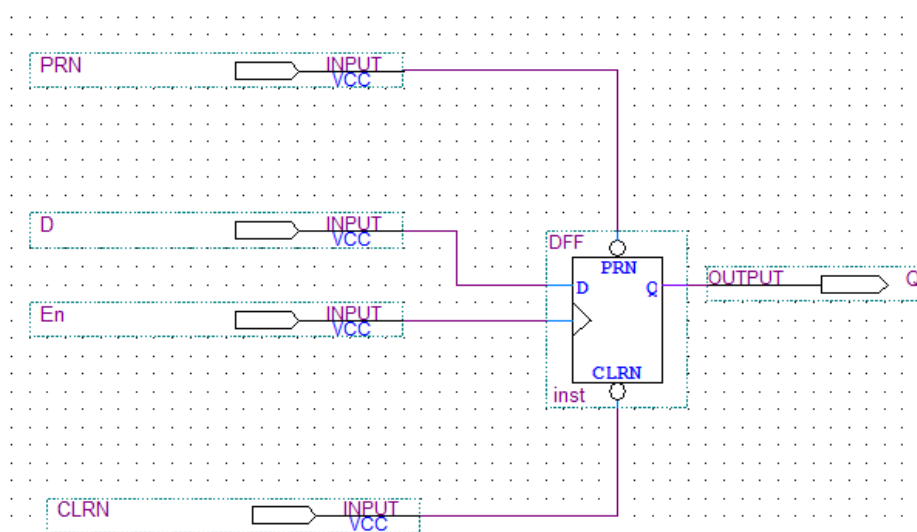


א. העתיקו למחברת את דיאגרמת הזמן והשלם את גרף המוצא Q של הדלגלג הנתון.

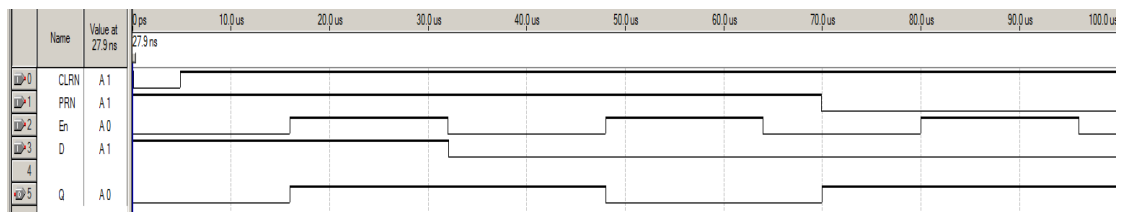


פתרון משימה 7.55

שרטוט המערכת בתוכנה:

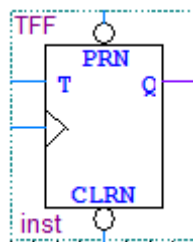


תוצאות הסימולציה של דיאגרמת הזמן הנתונה:

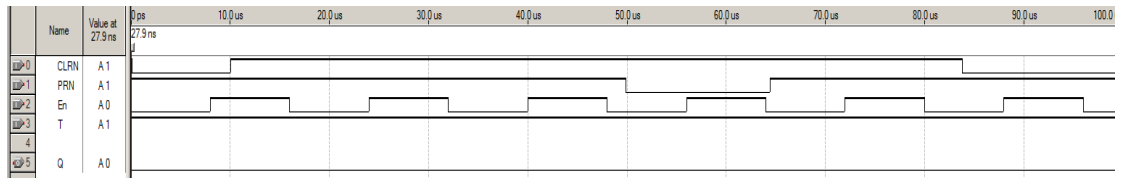


משימה 7.56

נתון הדלגלג הבא:

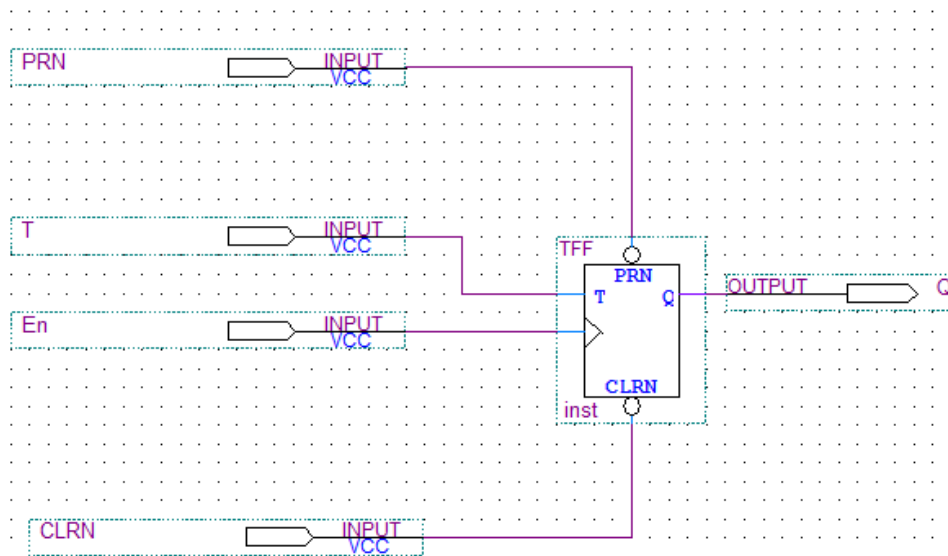


א. העתיקו למחברת את דיאגרמת הזמן והשלימו את גרף המוצא Q של הדלגלג הנתון.

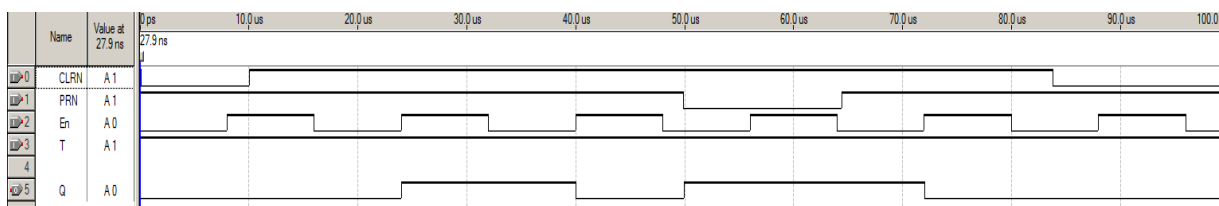


פתרון משימה 7.56

שרטוט המערכת בתוכנה:

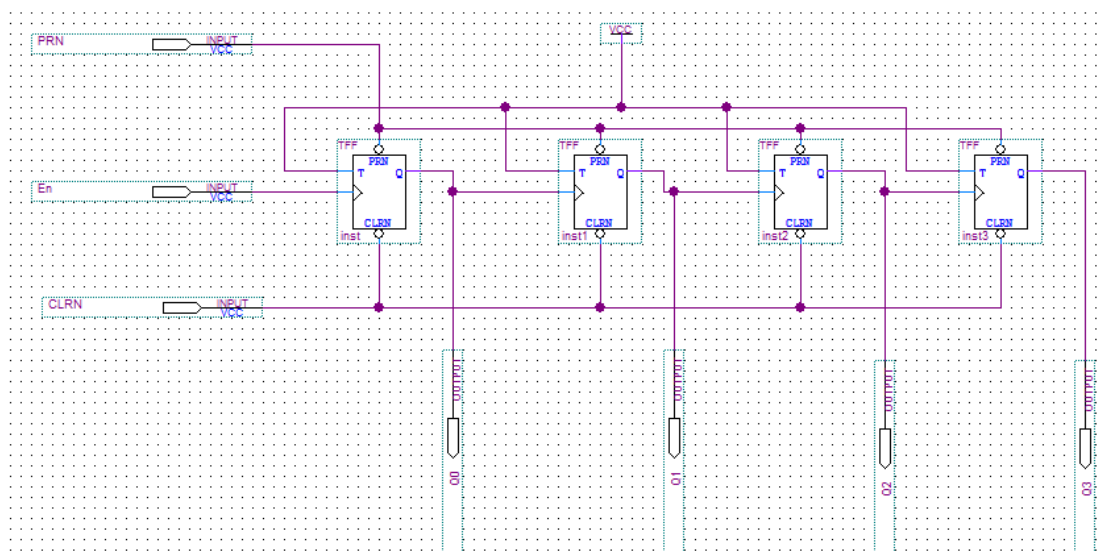


תוצאות הסימולציה של דיאגרמת הזמן הנתונה:

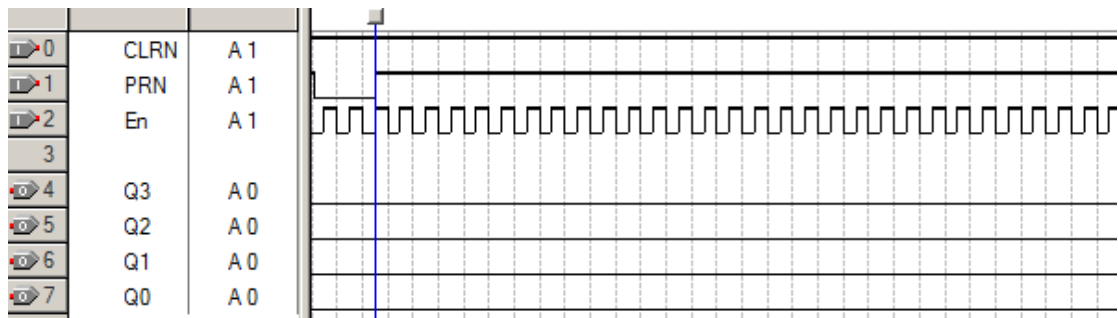


משימה 7.57

נתון המונה הבא:



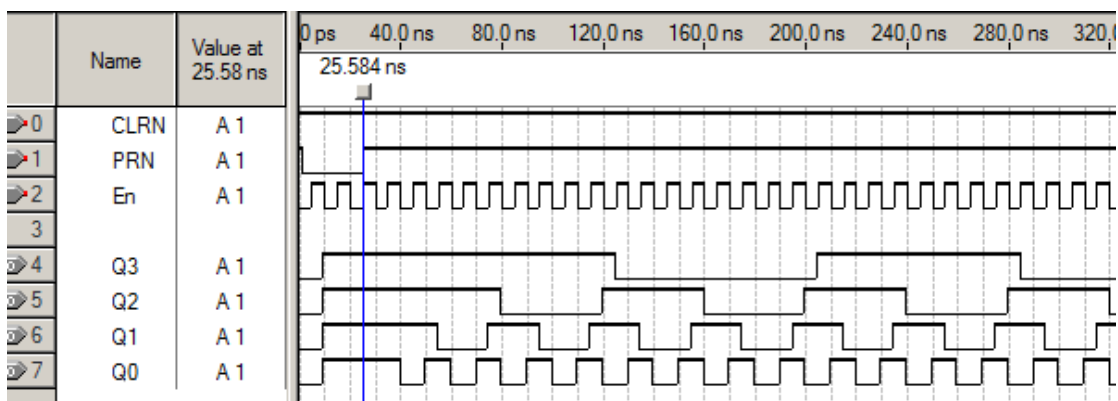
א. השלימו את דיאגרמת הזמן במחברת.



ב. שרטטו את המונה בתוכנה, יצרו דיאגרמת זמן עם כניסות זהות לדיאגרמת הזמן הנתונה בסעיף א' והשוו בין תוצאות הסימולציות במחשב לבין פתרון סעיף א'.

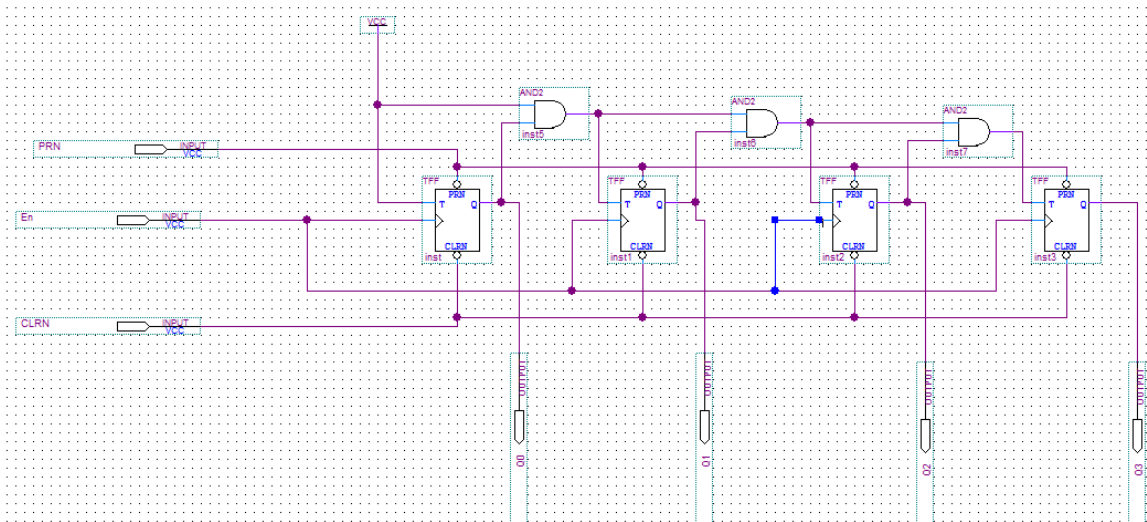
פתרון משימה 7.57

על פי תוצאות הסימולציה אפשר לראות שזהו מונה מטה, אסינכרוני, פעיל בדברון קצה חיובי, מודולו 16 (מ 0 עד 15).

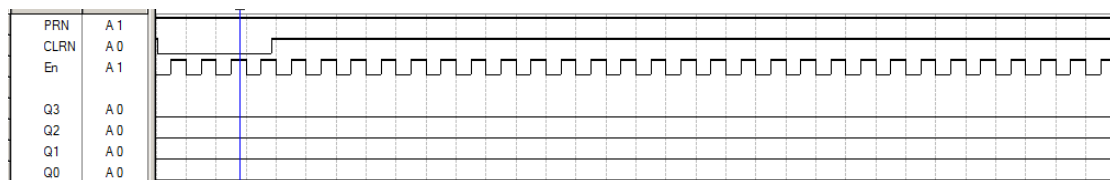


משימה 7.58

נתון המונה הבא:

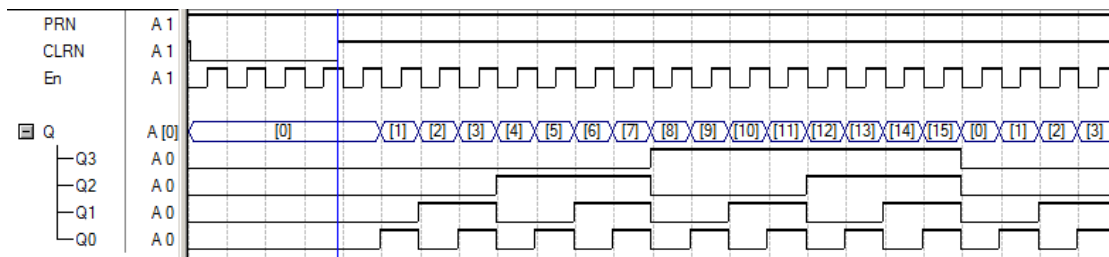


א. השלימו את דיאגרמת הזמן הבאה במחברת.



ב. שרטטו את המערכת בתוכנה ובדקו בדיאגרמת זמן את התוצאות מסעיף א'.

פתרון משימה 7.58



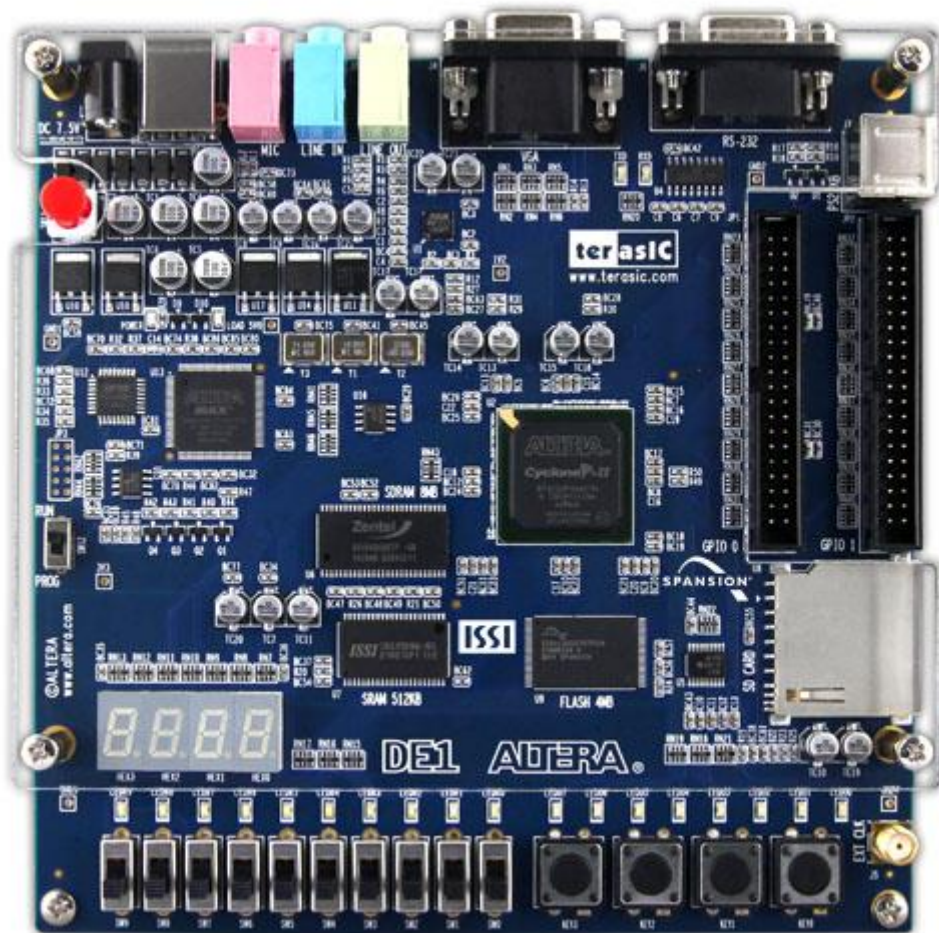
אפשר לראות שזהו מונה מעלה סינכרוני הפעיל בדברון קצה חיובי, מודולו 16 (0 עד 15).
 לטובת נוחות הבדיקה והצפייה אפשר לאחד את יציאות Q, לאחר סימון בדיאגרמה, על ידי פעולת GROUPING המתקיימת בלחיצה ימנית על סימון.

סיכום פרק 7

- בפרק זה הצגנו לראשונה **נועל**. דלגלג הוא התקן זיכרון לסיבית אחת. תחילה תיארנו **נועל SR בסיסי**. נועל זה הוא חלק עיקרי בכל סוגי הנועלים. זהו נועל **אסינכרוני**: שינויים במבואות העירור, של הנועל, S ו- R , משפיעים באופן מיידי על מוצאו.
- הוספת מבוא אפשר (ומספר שערים) לנועל בסיסי אפשרה לשלוט על זמני הפעולה של הנועל. נועל עם מבוא אפשר נקרא **נועל מאופשר** (או **סינכרוני**). הצגנו שני סוגי נועלים מבוקרים: האחד מסוג SR ; והשני מסוג D הנקרא גם **נועל**. לנועל D יש מבוא נתון (עירור) אחד המסומן באות D .
- לנועל D ישנם אופני פעולה. כאשר הנועל מאופשר, עוקב המוצא אחר השינויים במבוא. במצב זה אומרים שהנועל **שקוף**. כשהאפשר מופסק **ננעלת** בתוך הנועל הרמה הלוגית שבמבוא הנתון, והנועל שומר על מצבו עד שהוא מאופשר פעם נוספת.
- מימוש מערכות עקיבה, תוך שימוש בנועלים מבוקרים, מציב מגבלות חמורות על **דופק השעון**, ולכן פותחו התקני זיכרון (דלגלגים) **המדורבנים במעבר**. הכרנו שני סוגי דלגלגים מדורבנים במעבר: **דלגלגים מדורבני קצה** ודלגלגי **אדון-עבד**. הרעיון בדלגלג מדורבן קצה הוא להפעילו בפרק זמן קצר מאוד בעליית דופק השעון (קצה חיובי) או בירידתו (קצה שלילי).
- דלגלג מסוג אדון-עבד בנוי על עקרון ההפרדה של מבואות הדלגלג ממוצאיו. הוא מכיל שני דלגלגים מבוקרים הפועלים בפרקי זמן שונים של דופק השעון. בפרק הזמן $t_w(1)$ אחד מהם פעיל- והשני חסום, ובפרק הזמן $t_w(0)$ - להיפך.
- אפשר לממש מערכות סדרתיות תוך שימוש בדלגלגים המדורבנים במעבר. אפשר לשלב את הדלגלגים במערכות סדרתיות בלא מגבלות חמורות על דופק השעון.
- סקרנו את סוגי הדלגלגים הנפוצים: SR , D , JK ו- T בתצורות שונות. עסקנו בתפקידם של מבואות ישירים אסינכרוניים בדלגלגים.
- בהמשך עסקנו באוגרים. אפשר לסווג או למיין את האוגרים, על פי תפקידי מבואותיהם ומוצאיהם, לארבעה סוגים עיקריים: SIPO, PISO, PIPO ו- SISO.
- לצורך נעילה ואחסון נתונים בינאריים באוגרים בעלי מבואות ומוצאים מקביליים ($PIPO$) אפשר להשתמש בנועלי D מבוקרים. לאחסון נתונים אפשר להשתמש גם

- בדלגלים מדורבנים במעבר. אוגר הבנוי מדלגלים אלה ניתן לשילוב במערכות סדרתיות.
- בעזרת אוגרי הזזה אפשר להמיר נתונים מקביליים לטוריים (PISO), או נתונים טוריים למקביליים (SIPO). כמו כן, אפשר להשתמש בהם להזזה בלבד (SISO), ימינה או שמאלה.
 - אוגר הזזה דו-כיווני אוניברסלי מכיל את כל ארבעת הסוגים (SIPO, PISO, PIPO ו-SISO). בעזרת אוגר כזה אפשר לבצע הזזות ימינה או שמאלה. טעינת נתון לאוגר יכולה להיות מקבילית או טורית, וניתן להשתמש במוצאיו הטוריים והמקביליים של האוגר.
 - סיום הפרק עסק במונים מסוגים שונים. בתחילה תיארנו את קבוצת המונים האסינכרוניים. דופק השעון מחובר רק למבוא השעון של הדלגלג הראשון, ואילו מבוא השעון של כל דלגלג אחר מחובר למוצא של הדלגלג שלפניו. מונה אסינכרוני, הממומש באמצעות חיבור טורי של דלגלגי T המדורבנים במעבר, נקרא **מונה גלי**.
 - אפשר לממש **מונה מעלה/מטה** תוך שימוש במבוא בקרה מתאים.
 - אפשר להוסיף למונה מבואות בקרה ל**טעינה** (Load) ול**איפוס** (Clear).
 - במונה **סינכרוני** - מבואות השעון של כל הדלגלים מחוברים לדופק השעון. יתרונו של המונה הסינכרוני, ביחס למונה האסינכרוני, מתבטא בזמן ההשהיה הקצר יותר לקבלת מנייה אחת. חסרונו הוא בכך שיש להוסיף שערים בין דלגלגיו.
 - במונים ה**בינאריים** מחזור המנייה הוא 2^n ($n = 1, 2, 3, \dots$). במונה בינארי כזה יש n דלגלים. ניתן לממש מונה מודולו $2^n < K$ תוך שימוש במונה בעל מחזור מנייה של $(2^{n-1} < K < 2^n)$ ובמבואות הבקרה (טעינה או איפוס). התוצאה בכל המונים הבינאריים מופקת כמספר בינארי. כדי לפענח את התוצאה, יש להוסיף מפענח במוצאו של מונה כזה.

נספח - ניסויים מעשיים בערכת DE1 של חברת ALTERA



ערכת פיתוח מאפשרת לנו לראות את תוצאות התכנות שלנו מבוצעות בפועל על רכיבים לאחר שנבדקו בסימולציה.

בערכת הפיתוח יש מגוון רחב של רכיבים אשר נמצאים סביב רכיב בר התכנות שאליו אנו מורידים בפעולת צריבה/טעינה את התכנות שלנו.

הרכיבים העיקריים בהם נשתמש הם:

אות שעון , לדים , לחצנים , מפסקים . תצוגות שבעה מקטעים.

בערכת הפיתוח ניתן להשתמש לצורך ביצוע ניסויים ובדיקת קוד , בניית פרויקטונים ופרויקטים.

- מומלץ להיעזר בסרטי YOUTUBE כגון : <https://youtu.be/lf4iiz4l8Vk>
- מומלץ להיעזר בקובץ עזר למשתמש

ניסויים ללימוד עבודה מול ערכת הפיתוח DE1 :

- הניסויים הבאים מתקדמים לפי רמת קושי\מורכבות .
- חשוב להתקדם לפי סדר הניסויים כדי ללמוד את הפעולות הבסיסיות שיפורטו בניסויים הראשונים בלבד.

תרגול

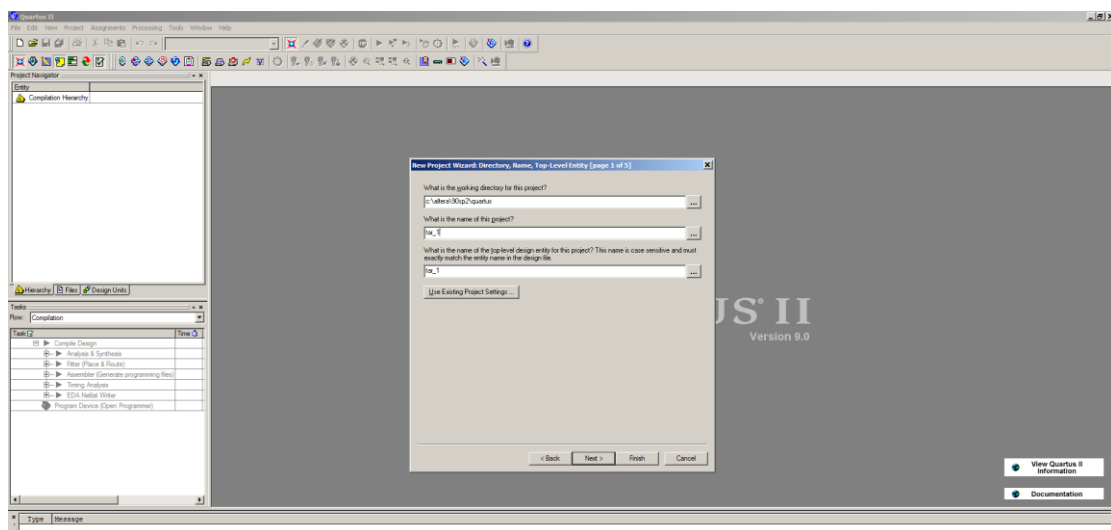
ניסוי מספר 1:

תכנן מערכת המקבלת מידע משלושה לחצנים , המערכת תדליק לד רק כאשר שניים מהלחצנים לחוצים (מספקים '1' = לחוצים).

- תכן וממש לאחר פישוט את המערכת בשערים בתוכנת QUARTUS
- בדוק את המערכת בדיאגרמת זמן.
- בצע צריבת המערכת לרכיב הנמצא על ערכת הפיתוח ובדוק מעשית את פעולת המערכת.
- סדר פעולות הצריבה ומהלכן יפורטו בהסבר תהליך הניסוי הזה.

אופן ביצוע ניסוי מספר 1:

- לאחר התכנון והפישוט הגענו לביטוי $F=AB+AC+BC$
- נפתח פרויקט חדש בתוכנת QUARTUS בשם TAR_1

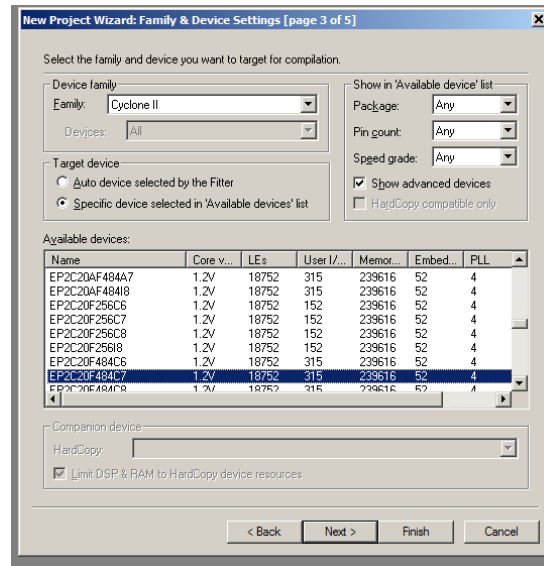


נלחץ על NEXT ולאחר מכן על NO כדי לא לפתוח תיקיה חדשה בשם הפרויקט

- נבחר את הרכיב שעליו נבצע בסוף המימוש את הצריבה

FAMILY "Cyclone II"

DEVICE "EP2C20F484C7"

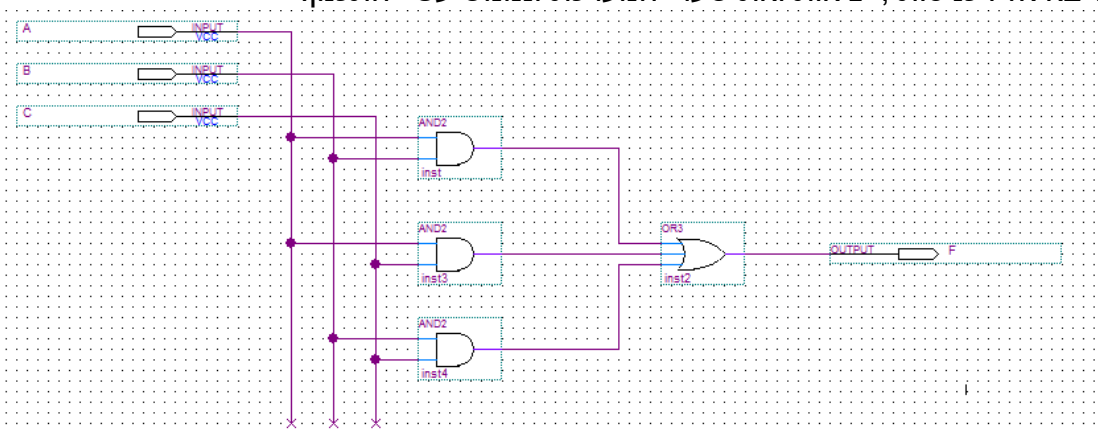


NEXT

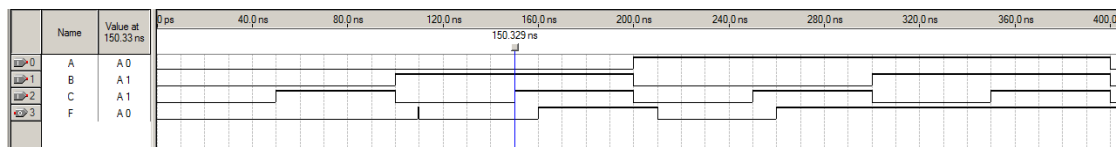
NEXT

FINISH

- נפתח קובץ חדש מסוג BLOCK DIAGRAM בשם TAR_1
- נייבא אליו כניסות, יציאות ואת שערי המערכת ונממש עפ"י התכנון.

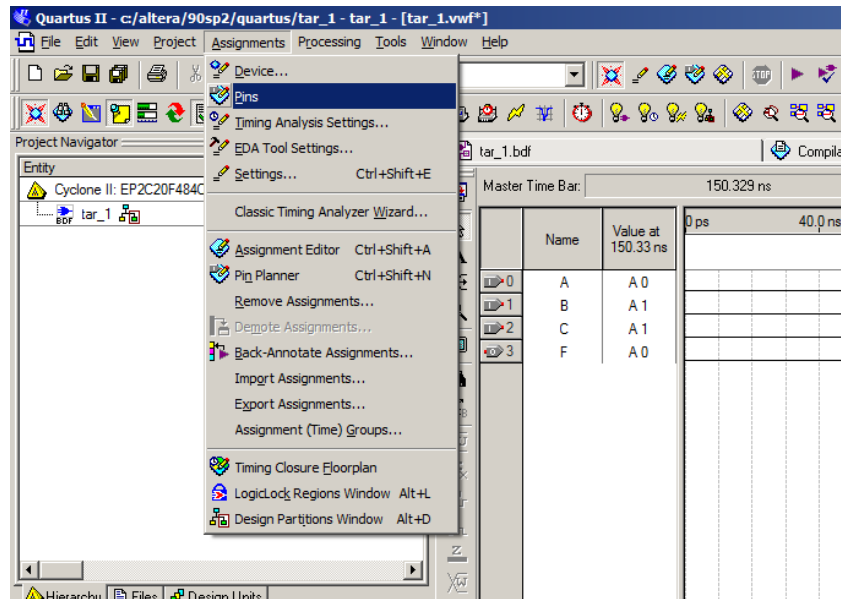


• נבצע הידור ובדיקה בדיאגרמת זמן:

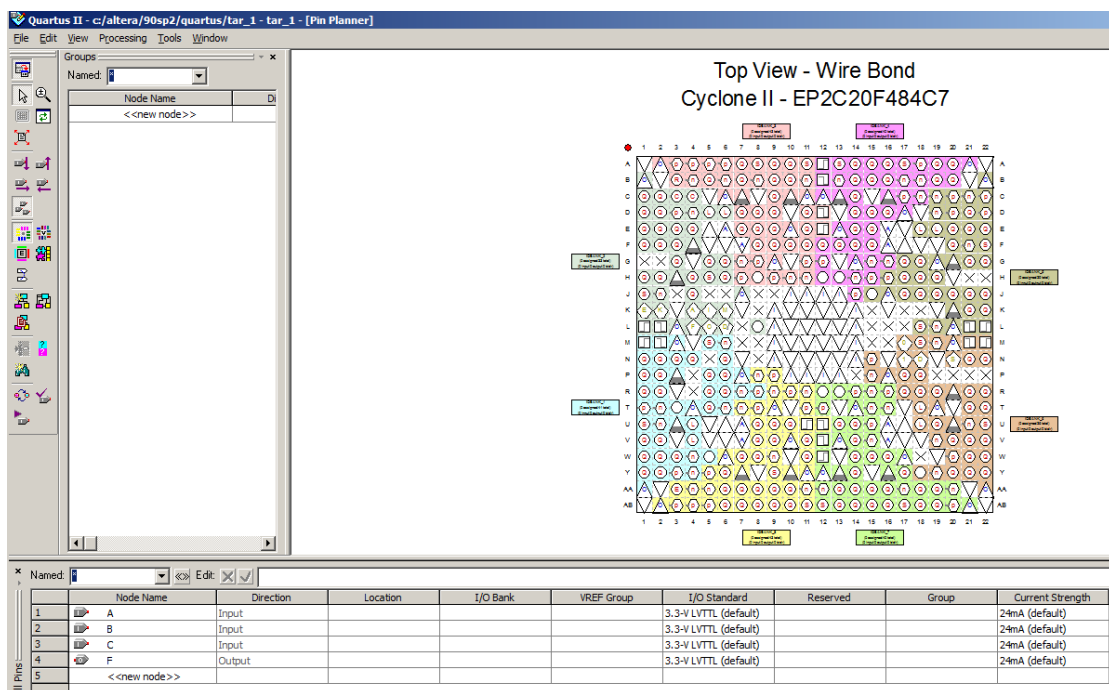


לאחר שבדקנו בדיאגרמת זמן שהמערכת שתכננו עונה לדרישות נתחיל את תהליך הצריבה.

• נבצע התאמת מיקום לכניסות ויציאות – ASSIGNMENT PINS



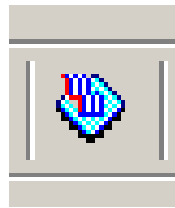
ונקבל את המסך הבא:



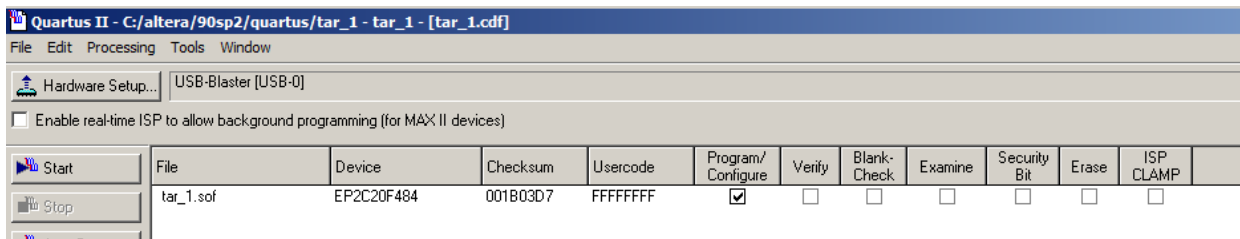
- עפ"י הנספח DE1TCL נתאים את כניסות A B C אל SW0 SW1 SW2 ואת המוצא אל 0 GREEN LED
- נלחץ על LOCATION ונכתוב את מיקום הרגל המתאימה למתגים והנורה.

PIN_U22										
	Node Name	Direction	Location	I/O Bank	VREF Group	I/O Standard	Reserved	Group	Current Strength	PCB layer
1	A	Input	PIN_L22	5	B5_N1	3.3-V LVTTL (default)			24mA (default)	
2	B	Input	PIN_L21	5	B5_N1	3.3-V LVTTL (default)			24mA (default)	
3	C	Input	PIN_M22	6	B6_N0	3.3-V LVTTL (default)			24mA (default)	
4	F	Output	PIN_U22	6	B6_N1	3.3-V LVTTL (default)			24mA (default)	
5	<<new node>>									

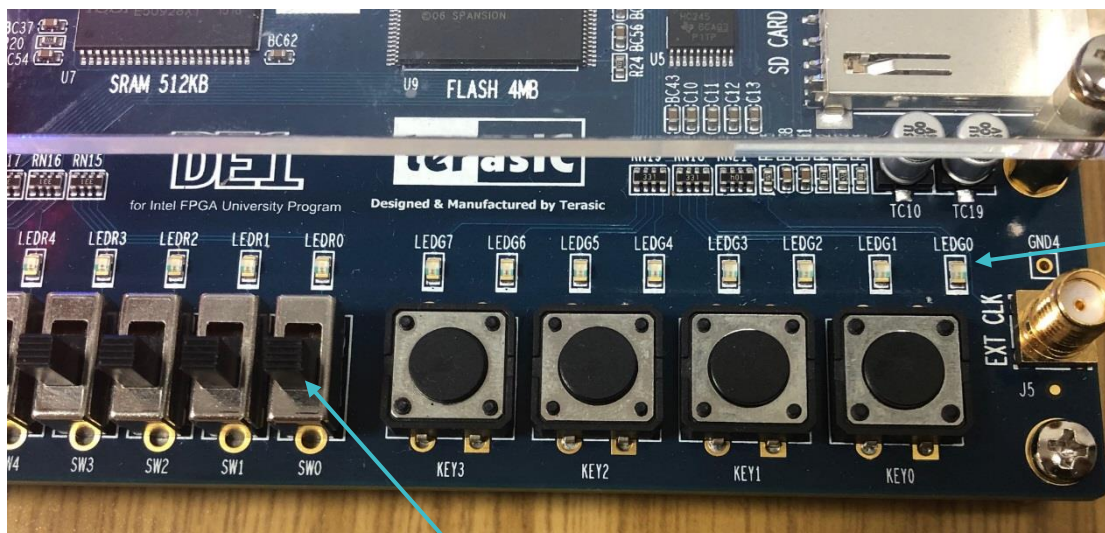
- נבצע הידור מחדש
- נלחץ על לחצן PROGRAMMER

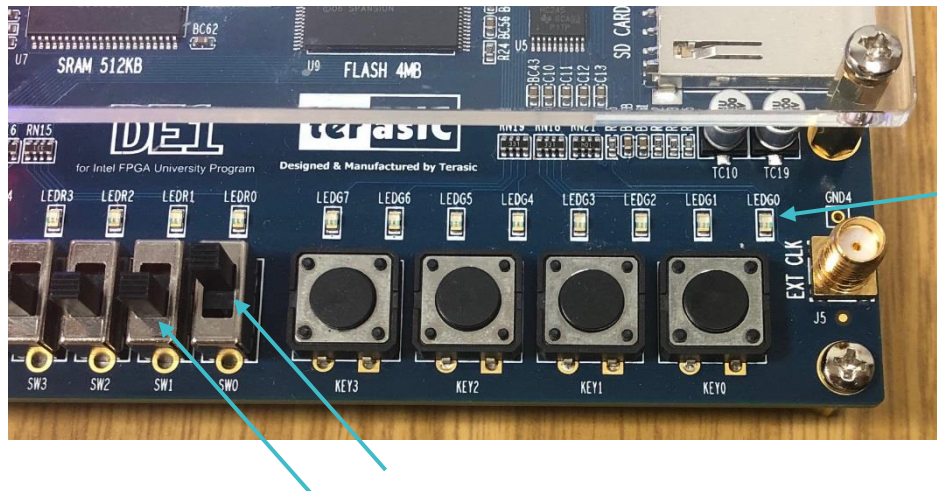


- נוודא שחומרת הצריבה המוגדרת היא USB_BLAZER

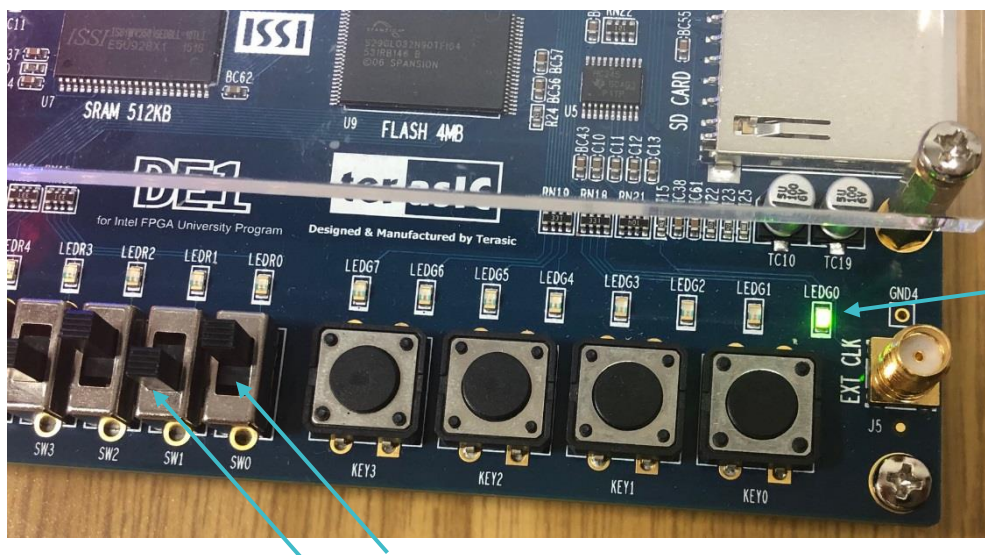


- ברגע שנלחץ על START תבוצע הצריבה והרכיב יתפקד עפ"י התכנון ניתן לראות שכאשר שלושת המתגים למטה ('0') או כאשר רק אחד למעלה הנורה הירוקה לא דולקת





וכאשר יש שני לחצנים למעלה ('1') הנורה דולקת.

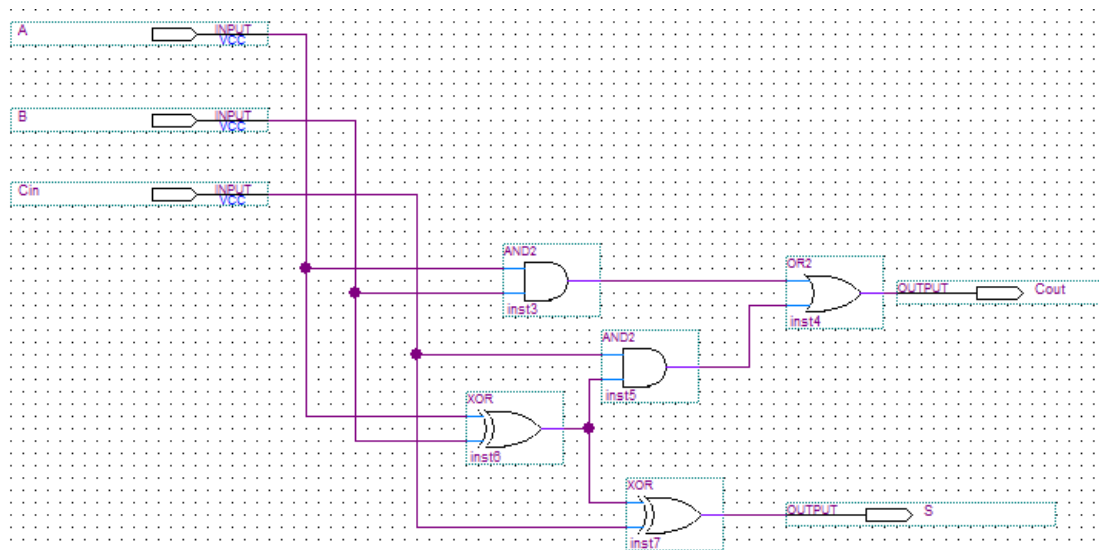


תרגול 

ניסוי מספר 2

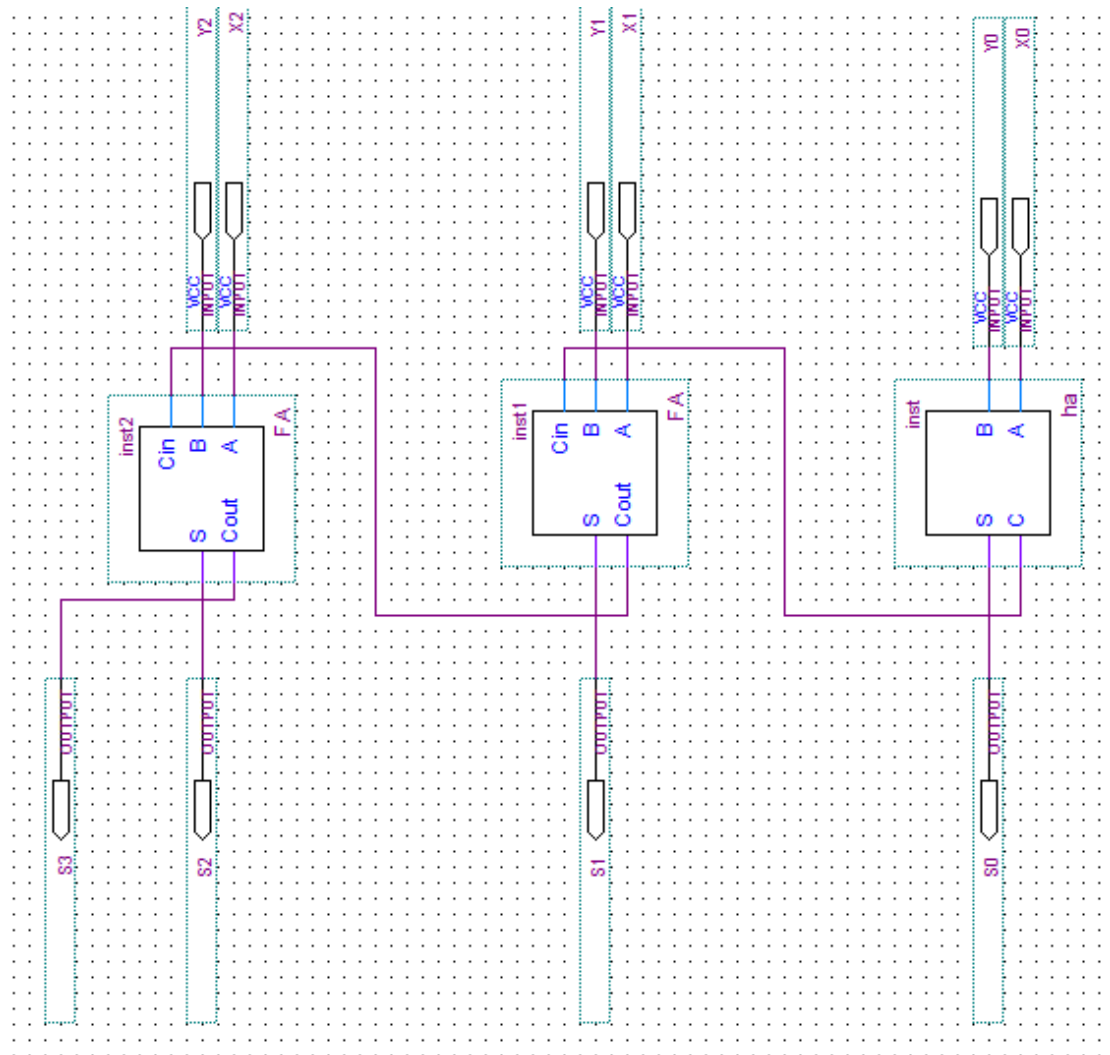
- א. תכנן מחבר חסר H.A וצור ממנו מבנית/SYMBOL לאחר בדיקתו בדיאגרמת זמן.
- ב. תכנן מחבר מלא F.A וצור ממנו מבנית/SYMBOL לאחר בדיקתו בדיאגרמת זמן.
- ג. צור תוכנית חדשה בשם BIG_ADDER שתפקידה לחבר בין שני מספרים בעלי שלוש סיביות כל אחד HA , FA .
- ד. לאחר בדיקת התוכנית BIG_ADDER בדיאגרמת זמן , צרוב את התוכנית לרכיב כך שכניסות המספרים יגיעו מהלחצנים (SWITCH) ויציאות התוצאה יופנו אל הלדים.

נבצע מימוש FA בשערים:



לאחר בדיקתו בדיאגרמת זמן, ניצור רכיב/SYMBOL.

נפתח קובץ חדש בשם BIG_ADDER ונשתמש ברכיבים שיצרנו לטובת חיבור המערכת:

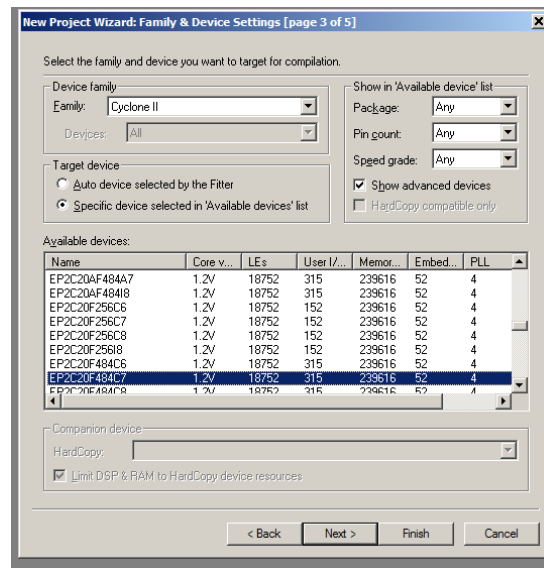


לאחר בדיקת המערכת בדיאגרמת זמן נתחיל את תהליך ההכנה לצריבה.

- נבחר את הרכיב שעליו נבצע את הצריבה

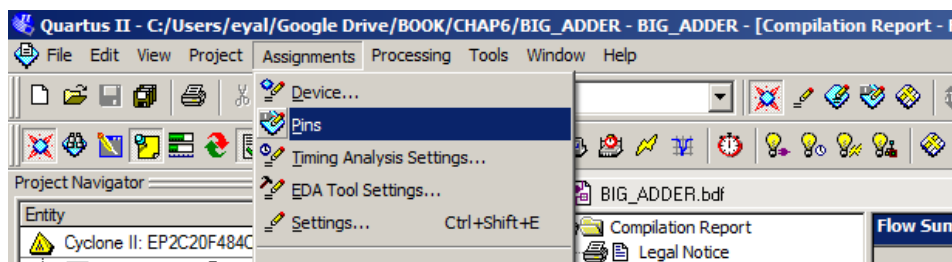
FAMILY "Cyclone II"

DEVICE "EP2C20F484C7"

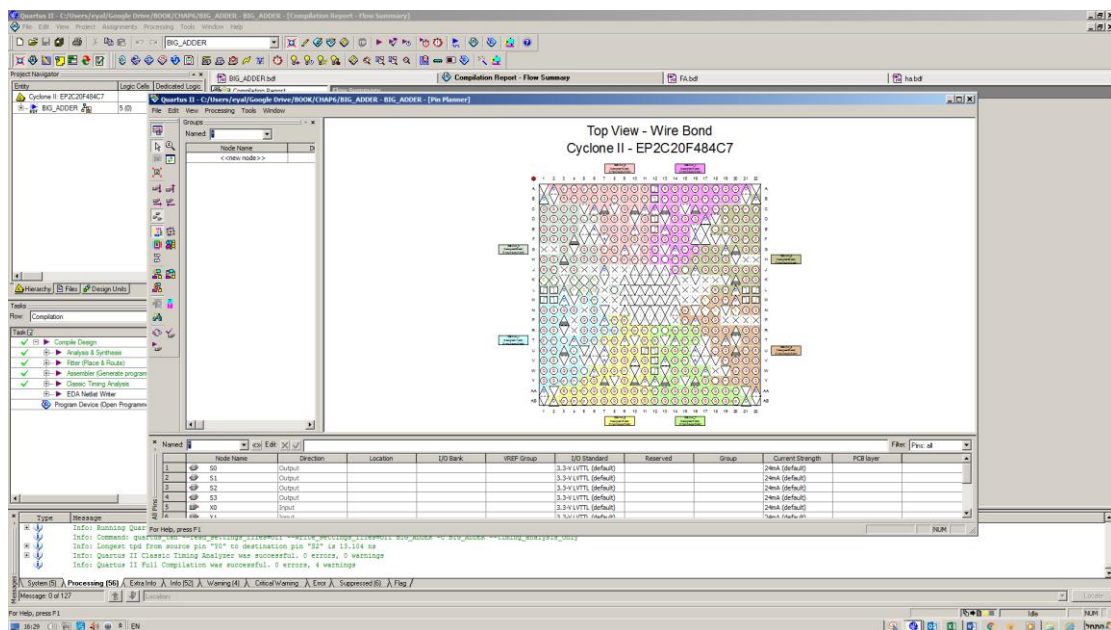


ונהדר מחדש.

• **ASSIGNMENT PINS – נבצע התאמת מיקום לכניסות ויציאות**



ונקבל את המסך הבא:



- עפ"י הנספח DE1TCL נתאים את הכניסות של מספר X אל SW2 , SW1 , SW0 ואת הכניסות של מספר Y את הלחצנים הרחוקים SW7 , SW8 , SW9 ואת המוצאים אל הלדים 0-3 .
- נלחץ על LOCATION ונכתוב את מיקום הרגלים :

```
# set_location_assignment PIN_L22 -to SW[0] ;# SW0
# set_location_assignment PIN_L21 -to SW[1] ;# SW1
# set_location_assignment PIN_M22 -to SW[2] ;# SW2
# set_location_assignment PIN_M2 -to SW[7] ;# SW7
# set_location_assignment PIN_M1 -to SW[8] ;# SW8
# set_location_assignment PIN_L2 -to SW[9] ;# SW9

;#####
;# 8 Green LEDs #
;#####

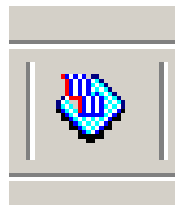
# set_location_assignment PIN_U22 -to LEDG[0] ;# LEDG[0]
# set_location_assignment PIN_U21 -to LEDG[1] ;# LEDG[1]
# set_location_assignment PIN_V22 -to LEDG[2] ;# LEDG[2]
# set_location_assignment PIN_V21 -to LEDG[3] ;# LEDG[3]
```

Node Name	Direction	Location	I/O Bank	VREF Group	I/O Standard	Reserved	Group	Current Strength	PCB layer
S0	Output	PIN_U22	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
S1	Output	PIN_U21	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
S2	Output	PIN_V22	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
S3	Output	PIN_V21	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
X0	Input	PIN_L22	5	B5_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
X1	Input	PIN_L21	5	B5_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
X2	Input	PIN_M22	6	B6_N0	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
Y0	Input	PIN_M2	1	B1_N0	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
Y1	Input	PIN_M1	1	B1_N0	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
Y2	Input	PIN_L2	2	B2_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	

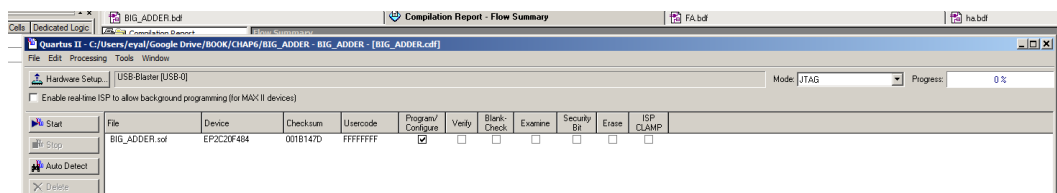
- נבצע הידור מחדש



- נלחץ על לחצן PROGRAMMER



- נוודא שחומרת הצריבה המוגדרת היא USB_BLAZER



לאחר הצריבה נציב מספרים בכניסות X, Y ע"י SW שקבענו:

נבדוק חיבור בין המספרים 6+7 ונקבל את התוצאה על הלדים "1101".



נבדוק חיבור בין המספרים 4+5 ונקבל את התוצאה על הלדים "1001".



תרגול

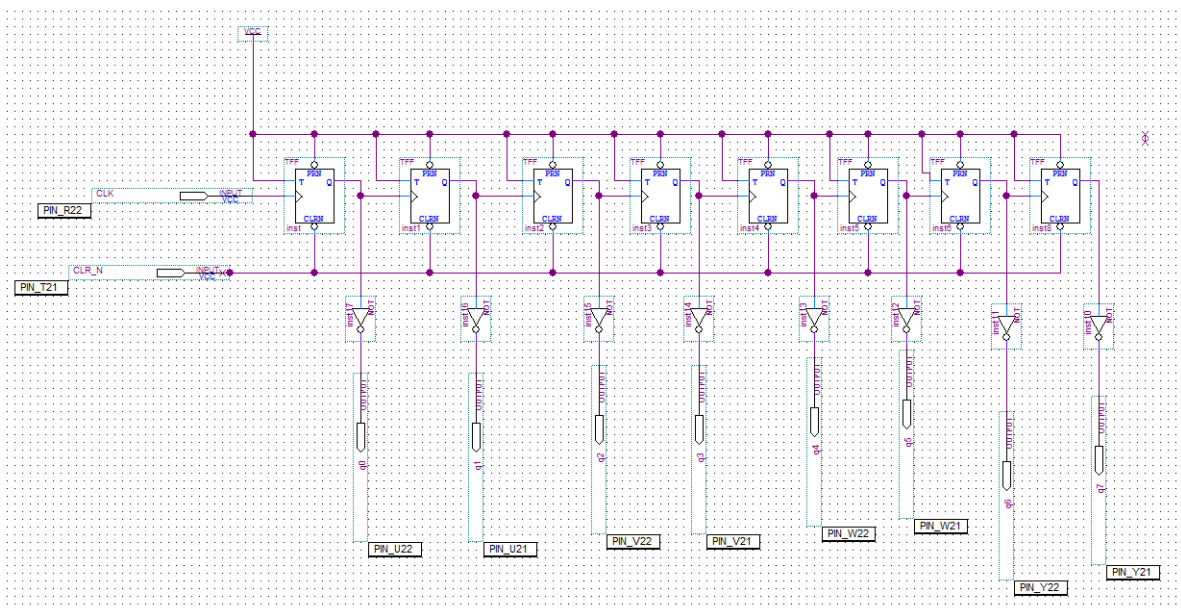
ניסוי מספר 3:

תכנון וצריבת מונה מעלה אסינכרוני לשמונה סיביות.

- צור פרויקט חדש בשם UP_COUNTER ובנה מונה מעלה אסינכרוני לשמונה סיביות ע"י ייבוא דלגלי TFF מספריית הרכיבים.
- לאחר בדיקתו בדיאגרמת זמן, התאם את כניסת CLK ואת כניסת CLR אל לחצני KEY ואת המוצאים Q7 – Q0 אל הלדים הירוקים.

אופן ביצוע ניסוי מספר 3:

בניית המונה בעורך הגרפי:



התאמת הכניסות והיציאות אל הלחצנים והלדים הירוקים:



Node Name	Direction	Location	I/O Bank	VREF Group	I/O Standard	Reserved	Group	Current Strength	PC
1 CLK	Input	PIN_R22	6	B6_N0	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
2 CLR_N	Input	PIN_T21	6	B6_N0	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
3 q0	Output	PIN_U22	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
4 q1	Output	PIN_U21	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
5 q2	Output	PIN_V22	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
6 q3	Output	PIN_V21	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
7 q4	Output	PIN_W22	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
8 q5	Output	PIN_W21	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
9 q6	Output	PIN_Y22	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
10 q7	Output	PIN_Y21	6	B6_N1	3.3-V LVTTTL (default)			24mA (default)	
11 <-new node-->									

לאחר הצריבה ניתן יהיה לראות שבכל לחיצה על KEY0 , המספר במוצא המונה עולה באחד והמספר הבינארי המוצג על הלדים מתקדם.

בלחיצה ראשונה



בלחיצה עשירית



ניסוי מספר 4:

יצירת מחלק תדר ע"י שרשור מונים.

בערכת הפיתוח DE1 יש גביש המספק לרכיב בר תכנות תדר 50 מגה הרץ.

בניסוי זה נשתמש במונה שתוכנן בניסוי מספר 3 כדי לבצע חלוקת תדר של 50 מגה הרץ לתדר של כ 1.5 הרץ.

על מנת להגיע לתדר קרוב ל 1.5 הרץ נצטרך לחלק פי 2 את תדר המקור 25 פעמים.

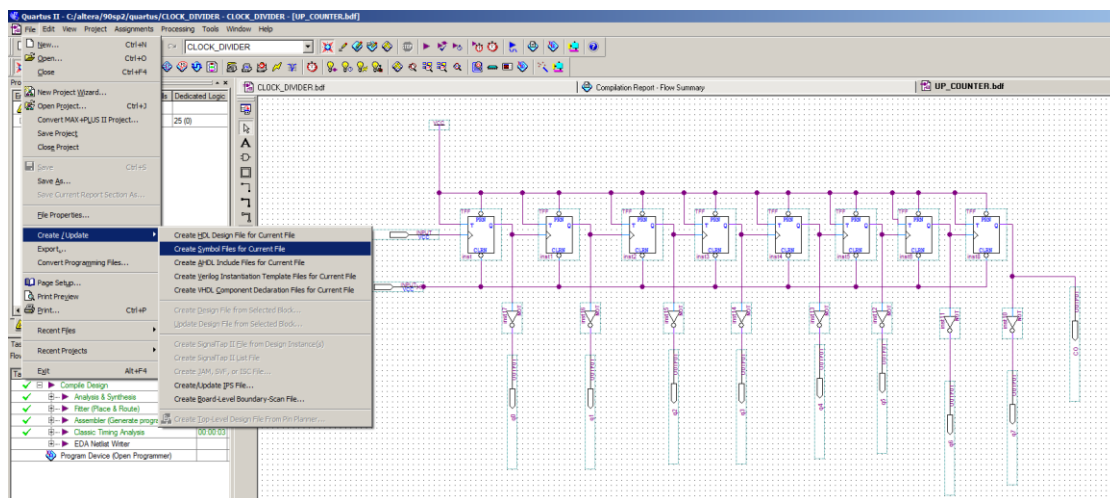
מאחר והמונה שתוכנן בניסוי קודם כולל רק 8 דרגות חלוקת תדר , נבצע שרשור בין 4 מונים לטובת הגעה לתדר הרצוי:

תדר מקור	מספר חלוקות	חלוקה פי
50,000,000		
25000000	1	2
12500000	2	4
6250000	3	8
3125000	4	16
1562500	5	32
781250	6	64
390625	7	128
195312.5	8	256
97656.25	9	512
48828.13	10	1024
24414.06	11	2048
12207.03	12	4096
6103.516	13	8192
3051.758	14	16384
1525.879	15	32768
762.9395	16	65536
381.4697	17	131072
190.7349	18	262144
95.36743	19	524288
47.68372	20	1048576
23.84186	21	2097152
11.92093	22	4194304
5.960464	23	8388608
2.980232	24	16777216
1.490116	25	33554432

מהלך הניסוי:

- א. פתח את פרויקט המונה שתוכנן בניסוי מספר 3, הוסף לו יציאת CO שתאפשר פעולה זהה בין המונים בדירבון קצה חיובי וצור ממנו מיבנית/רכיב SYMBOL.
- ב. בצע שירשור בין 4 מונים בעלי 8 יציאות (8 דרגות חלוקת תדר פי 2)
- ג. את כניסת השעון נפנה לרגל הרכיב המקבלת את התדר מהגביש המספק 50 מגה הרץ.
- ד. את מוצאו ה 25 של המונה נפנה אל לד ירוק וניראה אותו מהבהב 1.5 פעמים בשניה.

נייצר SYMBOL/רכיב מהמונה שתוכנן בניסוי 3 לאחר הוספת יציאת CO:

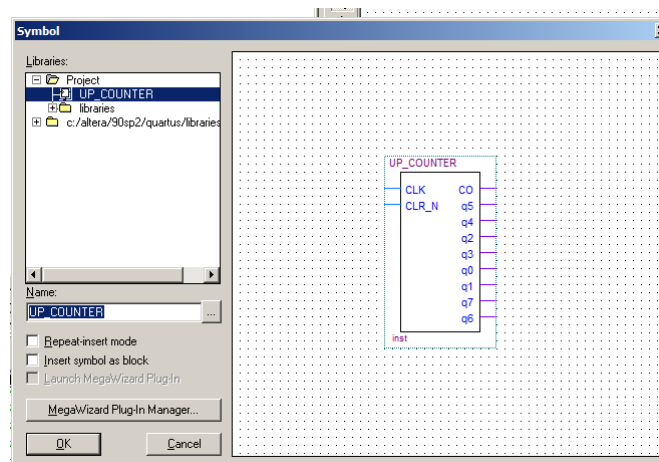


שירשור המונים:

נפתח פרויקט חדש בשם CLOCK_DIVIDER

נפתח קובץ גרפי חדש בשם הפרויקט CLOCK_DIVIDER

ונייבא אליו את רכיב המונה שתוכנן בניסוי 3:

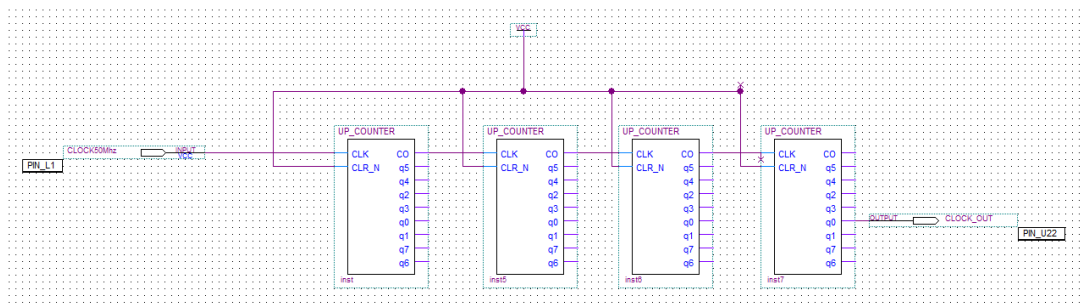
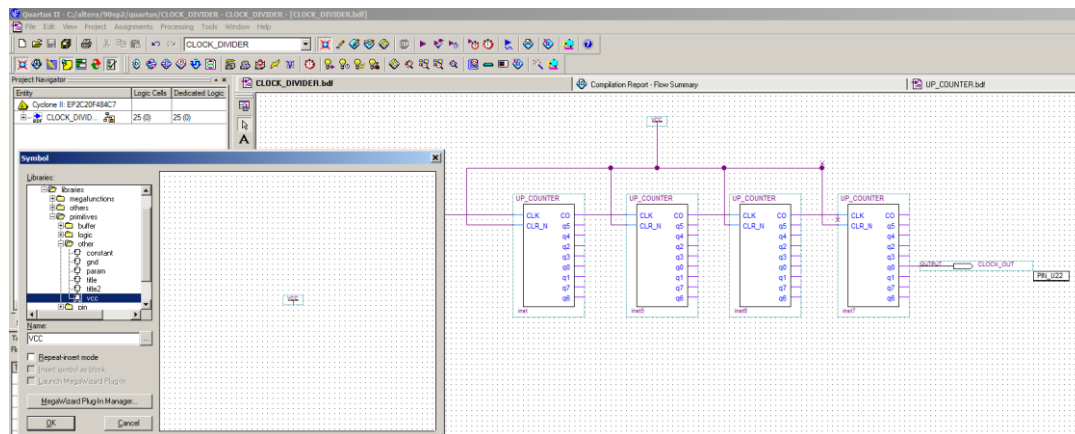


נשרשר בין 4 מונים :

אנו לא זקוקים לאיפוס אשר פעיל בנמוך ולכן נייבא מספריות הרכיבים VCC כדי לנטרל את פעולת האיפוס.

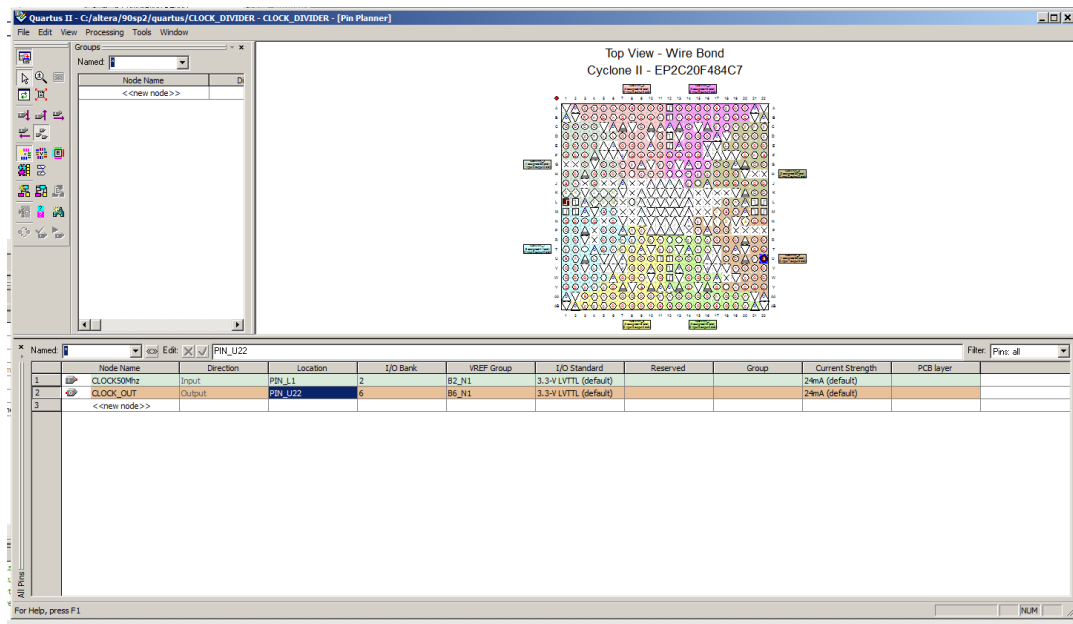
נחבר מוצא אל היציאה ה 25 של המונים שהיא יציאה 7 מהמונה הרביעי

ובכך נייצר חלוקת תדר פי 2, 25 פעמים כדי להגיע לתדר הנמוך הרצוי.



נפנה את כניסת השעון ואת המוצא לרגליים המתאימות ונבצע הידור.

```
# set_location_assignment PIN_L1 -to CLOCK_50#
# set_location_assignment PIN_U22 -to LEDG[0] ;# LEDG[0]
```



לאחר ביצוע פעולת הצבת המוצאים והכניסות לרגליים המתאימות לנו (PINLOCATION) ,
נבצע הידור מחדש לפני צריבה.

הלד הירוק אמור להבהב לאחר צריבה בערך 1.5 פעמים בשניה.